Un'esperienza di insegnamento nella SSIS
Il caso della Logica matematica

Carlo Marchini [(*)]

1. Introduzione

Con questo testo illustro, dal mio punto di vista, le ragioni e le finalità di uno specifico contenuto e la sua collocazione all'interno della formazione dell'insegnante. Dalla lettura dei numeri precedenti degli *Annali della didattica e della formazione docente* mi è parso di individuare una tendenza a presentare una motivata e approfondita analisi delle ragioni, pregi e difetti della SSIS, nella sua esistenza, breve ma fondante. Da parte mia ritengo che l'avvento delle lauree magistrali per l'insegnamento e del TFA non debba disperdere quanto di meglio si è realizzato nella Scuola di Specializzazione. L'unico pericolo che vedo è quello anagrafico: molti tra quelli che hanno collaborato a costruire la SSIS, stanno fatalmente avviandosi alla quiescenza e quindi non potranno contribuire alla realizzazione delle nuove strutture, soprattutto se i tempi di attuazione dovessero dilatarsi.

Pertanto, ho deciso di porre all'attenzione del lettore specifici aspetti contenutistici perché non vadano dispersi ed inoltre di fornire l'indirizzo in cui trovare alcuni, purtroppo non tutti, i materiali elaborati per gli studenti dalla sezione Fisica Informatica Matematica di Parma della SSIS:

http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/SSIS.

Per gli scritti che si trovano a tale indirizzo, chiedo anticipatamente la comprensione del lettore per errori talvolta di contenuto, spesso di lingua, perché la produzione dei materiali è stata quasi contemporanea alla loro utilizzazione per svolgere le lezioni in classe.

(*) Università degli Studi di Parma - Dipartimento di Matematica (carlo.marchini@unipr.it).

2. Perché insegnare la Logica matematica nella SSIS?

A questa domanda posso rispondere, sulla base della mia esperienza individuale. Le frequentazioni con alcuni docenti di Parma (Servi), di Ferrara (Magari, poi trasferitosi a Siena) di Firenze (Mangani e Marcja), tra la fine degli studi universitari e i primi passi di studio personale dopo la laurea, mi avevano indirizzato alla Logica matematica, come un ambito per me 'nuovo' e 'innovativo' che dava finalmente risposta a domande personali. Era tra la fine degli anni '60 e gli inizi dei '70 del secolo scorso. Le persone che ho nominato, in quel momento, erano docenti di discipline 'varie', in particolare Algebra e Matematiche complementari, poiché la Logica matematica non era una disciplina rappresentata (in Italia) da professori ordinari. Se non erro, il primo concorso di Logica matematica dopo la seconda guerra mondiale mise in cattedra Lolli, Previale e Servi.

Meriterebbero di essere analizzate le ragioni che hanno fatto 'sparire' la grande ed importante tradizione italiana sul tema del periodo, sviluppatasi tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento (Peano, Pieri, Padova, Burali-Forti, Vailati,...).

Posso dire di avere visto i primi passi della rinascita della Logica matematica, nell'ambito di quello che allora era parte dello GNSAGA (Gruppo Nazionale Strutture Algebriche Geometriche e Applicazioni) con incontri cui avevo partecipato come 'giovane' ascoltando o anche proponendo seminari che davano spazio a questi 'nuovi' argomenti e facendo conoscenze di coetanei che stavano interessandosi a vario titolo nell'argomento.

La precisazione dei tempi storici della mia formazione ha lo scopo di dare una dimensione diacronica a come ho acquisito consapevolezza del ruolo che la Logica matematica poteva avere nell'insegnamento. La sollecitazione ad occuparmene è venuta poi anche dall'inserimento di argomenti di Logica matematica nei programmi (o dalla proposta di programmi) in cui la Logica trovava posto e spazio. Mi riferisco ai cosiddetti progetti Brocca, al Piano nazionale dell'Informatica alle varie versioni dei programmi per quella che era la Scuola Media e ai programmi per la Scuola Elementare del 1985.

Oggi l'esigenza di argomenti della disciplina, tradotta negli attuali documenti ufficiali della scuola, sembra molto ridotta, ma già da quegli anni di predisposizione di riforme ero alle prese con la Logica matematica da due punti di vista: il primo quello scientifico di ricerca nel campo, il secondo quello di come fare a costruire almeno ‘frammenti’ di sequenze didattiche aventi come scopo l’apprendimento della Logica matematica.

Mi ero reso conto di aspetti molto critici (e ancora li constato, non ostante il tempo che è passato):

a)I testi dei programmi e soprattutto i libri di testo aiutavano poco gli insegnanti. Una pubblicazione apparsa a cura del C.N.R. metteva in luce come buona parte degli errori (per non dire ‘orrori’) che apparivano (allora) sui libri di testo, riguardassero la Logica matematica.

L’inserimento in manuali ‘vecchi’, o di nuova pubblicazione, di un primo o ultimo capitolo dedicato alla Logica (matematica) non influenzava il resto, restando così una specie di corpo estraneo all’impianto didattico del testo.

b) La disciplina insegnata in (ben poche) università italiane, spesso anche sotto altri nomi, ad esempio, Filosofia della Scienza, Matematiche Complementari (o Elementari DPVS), Algebra Superiore, aveva uno scopo notevolmente diverso dalle esigenze della formazione professionale dell’insegnante.

c) Il problema non era (e continua a non essere) solo quello di individuare i contenuti, ma di mutare filosofia ed epistemologia sull’argomento. Un esempio per spiegarmi meglio. Le tavole di verità si trovano in molti manuali scolastici ed universitari, come se si trattasse della ‘summa’ della Logica matematica necessaria per affrontare lo studio della Matematica. Le tavole di verità per il calcolo delle proposizioni (precisazione che talvolta non appare esplicitamente nei manuali succitati) hanno avuto una lunga ‘gestazione’ dai primordi greci della scuola di Megara, passando attraverso l’analisi sviluppatane dalla Logica medievale, per giungere in forme varie, fino alla versione ‘strutturale’ che è presentata, in un corso universitario, in poche righe e poche informazioni. Ancora oggi, come ben provano le ricerche di Durand-Guerrier (2003, 2004, 2010) c’è il problema di fare accettare, ad esempio, l’implicazione materiale (detta anche implicazione filoniana) a studenti e docenti di scuola ed università. La comprensione del significato e dell’applicabilità di tale strumento (ed anche di altri strumenti logici) non può essere ridotta all’esclusiva conoscenza delle procedure di calcolo, ma deve inglobare anche la parte storica in ambito filosofico e cognitivo.

d) Un altro aspetto di rilevanza epistemologica è frutto dalla conoscenza che si può sviluppare in un corso universitario di Logica matematica: la definizione di derivazione (formale) facilita l’attenzione ai singoli passaggi dimostrativi poiché essa fornisce il criterio principe di controllo per le dimostrazioni (deduzioni) formali. Si facilità, così, l’acquisizione di

un'attitudine che poi può agevolare l'analisi delle argomentazioni di qualsiasi tipo, per mettere in luce il ruolo e la pregnanza di quegli aspetti che sono assegnati come 'intuitivi' o 'ovvi'. Pertanto l'analisi 'fine' svolge un preciso ruolo di 'certificazione' della conoscenza.
e) I rapporti della Logica matematica con la valutazione. C'è un problema generale nella costruzione dei programmi scolastici: ogni argomento 'innovativo' per la scuola non può essere introdotto solo dal punto di vista dei concetti o delle applicazioni che esso richiama e su cui si 'appoggia'. La sua introduzione dovrebbe essere accompagnata da indicazioni didattiche che comprendano anche indirizzi sulla valutazione. Invece quest'aspetto è demandato ai singoli docenti ed agli autori di libri di testo. Il risultato, almeno per quanto riguarda la Logica matematica nella scuola, è che i capitoli eventualmente presenti, sono accompagnati da un piccolo numero di esercizi e problemi, non tutti rilevanti. L'insegnante con o senza preparazione universitaria in Logica matematica, può non cogliere l'importanza dell'argomento, ma sicuramente ha ben pochi strumenti sui manuali e tradizione alle spalle, per inserirli nelle prove di valutazione. Ben diversa la pratica e la tradizione della valutazione in Aritmetica, Algebra, Geometria, Analisi matematica, ecc.
Personalmente ho scritto articoli su riviste e in libri per illustrare alcuni di questi aspetti (cfr. Bibliografia). L'approfondimento dell'argomento mi ha portato alla sorpresa, per me, di vedere che in numerosi esempi di quesiti, in vari ambiti, anche universitari, le difficoltà degli studenti non riguardavano i contenuti specifici della disciplina, ma all'articolazione dei contenuti stessi per mezzo di (semplici) ragionamenti logici. Quindi, anche se non è facile dare criteri di valutazione in Logica matematica, la Logica matematica entra nella valutazione.
f) Queste riflessioni hanno motivato la scelta della Sezione di Parma per l'Indirizzo FIM della SSIS d'inserire la Logica matematica tra gli argomenti da trattare (per le classi di abilitazione A047 e A049), rifuggendo, possibilmente, dalla rigida schematizzazione che s'incontra sui manuali scolastici e sui testi universitari specifici per l'argomento, ma cercando di mostrare come si debba/possa gestire l'apprendimento della Logica matematica dalle prassi scolastiche più consuete. Ho avuto conferma della validità della scelta quando la Sezione di Modena della SSIS mi ha richiesto di svolgere un breve ciclo di lezioni di Logica matematica anche per la classe di abilitazione A059.
g) C'era anche da tenere conto che non si poteva fare appello a conoscenze di Logica matematica acquisite durante gli studi universitari, sia perché gli specializzandi nelle classi A047, A049 e A059 avevano lauree

di vario tipo e non solo di matematica, ma anche tra quelli laureati in matematica non tutti avevano sostenuto esami di Logica matematica, stante, inoltre, la differenza di obiettivi tra università e insegnamento.

3. I temi fondamentali della Logica matematica per l'insegnamento

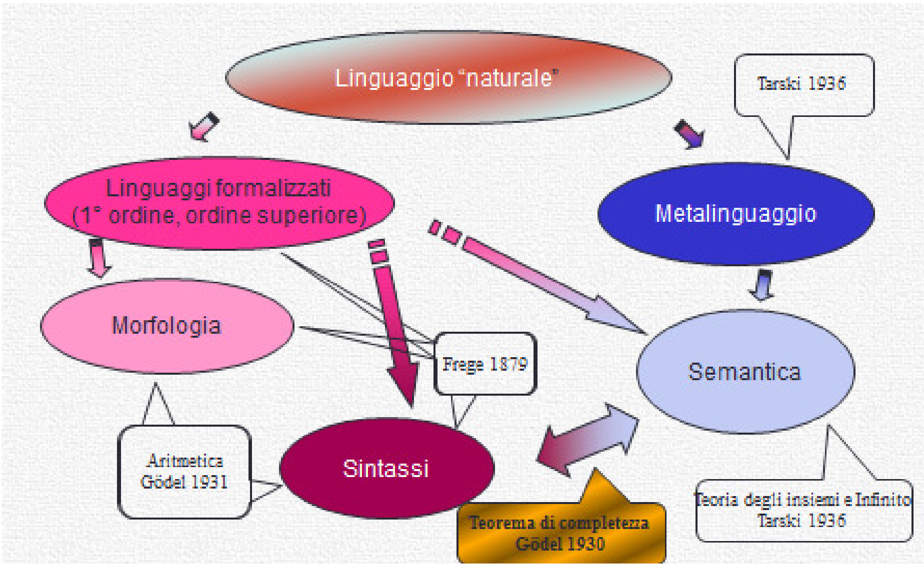
I tempi ristretti in cui svolgere le lezioni SSIS hanno richiesto l'individuazione di argomenti che illustrassero gli aspetti fondamentali o fondanti, lasciando poi al futuro insegnante il compito di approfondirne, articolarne la conoscenza con lo studio personale. Da questa esigenza è nata una scelta ristretta di temi ed una serie di problemi interessanti per il ricercatore che ha dovuto affrontare la Logica matematica da un diverso punto di vista.

3.1 Uno schema riassuntivo

Ho cercato di riassumere in uno schema alcune distinzioni che servono per mettere in luce il ruolo di teoremi importanti.

La Logica è nata come prima analisi del linguaggio e di questo ha portato con sé, per secoli, sia la potenza descrittiva sia le ambiguità e le difficoltà di espressione. Lo studio delle discipline scientifiche ha messo in luce, fin dall'antichità, la necessità di descrivere i concetti in termini precisi e di dare una giustificazione ai ragionamenti che andasse al di là della 'ostensione' o del 'buon senso'. L'opera di Gottlob Frege (1848 – 1925), a partire dal 1879, è stata, in questo senso, fondamentale. Grazie a lui ed alle sue intuizioni, si è 'scarnificato' il linguaggio da usare per la matematica riducendolo ad una sorta di oggetto algebrico con costanti, variabili (sarebbe meglio chiamarle indeterminate), relazioni e funzioni. L'allontanamento del linguaggio (ora) formale da quello naturale, ha richiesto anche la precisazione non ambigua delle regole esplicite per la formazione delle 'parole' del nuovo linguaggio e l'individuazione, ancora una volta precisata, delle regole che sovraintendono la costruzione delle dimostrazioni, con il corredo di assiomi e definizioni.

Si è così creata la sintassi che assieme alla morfologia costituisce una parte di un sistema logico con aspetti finitari (almeno per buona parte delle Logiche del primo ordine). L'analisi compiuta da Kurt Gödel (1906 – 1978), nel 1931, mostra come sia possibile descrivere gli aspetti morfologici e buona parte di quelli sintattici mediante l'aritmetica. Anzi grazie ad una nuova teoria matematica delle funzioni ricorsive, creata allo scopo dallo studioso austriaco, egli ha saputo esprimere in termini di relazioni e proprietà dell’aritmetica formalizzata inaspettati legami anche col processo di deduzione.



Prima di questo risultato per vari versi sorprendente, Gödel è riuscito a dare una risposta ad un problema lungamente discusso da Frege e da David Hilbert (1862-1943), vale a dire quali siano le condizioni di ‘verità’ per una teoria formale, quesito che trae la sua origine da quello che Aristotele (384-322 a.C.) propone come *Postulato di verità* per una teoria deduttiva. La cosa sarebbe da precisare con grande attenzione.

Pochi anni dopo Alfred Tarski (1902-1983) presenta un concetto di verità, adatto ad una gran parte delle teorie matematiche a partire da un’analisi di uno dei più antichi paradossi (attribuito ad Epimenide, VI sec. a.C.): *il paradosso del mentitore*.

Tarski individua uno snodo fondamentale: la necessità di distinguere tra il linguaggio in cui è scritta una teoria (linguaggio oggetto) e quello in cui s’interpreta il linguaggio (metalinguaggio). Grazie a questa differenziazione Tarski produce un’esplicazione matematica del concetto di verità e lo articola per le formule del linguaggio in distinzioni più sottili come soddisfacibilità in un’interpretazione, verità in un’interpretazione e validità e le loro negazioni.

A questo punto l’impianto generale è pronto; come conseguenza dei teoremi di Gödel del 1931 e di Tarski del 1936 è necessario distinguere nettamente tra dimostrabilità e verità. La distinzione è ancora poco compresa da testi e da docenti.

3.2 Alcune distinzioni

Questo schema e la sua lettura è stato un contributo fondamentale per la didattica della SSIS. In base alla sua analisi ho avuto occasione di illustrare alcune distinzioni tra concetti apparentemente sinonimi, oltre a quella tra verità e dimostrabilità.

Per fare comprendere agli specializzandi la differenza tra l'uso del linguaggio e del metalinguaggio ho usato l'esempio della definizione della potenza (naturale) come solitamente viene espressa sui manuali. Per ogni numero reale a (spesso la specificazione è omessa), si definisce $a^2 = a\times a$; $a^3 = a\times a\times a$, eccetera. Ora è proprio 'scavando' nel termine 'eccetera' che si hanno delle sorprese. Infatti, alcuni manuali 'riassumono' la situazione ponendo, per ogni numero reale a e per ogni numero naturale n, $a^n = a\times\ldots\times a$, n-volte. Seguono poi le proprietà delle potenze rispetto al prodotto ed alla divisione di potenze della stessa base. Da questa scelta vengono le 'dimostrazioni' che $a^0 = 1$ ed altre proprietà. Poniamo ora attenzione al fatto che in $a^n = a\times\ldots\times$, n-volte accade un fatto strano. Esemplifichiamolo con $n = 7$, si ha $a^7 = a\times\ldots\times a$, 7-volte. È evidente che in questa scrittura è presente 7 in due modi diversi: la prima volta si tratta di un numero naturale, oggetto di cui si sta parlando nel linguaggio e nella teoria con cui si esprime l'elevamento a potenza. La seconda volta 7 è divenuto un aggettivo numerale cardinale. Questo cambio di 'natura' mostra che la definizione è data in un linguaggio 'ibrido' un italiano con simboli matematici. Se si vuole evitare tale mescolanza di linguaggio e metalinguaggio, basta dare la definizione ricorsiva di potenza con esponente naturale:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a \times a^n \end{cases}$$

Con questa definizione si aboliscono: la 'dimostrazione' che $a^0 = 1$, l'uso tacito della proprietà associativa, essendo la moltiplicazione un'operazione binaria, il fatto che non ha senso porre (o 'dimostrare') che $a^1 = a$, dato che non si può considerare una moltiplicazione con un solo termine ed infine la problematica uguaglianza $0^0 = 1$, che fa sempre tanto discutere.

Per illustrare la differenza tra sintassi e semantica, concetti non sempre chiaramente espressi nella pratica matematica, esempi 'centrali' sono stati il concetto di polinomio e le frazioni di polinomi.

La scuola e l'università definiscono i polinomi in modo diverso. Solitamente sui manuali scolastici si fa prima l'introduzione dei monomi, definiti talvolta in modo assai criticabile, poi i polinomi sono somme di monomi.

Dal punto di vista strutturale ed anche logico, si tratta di una definizione assai discutibile, ma comunque di natura puramente morfologica. Non si esplicitano poi le proprietà delle operazioni tra polinomi, desumendole da quelle della struttura numerica in cui si 'pescano' i coefficienti (o le costanti), ma sono evidentemente assiomi e pertanto si resta in ambito sintattico.

In un corso di algebra 'standard' dell'università, si definiscono i polinomi (in un'indeterminata) come serie formali finite di elementi di un anello o campo. Per fare questo non c'è neppure bisogno dell'indeterminata, la quale ha lo stesso ruolo della virgola di separazione nelle n-ple ordinate di 'coefficienti'. In questo caso le operazioni, solitamente, sono definite esplicitamente anche se 'ricalcano' o 'ricopiano' quelle della struttura da cui si è partiti, per mezzo di assiomi.

Sia ora A un dominio d'integrità unitario e sia x un'indeterminata su A (vale a dire un elemento del tutto estraneo ad A). La costruzione dell'anello dei polinomi $A[x]$ nell'indeterminata x a coefficienti in A è anch'esso un dominio d'integrità, com'è facile dimostrare (teoremi di trasporto). Applicando ad $A[x]$ lo stesso procedimento che permette di passare da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ (localizzazione) si ottiene un campo, indicato con $A(x)$ o con altre scritture. Gli elementi sono le classi di equivalenza dei quozienti di due polinomi (in cui il polinomio divisore non è il polinomio nullo, 0) rispetto all'equivalenza data dal prodotto in croce. In tale ambito si può scrivere $\frac{x^2-x}{2x}=\frac{x-1}{2}$, denotando la relazione di equivalenza col simbolo d'uguaglianza come si fa con le frazioni (numeriche) equivalenti. Solitamente, a questo punto, gli studenti 'insorgevano' osservando che si trattava di funzioni diverse perché con dominio diverso. Ciò dava modo di far loro riflettere che per parlare di funzioni, bisogna considerare x non più come indeterminata, ma come variabile in un opportuno dominio d'interpretazione (per antonomasia $\mathbb{R}$). Si ricade così nella semantica.

Un punto delicato in cui morfologia, sintassi e semantica si mescolano, è il cosiddetto principio d'identità dei polinomi che, vari testi presentano come solo morfologico, oppure come morfologico e sintattico, oppure come solo semantico.

Nelle lezioni sono stati numerosi gli esempi tratti dalla pratica o dai manuali scolastici in cui si è resa evidente la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, e quella tra sintassi e semantica.

Un altro aspetto fondamentale è la distinzione tra intensione ed estensione. La cosa si vede bene in ambito insiemistico, ma ha valenza in un dominio più ampio. È prassi consueta introdurre la rappresentazione per proprietà caratteristica di un insieme con la scrittura $\{x \mid P(x)\}$. Essa offre la possibilità di indicare l'oggetto 'insieme' come una 'estensione', rappresentata dalla formula $P(x)$ che in questo caso è la 'intensione'. L'esempio offre l'opportunità di porre l'attenzione sulle 'variabili mute', concetto che si estende ed applica anche alla presentazione delle funzioni. La consegna classica di determinare il dominio di una funzione (reale di variabile reale) di cui è data un'espressione analitica, la tipica assegnazione $y = f(x)$, pone una domanda sull'estensione ricavabile a partire da un'intensione. Allora nasce il problema di quali siano i criteri di equivalenza delle intensioni e quelli per le estensioni, con il corollario dei principi di equivalenza delle equazioni, disequazioni e di identità dei polinomi.

3.3 Il sistema deduttivo

Come detto in precedenza, il ruolo centrale della sintassi è offrire metodi precisati per realizzare deduzioni (da ipotesi) e dimostrazioni. In logica sono noti molteplici sistemi deduttivi (Marchini, 1996a). I principi ispiratori dei vari sistemi (per il calcolo dei predicati del 1° ordine) non sono sempre riconducibili uno all'altro. Un sistema di tipo hilbertiano, ispirato ad esigenze metateoriche di minimalità, presenta il minor numero possibile di connettivi, assiomi e regole d'inferenza. Con questo sistema risulta molto agevole la dimostrazione del teorema di deduzione e di altri risultati. Altri sistemi (tavole) inglobano parte della semantica nella sintassi per avere immediata dimostrazione del teorema di completezza. Si tratta però di scelte lontane dalla prassi usuale con cui si confezionano le dimostrazioni in un testo scolastico o in un corso universitario non di Logica matematica.

Un poco più vicino agli aspetti della deduzione che s'incontrano nelle aule scolastiche (e universitarie) sono i cosiddetti sistemi con *sequent* la cui importanza teorica è fondamentale riguardo al problema della coerenza dell'aritmetica (Gentzen) e dell'analisi (Takeuti). Derivato da questi ed idoneo, a mio parere, agli scopi didattici è un sistema del tipo detto della ‘deduzione naturale’, dovuto a Prawitz (1971).

Nella presentazione alla SSIS ho proceduto al contrario di quanto qui illustrato, cioè sono partito dai testi scolastici traendo brevi brani da essi ed analizzando con gli specializzandi quali ‘snodi’ logici erano presenti in ciascuno di essi. L’elenco dei testi utilizzati in quest’ analisi è il seguente:

Belli I., Lupo Perricone A., Pagni L., Pallini S. (1988), *Osservare e dedurre*, Torino: S.E.I., pp. 188-189.
Cateni L., Bernardi C., Maracchia S. (1987), *Geometria analitica e complementi di algebra*, Firenze: Le Monnier, pp. 42 e 43.
Cateni L., Fortini R. (1959), *Il pensiero geometrico*, vol. II, Firenze: Le Monnier, p. 19.
Del Giudice V., Morina S. (1989), *Corso di Matematica*, Torino: Petrini, p. 242.
Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. (1994), *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Milano: Ghisetti & Corvi, p. 210.
Gallo E. (1988), *Fare Matematica*, vol. II, Torino: S.E.I. , p. 564.
Lamberti L., Mereu L., Nanni A. (1992), *Matematica Uno elementi di geometria analitica*, Milano: Etas Libri, p. 370.
Palatini A., Reverberi Faggioli V. (senza anno di pubblicazione), *Complementi di Matematica*, Milano: Ghisetti e Corvi, 7ª ed., pp. 206 – 207.
Speranza F., Rossi Dell'Acqua A. (1981), *T - Il linguaggio della Matematica*, Bologna: Zanichelli, p. 210.
Speranza F., Rossi Dell'Acqua A. (1988), *Il Linguaggio della Matematica*, Bologna: Zanichelli, 2ª ed., p. 996.

Sulla base della permanenza dei libri scolastici (il manuale di Palatini dovrebbe essere stato scritto attorno al 1905) penso che con un poco di buona volontà l’insegnante possa trovare brani analoghi anche oggi sui libri ‘attualizzati’. La scelta dei libri si può dire casuale: ho usato i testi che avevo disponibili al momento. Le date confermano che si tratta, per lo più, dei testi scolastici miei o delle mie figlie. Ho riportato l’elenco per mostrare come analizzando brani di manuali, si colgono alcuni aspetti fondamentali:
1) Nella presentazione scolastica si usa il linguaggio naturale con qualche simbolo matematico, ma si sfrutta l’articolazione del linguaggio utilizzando tutti i connettivi (e non soltanto alcuni di essi, come nei vari sistemi logici che per esigenze metateoriche di ‘minimalità’ limitano i connettivi e i quantificatori e il numero di assiomi e regole al minimo indispensabile).

2) Il procedimento seguito ed esemplificato consiste per lo più nella 'introduzione' e nell'eliminazione dei connettivi e dei quantificatori.
3) Il procedimento di deduzione (dimostrazione) non è 'lineare' come nei sistemi di Hilbert ma è ramificato (grafo ad albero) con un'unica radice (la formula da dimostrare) ed ha per foglie le eventuali ipotesi della deduzione.
4) Vi è l'uso d'ipotesi temporanee che poi vengono eliminate, come avviene in molti casi in cui si fa riferimento a ragionamenti ausiliari.

Apparentemente, quindi, la presentazione appare ridondante giacché sono note regole che permettono di definire i connettivi e i quantificatori in base ad altri connettivi e quantificatori. Così non è perché, (tranne che per la doppia implicazione) la sorpresa è che nei manuali si 'praticano' almeno dimostrazioni di almeno tre diversi tipi di logica: minimale, intuizionista e classica. Ora l'interdefinibilità dei connettivi e dei quantificatori è una prerogativa esclusiva della logica classica. Le tre logiche sono legate (sarebbe da precisare meglio e con possibili 'rovesciamenti' dovuti alle diverse interpretazioni dei connettivi e dei quantificatori) dal fatto che una formula dimostrabile in logica minimale è dimostrabile anche in logica intuizionista e una dimostrabile in logica intuizionista è dimostrabile in logica classica. Da un punto di vista estensionale, gli insiemi dei teoremi delle tre logiche costituiscono una catena d'inclusioni proprie: $T_\mu \subset T_\iota \subset T_c$. Ciò significa che esistono formule dimostrabili classicamente, ma non intuizionisticamente, e altre dimostrabili nel sistema intuizionista e non in quello minimale.

Nella presentazione di Prawitz la 'chiave' che permette di passare da Logica minimale a Logica intuizionista è la legge logica *ex absurdo quodlibet* dovuta a Giovanni di Cornovaglia, più noto come Pseudo-Scoto (XIII sec.). Invece, per passare da Logica intuizionista a Logica classica è necessaria una forma di dimostrazione per assurdo, che si può riassumere nella 'regola' per cui due negazioni affermano.

Per completezza d'informazione si possono presentare qui gli assiomi e le regole d'inferenza (da me rielaborati, ma sostanzialmente dovuti a Prawitz)

(i.$\wedge$) $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$ (e.$\wedge$) $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$; $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$

(i.∨) $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$; $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

(e.∨) $\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vartheta\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vartheta\end{matrix}}{\vartheta}$

(i.→) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}$

(e.→) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$

(i.↔) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$; $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

(e.↔) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}$; $\dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}$

Può sorprendere che in queste regole non compaia il connettivo di negazione. In questo sistema si preferisce introdurre il simbolo di falsità $\perp$, da ritenersi una lettera proposizionale oppure una fissata contraddizione. Mediante esso si definisce la negazione come un caso particolare d'implicazione, in cui $(\neg\varphi)$ sta per $(\varphi \to \perp)$.

Così facendo, le regole d'introduzione ed eliminazione della negazione si possono vedere come casi particolari delle regole d'introduzione ed eliminazione dell'implicazione. Per meglio chiarire si pone

(i.¬) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \perp\end{matrix}}{\neg\varphi}$;

(e.¬) $\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}$.

È immediato costatare che tali regole derivano direttamente da quelle dell'implicazione, utilizzando la definizione di negazione. La prima delle due è un tipo di dimostrazione per assurdo. Con queste regole si conclude la presentazione della logica proposizionale minimale.

Per passare al calcolo dei predicati, bisogna definire accuratamente tutta la parte morfologica (termini formule, enunciati) nel nuovo linguaggio che prevede indeterminate e quantificatori, ed eventualmente l'uguaglianza, in aggiunta ai connettivi con i quali si era costruito il calcolo proposizionale. Si forniscono ulteriori precisazioni morfologiche, che qui si tralasciano, ed infine le regole d'introduzione ed eliminazione.

(i.∀) $\dfrac{\varphi(x)}{\forall x(\varphi(x))}$; (e.∀) $\dfrac{\forall z(\varphi(z))}{\varphi(t)}$

(i.∃) $\dfrac{\varphi(t)}{\exists x(\varphi(x))}$; (e.∃) $\dfrac{\exists y(\varphi(y)) \qquad \begin{matrix}[\varphi(c)]\\ \psi\end{matrix}}{\psi}$

Si annettono due ulteriori regole che caratterizzano la logica utilizzata, intuizionista o classica, come sarà specificato in seguito.

Si rimanda ai testi presenti all'indirizzo:

http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/Didattica.html (in cui troverà Corsi di Logica SSIS suddivisi in Indice e quattro lezioni) la precisazione delle varie clausole che sono necessarie per il buon funzionamento delle regole ed inoltre al 'significato' e la modalità di applicazione delle parentesi quadre.

Il lettore armato dei testi che ho indicato ed altri, nonché di buona volontà, scoprirà che le regole (e.∧) e (i.∨) sono accompagnate spesso dalla dizione 'a maggior ragione'. La regola (e.∨) è la regola che è usata nella dimostrazione per casi. La regola (i. →) è connessa col teorema di deduzione, mentre la regola (e. →) è il *Modus ponens* (una delle poche regole di deduzione citate sui manuali scolastici). La regola (i. ∀) traduce la dizione 'data la genericità di x', mentre la regola (e.∀) traduce la dizione 'dal fatto che per tutti… si ha, in particolare…'. La regola (e.∃) generalizza la dimostrazione per casi.

Si possono aggiungere le regole per l'uguaglianza, anzi in questo caso si ha un (l'unico) assioma del calcolo dei predicati con uguaglianza, cioè una 'frazione' con numeratore vuoto.

(rifl.) $\dfrac{}{x = x}$; (simm.) $\dfrac{x = y}{y = x}$; (trans.) $\dfrac{x = y \quad y = z}{x = z}$;

(sost.) $\dfrac{x = y \quad \varphi(x)}{\varphi(y)}$

Con questi assiomi si può provare

$$\forall x(U(x) \rightarrow M(x)),\ \forall x(G(x) \rightarrow U(x)) \vdash_{\mu} \forall x(G(x) \rightarrow M(x)),$$

formalizzazione del sillogismo della prima figura di tipo *Barbara*.

Si ha anche $\vdash_{\mu} \exists x(\neg\varphi(x)) \rightarrow \neg\forall x(\varphi(x))$, mentre la formula $\neg\forall x(\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\neg\varphi(x))$ non è dimostrabile nel calcolo dei predicati minimale, ma solo in quello classico.

Come detto sopra si ‘rafforza’ il sistema minimale con altre due regole, quelle dette del «falso intuizionista» e del «falso classico»:

$$(\bot_\iota)\ \frac{\bot}{\varphi}; \qquad\qquad (\bot_c)\ \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \bot\end{array}}{\varphi}.$$

La prima è la regola dello Pseudo Scoto, connessa alla dimostrazione per assurdo; la seconda (che rafforza la prima) è un ulteriore tipo di dimostrazione per assurdo che si può anche scrivere come $\neg\neg\varphi \vdash_c \varphi$, vale a dire che due negazioni affermano. Si noti che $\varphi \vdash_\mu \neg\neg\varphi$ (o anche $\vdash_\mu(\varphi \to \neg\neg\varphi)$), ma lo scambio di posto attorno al segno di derivazione tra le due formule della doppia negazione richiede la logica classica (e anche per $\vdash_c (\neg\neg\varphi \to \varphi)$). Si ha poi $\vdash_\iota ((\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi))$, ma $\vdash_c ((\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi))$.

La pratica con questo tipo di calcolo mostra immediatamente che le dimostrazioni minimali sono più facili che quelle intuizioniste che, a loro volta sono più facili di quelle classiche.

L’insegnante ha così uno strumento per analizzare una consegna facendo una valutazione a priori delle difficoltà. Si ha, quindi, un possibile metodo di valutazione.

Con questo non s’intende affermare che si debbano svolgere in classe dimostrazioni formali, solo auspicare che l’insegnante analizzi le argomentazioni riportate sul manuale col sistema logico rendendosi conto del grado di difficoltà di apprendimento che il testo comporta.

4. Un altro strumento per la valutazione: le sostituzioni

Il tema delle sostituzioni è sempre stato al centro delle mie considerazioni, perché vedo in esso un oggetto didattico che fa parte di quello che si può definire *curriculum implicito.* Si pensi alla risoluzione dei sistemi algebrici. Tra i metodi possibili, c’è il metodo di sostituzione che è presentato senza spiegare la natura e le caratteristiche della sostituzione. Si tratta di uno dei casi previsti da Sfard (2008) laddove osserva «Why are we able to use specialized keywords without ever being exposed to their explicit definitions?».

Le sostituzioni (nel caso dei sistemi algebrici) potrebbero essere giustificate come proprietà dell’uguaglianza, ma in ambito logico sono indispensabili come ‘operazioni’ morfologiche sui termini e sulle formule anche nel caso di teorie in cui l’uguaglianza non ci sia.

Con un’analisi, neppure troppo approfondita si possono riconoscere esempi di sostituzioni anche nell’apprendimento della lingua già ai primi anni di scuola primaria, se non addirittura nella scuola dell’infanzia.

La scarsa consuetudine con questo strumento, potrebbe farlo ritenere semplice ed intuitivo. Forse è così, e la letteratura didattica non si è molto occupata di ciò. Il percorso proposto agli studenti della SSIS è stato quello di mostrare come si utilizzano le sostituzioni in modo corretto (sostituzioni come procedura matematica), di come si analizzano le difficoltà intrinseche delle sostituzioni (sostituzioni come oggetto matematico) ed infine quali strategie utilizzare per il loro insegnamento (didattica delle sostituzioni).

Un paio di esempi per convincere il lettore. Tra le proprietà formali (o strutturali) dell’addizione c’è la proprietà associativa, ad esempio ((3 + 5) + 4) = (3 + (5 + 4)). Tale proprietà è fondamentale per svolgere i calcoli più complessi, anche se l’algoritmo dell’addizione in colonna tende a nasconderla. L’uguaglianza è giustificabile col calcolo separato dei due membri: ((3 + 5) + 4) = (8 + 4) = 12 e 3 + (5 + 4) = 3 + 9 = 12. Già qui si utilizza la sostituzione. Usando il sistema deduttivo di Prawitz si ottiene un semplice teorema aritmetico ottenuto partendo dai teoremi aritmetici (3+5) = 8 e (8 + 4) = 12:

$$(\text{sost})\ \frac{(3+5)=8 \quad (8+4)=12}{((3+5)+4)=12}$$

In relazione con tale proprietà su alcuni si testi si trova la ‘proprietà dissociativa’. Dal punto di vista strutturale, tale proprietà non ha una natura formale, ma dal punto di vista del calcolo e da quello cognitivo può essere utile. Sia ancora (7 + 5) = 12. Data la semplicità del computo, quanto si mostra in seguito può essere considerato superfluo. Ma così non è: soprattutto quando si devono fare calcoli a mente, la strategia che si esibisce potrebbe essere utile. Si ha (7 + 8) = ((5 + 2) + 8) = (5 + (2 + 8)) = (5 + 10) = 15. Questo procedimento è chiamato ‘proprietà dissociativa’. Esso ha senso ed utilità sotto le seguenti ipotesi: è più facile sommare (2 + 8) che (7 + 8) perché la prima addizione dà una cifra ‘tonda’ o ‘completa la decina’; a questo punto basta aggiungere 5 tra le unità ed il gioco è fatto. Ovviamente ciò prevede che si sappia scomporre 7 come (5 + 2). Pertanto, si deve padroneggiare la tavola pitagorica dell’addizione; avere memorizzato come si raggiunge 10 e poi scomporre adeguatamente 7. C’è ancora in gioco l’uguaglianza 7 = (5 + 2), ma stavolta questa non è giustificabile esclusivamente in virtù del testo assegnato, senza fare ricorso a conoscenze precedenti. Gray e Tall (1994) vedono in questo 'artificio' un esempio di flessibilità e di *procept*, cioè di un processo che è divenuto concetto in sé. Dal punto delle sostituzioni, nel primo caso si deve applicare una sostituzione diretta; nel secondo una sostituzione inversa e tale secondo tipo di procedura è più difficile del primo.

Un altro esempio che capita di incontrare nelle aule della scuola secondaria di secondo grado: è più semplice risolvere l'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$ oppure $2^{4x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$? Di fatto, si tratta della stessa equazione, ma nel secondo caso con un 'travestimento' che è legato alle sostituzioni e che è la parte difficile per lo studente che lo deve 'svelare'.

Per il lettore che volesse di completare le informazioni che qui sono solo accennate, si rimanda a:

http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/Didattica.html.

5. Conclusione

Dalle relazioni finali della SSIS di Parma ho potuto costatare che buona parte di quanto era stato insegnato sull'argomento Logica matematica era entrato nel patrimonio degli specializzandi. Ciò forse perché la materia non era stata trattata solo fine a se stessa, ma in ogni occasione a lezione ed al momento degli esami, era tornata alla ribalta, a volte come richieste di chiarimenti, a volte come impostazione del discorso. Alcune relazioni finali, poi, erano state incentrate proprio sull'insegnamento di argomenti logici nella scuola.

Oggi che l'esperienza SSIS è conclusa, a Parma si è cercato, per due soli cicli, di 'rivitalizzarla' parzialmente con un curriculum specifico della laurea magistrale in matematica. Gli studenti che hanno seguito tale curriculum sono convinti dell'importanza formativa e chiarificatrice che la conoscenza logica apporta alla comunicazione della matematica. Mi auguro che nella attivazione della laurea magistrale per l'insegnamento e del TFA si tenga conto di questa esperienza e si colga l'importanza formativa della Logica matematica. Per quanto riguarda il momento attuale, la realizzazione regionale di tale auspicio sembra poco probabile.

Bibliografia

Durand-Guerrier, V. (2003), Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 53, pp. 5-34.

Durand-Guerrier, V. (2004), Logic and mathematical reasoning from a didactical point of view a model-theoretic approach,
http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Guerrier_cerme3.pdf

Durand-Guerrier, V. (2010), Logique et raisonnement mathématique Aspects epistémologiques et didactiques sur l'implication (Partie 1 e 2),
www.unilim.fr/irem/fileadmin/documents/conferences/2009-2010/Durand-Guerrier-21-04-2010-partie1.pdf (partie2.pdf)

Ferrari, P.L., Marchini, C. (1996), Teaching and Learning Logic, in N.A. Malara, M. Menghini e M. Reggiani (a cura di), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*, Roma: C.N.R., pp. 86-99.

Frege, G. (1879), *Begriffschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache das reinen Denken*, Halle a/S.

Gödel, K. (1930), Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik un Physik*, 37, pp. 349-360.

Gödel, K. (1931), Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, pp. 173-198,
(https://metalab.at/wiki/images/0/0b/Goedel.pdf)

Gray, E., Tall, D. (1994), Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), pp. 116-141.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (1997), *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica: un'occasione di ricerca didattica*, Galatina (LE): Editrice Salentina.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (2003), Linguaggio dell'insegnamento e linguaggio dell'apprendimento: due mondi a confronto in ambito matematico, *Convegno Nazionale 'L'insegnamento della matematica nel quadro delle riforme'*, pp. 46-51.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (2004), *Il comunicare in Matematica Formalizzazione: come, quando, perché nella pratica didattica*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma n. 377, pp. 1-65.

Letizia, A., Marchini, C., Iacomella, A. (1999), Logic for assessing or assessment, in F. Jaquet (a cura di), *Logic*, Actes CIEAEM 50, Neuchatel – CH: IRDP, pp. 319-329

Marchini, C. (1990), Le sostituzioni e la didattica della Matematica, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, A., pp. 145-153.

Marchini, C. (1990), Le sostituzioni e le relazioni, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, pp. 732-744.

Marchini, C. (1993), La sintassi del calcolo dei predicati desunta da procedimenti dimostrativi in uso nei manuali scolastici, in A. Bernardi, S. Cerrato e P. Universo (a cura di), *La Comunicazione Scientifica - Media e Metodi 3: La Matematica tra didattica e cultura*, Trieste, Laboratorio dell'Immaginario Scientifico, pp. 100-123.

Marchini, C. (1993), Logica e Teoria degli Insiemi, Parte I, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, pp. 1061-1076.

Marchini, C. (1996a), Schemi di deduzione, in L. Ciarrapico e D. Mundici (a cura di), *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma: Direzione generale dell'Istruzione Classica, pp. 107-132.

Marchini, C. (1996b), La deduzione: esperienze didattiche, in L. Ciarrapico e D. Mundici (a cura di), *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma: Direzione generale Istruzione Classica, pp. 159-175.

Marchini, C. (2002), Instruments to detect variables in primary school, in J. Novotna (a cura di), *Proceedings CERME 2*, Prague: Charles Univ. Fac. of Educ., vol 1, pp. 47-57.

Marchini, C., Kaslova, M. (2003), Substitutions and variables in primary school. A comparative study on pre-conceptions, in J. Novotna (a cura di), *Proceedings SEMT '03*, Prague: Charles Univ. Fac. of Educ, pp. 113-117.

Prawitz, D. (1971), Ideas and results in Proof Theory, in J. Fenstad (a cura di), *Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam: North-Holland, pp. 235-307.

Sfard, A. (2008), *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*, New York: Cambridge University Press.

Tarski, A. (1936), Der Wahrheitsbegriff in den formalisiert Sprachen, *Studia philosophica*, 1, pp. 261-405.