Un approccio alla trigonometria attraverso un percorso storico

Alessandra Fiocca[(*)]

1. Introduzione

Già all'inizio del secolo scorso, nell'ambito del lavoro di redazione dei nuovi programmi di matematica per la scuola superiore (Commissione Reale 1908), Giovanni Vailati (1863-1909) sottolineava, tra gli aspetti metodologici, l'uso della storia della matematica al triplice fine di favorire il dialogo fra cultura scientifica e cultura umanistica, rendere più proficuo e attraente l'insegnamento, evitare ogni forma di dogmatismo. [18]

È noto che tra le discipline matematiche meno gradite agli studenti vi è la trigonometria che viene percepita tra le più aride, meno attraenti e più rigide nei suoi schemi e formule. A questa situazione si potrebbe ovviare seguendo le indicazioni metodologiche di Vailati, quindi attraverso un approccio storico alla disciplina che avrebbe, tra l'altro, il grande vantaggio di rendere ragione del perché era, ed è ancora oggi, importante conoscere la trigonometria.

Attualmente la trigonometria si studia nelle classi terza e quarta del Liceo Scientifico, degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali (di tipo Tecnologico). Le nuove indicazioni nazionali per la matematica (del 2010) la riducono molto rispetto al passato suggerendo l'introduzione dei primi elementi fin dal I biennio, soprattutto per l'utilizzo che se ne fa in fisica. Gli obiettivi specifici di apprendimento, tuttavia, sono preceduti dalla descrizione del profilo generale e dalle competenze che lo studente dovrà possedere al termine del suo percorso di studi, in cui è sottolineata l'importanza di connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate. Con l'introduzione della

[(*)]Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Matematica (alessandra.fiocca@unife.it).

[18] L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, in *Conoscere attraverso la matematica: linguaggio, applicazioni e connessioni interdisciplinari*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Anzio-Nettuno novembre 2004, Roma, 2005, pp. 303-344: 315.

storia della matematica nell'insegnamento: *lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, dovrà acquisire il senso e la portata dei principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nel pensiero greco, la matematica infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del seicento...*

Un approccio storico alla trigonometria rientra dunque a buon titolo anche nelle nuove direttive ministeriali.

Il termine trigonometria deriva dalle parole greche *trigonos* (triangolo) e *metron* (misura), e nell'*Encyclopédie* di Diderot e d'Alembert è definita come "l'arte di trovare le parti incognite di un triangolo mediante quelle che si conoscono", ovvero "l'arte" della risoluzione dei triangoli.

Una difficoltà nello studio della trigonometria è dovuta ai due distinti approcci concettuali alla disciplina: da una parte viene presentata la *trigonometria del triangolo*, in cui gli angoli sono misurati in gradi e le funzioni trigonometriche sono definite come rapporti dei lati di un triangolo rettangolo, dall'altra viene insegnata la *trigonometria del cerchio*, in cui gli angoli sono misurati in radianti e le funzioni trigonometriche sono espresse in termini delle coordinate di un punto sul cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del riferimento cartesiano.

Generalmente viene insegnata prima la trigonometria del triangolo, ritenuta più semplice, e solo in seguito si passa alla trigonometria del cerchio. Il percorso storico procede invece, come si vedrà, in direzione opposta.

La trigonometria del triangolo trova ampia applicazione nell'ambito dell'agrimensura, della topografia, della navigazione per citare solo alcuni dei settori di maggior impiego. Fu tuttavia la trigonometria del cerchio la prima a nascere e svilupparsi nell'ambito degli studi astronomici. Dai primi sviluppi della trigonometria del cerchio dovuti a Ipparco (II sec. a.C.), ci vollero più di mille anni prima che la trigonometria del triangolo venisse sviluppata.

Come vedremo, originariamente la trigonometria non era altro che una "tavola delle corde", ovvero una tabella in cui ad un certo numero di archi di cerchio corrispondeva la misura della corda sottesa. Successivamente, nell'ambito della cultura indiana, furono costruite tavole delle mezze corde, corrispondenti alle nostre tavole dei seni degli angoli. La tangente e la cotangente furono invece introdotte nell'ambito della gnomonica, la scienza che insegna a costruire orologi solari.

2. Geometria quantitativa della sfera e primi contributi alla trigonometria

Fin dai tempi più remoti, l'uomo ha cercato di congetturare la forma e la struttura dell'universo. Nei secoli furono concepiti molteplici sistemi del mondo che proponevano soluzioni diverse per far corrispondere i fenomeni osservati nel cielo con la supposta architettura dell'universo. Con la civiltà greca l'universo assunse la forma di una sfera sulla cui superficie, che ruota con movimento regolare, sono incastonate le stelle, mentre al suo interno i pianeti e il sole procedono lungo orbite circolari con al centro la Terra immobile.

Fu nel III secolo a.C. che la ricerca astronomica si spostò sulla sponda meridionale del Mediterraneo, in Egitto. Nel Museo di Alessandria, la città che prende il nome da Alessandro Magno, poi retta dalla dinastia dei Tolomei che la resero il centro della scienza greca fin quasi alla conquista araba, l'astronomia raggiunse il massimo livello di rigore concettuale e perfezione teorica. I rapporti tra i pianeti e la Terra divennero l'oggetto principale della ricerca astronomica e furono accumulati dati che, legati al rapido sviluppo della geometria, permisero di conseguire straordinari risultati.

Un aspetto caratterizzante la matematica alessandrina è che accanto agli studi teorici vi fu un'attenzione costante alle applicazioni scientifiche e tecniche con lo sviluppo di nuove discipline quali l'ottica, la pneumatica, la meccanica, la geodesia. Per quanto riguarda l'astronomia, alla cosmologia rappresentata dalle opere di Aristotele, la *Fisica* e il *De cielo* in cui era investigata la struttura dell'universo e indagate le cause dei moti, venne affiancata una astronomia quantitativa per calcolare le posizioni di stelle e pianeti, prevedere i fenomeni celesti e quindi utile alla vita quotidiana dal calendario, alla navigazione, alla compilazione degli oroscopi.

Il problema fondamentale che diede origine alla trigonometria consiste nel determinare, dato un arco di un cerchio, la lunghezza della corda sottesa. Il fondatore della trigonometria è probabilmente Ipparco da Rodi (II sec. a. C.) in quanto è noto che compilò delle *tavole di corde,* che tuttavia non ci sono pervenute, così come non ci è pervenuta l'opera di Teodosio da Tripoli (I sec. a.C.) intitolata *Sphaerica*. Ci sono invece pervenute la *Sphaerica* di Menelao di Alessandria (I-II sec. d.C.) e l'*Almagesto* di Claudio Tolomeo, attivo ad Alessandria attorno alla metà del II secolo, che rappresenta l'opera più importante dell'astronomia greca. Claudio Tolomeo ha legato il proprio nome all'immagine del cosmo sopraccitata destinata a dominare sino alla fine del XVI secolo. Mettendo a frutto il bagaglio di informazioni accumulato nei secoli precedenti, Tolomeo compose un grandioso compendio astronomico conosciuto come *Almagesto*, nome che deriva dalla parola araba, al-maghesti, a sua volta derivata dal superlativo della parola greca mègas (grande), quindi Almagesto significa "l'opera massima". Tolomeo vi descrive la volta celeste analizzandone i movimenti, i fenomeni legati all'obliquità dell'asse terrestre e all'inclinazione dell'eclittica, la questione delle eclissi e delle coordinate degli astri. Il catalogo di 1025 stelle che si trova nell'ottavo libro dell'opera è stato per molti secoli il punto di riferimento per ogni nuova mappa del cielo.

3. La *Sphaerica* di Menelao e la geometria non euclidea

La *Sphaerica* di Menelao è costituita da tre libri e ci è pervenuta grazie a codici arabi ed ebraici e a una traduzione in lingua latina dall'arabo ad opera di Gherardo da Cremona (XII sec.). Nel I libro Menelao introduce l'importante concetto di triangolo sferico formato da tre archi di cerchio massimo che si ottengono intersecando la sfera con dei piani passanti per il suo centro, nel II tratta di astronomia e nel III, con l'intento di creare una teoria parallela a quella euclidea per i triangoli piani, dimostra diversi teoremi sui triangoli sferici, tra cui il teorema noto col suo nome che fornisce, nella forma completa, una condizione necessaria e sufficiente per la collinearità di tre punti. Menelao dimostra che a differenza dei triangoli piani, in quelli sferici la somma degli angoli interni è sempre maggiore di due angoli retti. Dimostra, inoltre, un criterio di uguaglianza per i triangoli sferici (s*e due triangoli sferici hanno reciprocamente tre angoli uguali, anche i loro archi sono rispettivamente uguali*) che evidenzia l'impossibilità di sviluppare sulla sfera una teoria della similitudine analoga a quella della geometria piana.

Può essere interessante osservare che la geometria sferica sviluppata da Menelao, contenente molti teoremi analoghi a quelli della geometria piana, obbedisce agli assiomi della geometria euclidea, ad eccezione del quinto postulato, quello delle rette parallele. Si pensi a una retta r e a un punto P fuori di essa. La questione è: quante rette si possono tracciare passanti per P e parallele alla retta r? In geometria euclidea la risposta è: una e una soltanto. L'unicità della parallela è uno dei modi per esprimere il quinto postulato di Euclide, postulato che i matematici, per 2000 anni, hanno cercato di dimostrare utilizzando i precedenti quattro. Una proposizione equivalente al quinto postulato è che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. Menelao ha provato che nei triangoli sferici la somma degli angoli interni è sempre maggiore di due angoli retti, dunque in questa geometria non vale il quinto postulato. E difatti, nella geometria sferica, le "rette" (ovvero le curve di minima distanza o geodetiche) sono i cerchi massimi della sfera e due "rette" si incontrano sempre in due punti. La risposta dunque, in questa geometria, alla questione iniziale, data una "retta" e un punto fuori di essa, quante sono le "rette" passanti per P e parallele a *r*, è: nessuna.

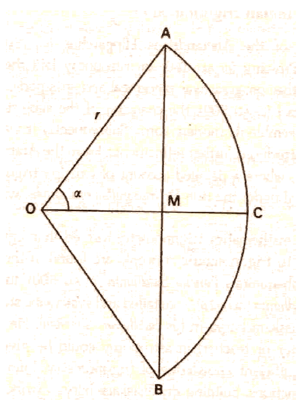
Sebbene la formalizzazione della geometria non euclidea avvenne solo nell'Ottocento, un esempio di essa era già contenuto nella *Sphaerica* di Menelao. Talvolta "scoprire" non significa altro che riconoscere qualcosa che era già sotto i nostri occhi.

4. Corde di un cerchio

La trigonometria greca differisce dalla trigonometria moderna per l'uso delle corde di un cerchio invece che delle mezze corde (ovvero dei seni degli angoli).

Se ruotiamo il cerchio in modo che la corda AB sia verticale, e tracciamo i due raggi per gli estremi della corda, vediamo come si può riscrivere la lunghezza della corda in termini della funzione *seno*. Se la corda sottende un arco di lunghezza 2α e il raggio del cerchio è *R*, la lunghezza della mezza corda è $R \cdot \sin\alpha$ e la lunghezza della corda è $2R \cdot \sin\alpha$ ovvero:

$$\text{corda}(2\alpha) = 2R\sin\alpha$$



Euclide (III sec. a. C.) nei suoi *Elementi* introdusse la sezione aurea (Libro II, proposizione 11) che rappresenta il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio unitario, e quindi la lunghezza della corda sottesa da un arco di 36°. Sempre negli *Elementi* (Libro XIII, proposizione 10) Euclide dimostra che i lati del decagono, del pentagono e dell'esagono inscritti nello stesso cerchio formano un triangolo rettangolo, proprietà che permette di esprimere, attraverso il teorema di Pitagora, il lato del pentagono, e quindi la lunghezza della corda sottesa a un arco di 72°:

Se il cerchio ha raggio R, risulta:

$$\text{corda}\,36° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R \approx 0{,}618R$$

$$\text{corda}\,72° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R \approx 1{,}176R$$

Come abbiamo già osservato, a Ipparco sono attribuite tavole di corde, che tuttavia non ci sono pervenute. Le più antiche tavole di corde che si conoscono sono quelle di Tolomeo di Alessandria contenute nell'*Almagesto*.

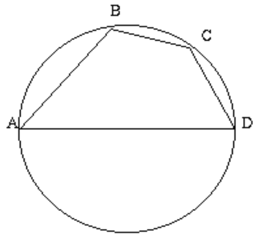
Nell'antichità, ma ancora fino al XIX secolo, i gradi erano introdotti per misurare la lunghezza di un arco, così 1° era la trecentosessantesima parte della lunghezza della circonferenza e come tale la sua grandezza dipendeva dal raggio del cerchio, così come dipendeva dal raggio del cerchio la lunghezza della corda. Per costruire le sue tavole delle corde, Tolomeo considerò come raggio del cerchio 60. Si pensi a un goniometro ideale in cui la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti. *Pars minuta prima* (minuto) e *pars minuta seconda* (secondo) erano rispettivamente la frazione del grado e la frazione della frazione del grado. Così la corda di un arco di 180° è 120, ovvero la misura del diametro; la corda di un arco di 60°, è 60, lunghezza del lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio. Si riconosce in questo sistema di misure la tradizione babilonese in quanto l'antica civiltà babilonese usava un sistema per la scrittura dei numeri in base 60.

È interessante ricordare che nel 1596 fu pubblicata l'opera postuma di Georg Rheticus (1514-1574) dal titolo *Opus palatinum de triangulis*, contenente tavole delle sei funzioni trigonometriche. Avendo assunto come lunghezza del raggio del cerchio 10^{10}, le tavole di Rheticus contenevano valori approssimati a 10 cifre delle funzioni, senza dover ricorrere ai decimali, non ancora in uso, o alle frazioni.

5. Il teorema di Tolomeo e le formule di sottrazione e di bisezione degli archi per la costruzione della tavola delle corde

Il primo libro dell'*Almagesto* di Tolomeo contiene una tavola delle corde che procede di mezzo grado in mezzo grado dalla corda di 1° a quella di 180°. Per ottenerla Tolomeo si procurò formule analoghe a quelle di addizione e sottrazione per le funzioni seno e coseno.

Ciò fu possibile grazie al *Teorema di Tolomeo*: in un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti



Considerato il quadrilatero ABCD inscritto in un cerchio con il lato AD coincidente con un diametro e posto *arcoAB* = α; *arcoAC* = β risulta *arcoBC* = $\beta-\alpha$; *arcoBD* = $180-\alpha$; *arcoCD* = $180-\beta$.

Per il teorema di Tolomeo risulta:

$$\text{corda}(\beta)\cdot\text{corda}(180-\alpha)=\text{corda}(\alpha)\cdot\text{corda}(180-\beta)+120\cdot\text{corda}(\beta-\alpha)$$

Ricordando che $\text{corda}(\alpha)=120\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ la formula precedente si traduce nella nota formula di sottrazione dei seni

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Analogamente Tolomeo ottiene una formula analoga alla formula di bisezione degli archi che permette di calcolare corde corrispondenti ad archi sempre più piccoli

$$\text{corda}^2(\alpha)=\frac{60\,\text{corda}^2(2\alpha)}{120+\text{corda}(180-2\alpha)}$$

La corda corrispondente all'arco di 1° è ottenuta da Tolomeo per approssimazione. Poiché per due archi di α e β gradi con α > β risulta

$$\frac{\text{corda}(\alpha)}{\text{corda}(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

segue che

$$\frac{2}{3}\text{corda}(1°30') < \text{corda}(1°) < \frac{4}{3}\text{corda}(45')$$

D'altra parte le corde di 1°30' e di 45' erano note grazie alle formule di bisezione essendo note le corde di 3°, 6°, 12°, quest'ultima nota per differenza tra le corde di 72° (lato del pentagono regolare) e 60°.

6. Contributi Indiani e etimologia della parola "seno"

Come abbiamo visto, il primo uso delle funzioni trigonometriche è legato alle corde di un cerchio e alla ricerca della lunghezza della corda sottesa a un dato arco.

Lo sviluppo matematico in India intorno al 500 d.C. produsse una trigonometria più vicina alla forma moderna. Dall'India giunse l'uso della mezza corda al posto della corda.

Nell'opera *Surya Siddhanta* (IV-V sec.) si trova una tavola delle mezze corde, ovvero dei seni degli angoli multipli di 3° 45' fino a 90°. Il coseno era definito semplicemente come il seno dell'arco complementare: $\cos\alpha = \sin(90 - \alpha)$; in genere non si avevano delle tavole del coseno, dato che esso poteva essere letto direttamente dalle tavole dei seni.

Il matematico indiano Aryabhata diede una tavola di mezze corde note col nome di *jya-ardha* o semplicemente *jya*, dove *jya* $x = r \sin x$. Gli Indiani usavano s*eno*, *coseno*, e la funzione *senoverso* (1-*coseno*) ora non più in uso.

Nell'ottavo secolo l'uso della mezza corda fu importato nel mondo arabo grazie alle traduzioni in lingua araba di testi astronomici indiani compiute principalmente nella capitale, Baghdad.

In sanscrito "corda" era *jya* e "mezza corda" era *jya-ardha*. Nelle traduzioni in arabo la parola *jya* fu traslitterata e divenne *jyba* o *jyb,* parola priva di significato in quella lingua. In seguito gli arabi adottarono al posto di *jyba,* la parola *jayb* che in arabo aveva la stessa ortografia poiché la vocale "a" non veniva scritta e che significa baia o rada. Quando i testi arabi vennero tradotti in lingua latina la parola araba fu tradotta col termine *sinus* (baia) e che divenne in italiano *seno* e in inglese *sine.*

7. Gli Arabi e il metodo di Al-Kashi per il calcolo approssimato del seno di 1°

Dall'VIII al XV secolo la ricerca astronomica più avanzata fu scritta in lingua araba. Gli astronomi islamici si dedicarono con impegno allo studio dell'astronomia, nel quale conseguirono risultati importanti. Modificarono e resero più precisi i modelli geometrici di Tolomeo per il Sole, la Luna e i cinque pianeti, migliorando le coordinate fornite dall'astronomo alessandrino per le stelle fisse.

Gli autori islamici introdussero inoltre perfezionamenti negli strumenti ereditati dai Greci e ne concepirono di nuovi, in particolare per la misura del tempo mediante il Sole e le stelle. In diverse regioni dell'Islam fiorirono inoltre osservatori astronomici che produssero dati che saranno utilizzati anche dagli studiosi occidentali, tra i quali Copernico. La consapevolezza dei risultati conseguiti dagli astronomi islamici è venuta progressivamente affermandosi solo nel corso degli ultimi 150 anni, grazie alla sempre più intensa attività di studio dei manoscritti e degli strumenti islamici.

Al-Kashi, astronomo persiano del XV secolo, elaborò un metodo per il calcolo approssimato del seno di 1° basato sulla formula che dà il seno di 3α in termini del seno di α che oggi scriviamo così:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Per α=1°, posto x=sin1° la relazione precedente diventa

$$3x=4x^3+\sin 3°$$

Posto a=sin3° (noto con precisione arbitraria grazie alle formule di bisezione) si tratta di risolvere l'equazione cubica

$$3x=4x^3+a$$

Se x è piccolo, $4x^3$ si può trascurare e dunque:
$x_1=a/3$ (prima approssimazione);
$3x_2=4x_1^3+a$ (seconda approssimazione);
$3x_3=4x_2^3+a$ (terza approssimazione) e così di seguito.

8. Sviluppi della trigonometria in Occidente e risoluzione dei triangoli rettangoli

La trigonometria giunse in Occidente soprattutto attraverso fonti arabe. Non si hanno notizie di contributi degli studiosi europei prima del Quattrocento. I contributi alla trigonometria vennero sempre dagli astronomi che necessitavano di tavole dei seni sempre migliori, sia nella precisione, sia per archi a intervalli sempre minori. La precisione delle tavole, in particolare, era data dalla grandezza del raggio del cerchio goniometrico.

Per quanto riguarda l'intervallo degli archi Georg Peuerbach (1423-1461) calcolò una tavola dei seni di 10' in 10'; Johannes Müller detto Regiomontano (1436-1476) ne compose una di 1' in 1'; Rheticus (1514-1574) preparò monumentali tavole trigonometriche a intervalli di 10'', ottenute utilizzando una formula di ricorrenza che dà il seno dell'angolo multiplo di α, $(n+1)$ α, in funzione di seno e coseno degli angoli α, nα, $(n-1)$ α; François Viéte (1540-1603) sviluppò formule di moltiplicazione degli angoli, cos x; cos $2x$, cos $3x$, ecc.

La trigonometria del triangolo iniziò col problema di determinare la lunghezza dell'ombra prodotta da un'asta verticale – gnomone – noto l'angolo formato dai raggi del sole con la verticale. Le prime tavole di tali valori furono quelle di Al-Kwarizmi di Baghdad (IX sec.) il matematico dal cui nome deriva la parola *algoritmo*, autore di un'opera sull'*al-jabr* che rappresenta l'origine della parola *algebra*. Poiché il segmento che rappresenta tale grandezza è tangente al cerchio, la funzione prese il nome di *tangente*. La secante deriva dal termine latino *secantem*, che significa "che taglia" ed è la lunghezza del segmento staccato sul prolungamento del raggio dalla tangente. Il coseno, la cotangente e la cosecante sono i segmenti corrispondenti a questi relativi all'angolo complementare.

I due termini, tangente e cotangente, furono introdotti tra la fine del XVI e l'inizio del secolo successivo rispettivamente da Thomas Fink, *Geometriae Rotundi* (1583) e Edmund Gunter, *Canon triangulorum* (1620).

Un ulteriore impulso allo sviluppo della trigonometria venne dalla topografia che, al contrario dell'astronomia, si basa totalmente sulla trigonometria rettilinea. Per le necessità dei rilievi topografici vennero studiati i triangoli e la loro risoluzione. Il primo trattato di trigonometria composto in Occidente e per molto tempo il più importante è il De *triangulis omnimodis* di Regiomontano scritto circa nel 1464 ma stampato solo nel

1533 in cui si trovano applicazioni della trigonometria al calcolo dei lati di un triangolo rettangolo. Ne seguirono altri, alcuni autonomi, altri propedeutici a opere di astronomia come nel caso di Nicolò Copernico (1473-1543) e del suo trattato *De revolutionibus orbium coelestium* (1543). Bartolomeo Pitiscus (1561-1613) introdusse il termine trigonometria nel titolo della sua opera; si trattava di una traslitterazione dal greco al latino del termine "misura del triangolo".

Il problema della risoluzione dei triangoli rettangoli veniva risolto, qualora fossero noti due lati del triangolo, per trovare il terzo lato applicando il teorema di Pitagora; per trovare gli altri due angoli, il triangolo ABC veniva inscritto in una semicirconferenza di diametro AB uguale all'ipotenusa (=120). Noto il lato BC (ovvero nota la corda sottesa dall'angolo 2α), usando la tavola delle corde si ricavava 2α e quindi α corrispondente all'angolo CAB del triangolo, opposto al lato BC. Si può evitare di cambiare unità di misura per ricondursi a un triangolo avente come lunghezza dell'ipotenusa 120, cercando nelle tavole delle corde l'arco 2α corrispondente alla corda di lunghezza $\frac{BC \cdot 120}{AB}$.

La risoluzione dei triangoli in generale era ricondotta alla risoluzione dei triangoli rettangoli.

9. Tavole logaritmico-trigonometriche

Un impulso decisivo allo sviluppo delle tecniche trigonometriche venne dall'invenzione dei logaritmi da parte di John Napier (1550-1617) per la semplificazione nel calcolo che i logaritmi comportarono. Moltiplicazioni e divisioni si riducevano a somme e sottrazioni, potenze ed estrazioni di radici a prodotti e quozienti per numeri interi.

Ci si accorse che l'uso combinato delle tavole trigonometriche e di quelle logaritmiche semplificava i calcoli. Ad esempio usando il teorema dei seni nella risoluzione di triangoli, il calcolo si semplificava passando ai logaritmi. Si aggiunsero così tavole dei logaritmi dei seni e dei coseni, le cosiddette Tavole logaritmico trigonometriche. L'avvento dei calcolatori ha reso obsolete queste tavole dato che non è più complicato per un computer una moltiplicazioni piuttosto di una addizione.

10. Le funzioni circolari. XVII e XVIII secolo

Fino alla metà del Seicento i seni e le altre espressioni trigonometriche erano numeri dati da tavole, elenchi che per ogni valore dell'arco davano il valore del seno. Intorno al 1650 comincia a emergere un punto di vista diverso, quello funzionale, o meglio quello geometrico. Vengono così studiate le curve dei seni, dei coseni, delle tangenti ecc. La curva rappresentata dall'equazione y=sin$x$ comincia a entrare insieme alle più note curve come la parabola, l'iperbole ecc. Si cominciano a porre tutta una serie di questioni, al pari delle altre curve, tracciare la tangente in un punto della curva, calcolare l'area di una porzione o il volume facendo ruotare la curva.

L'invenzione nel Seicento del calcolo infinitesimale, da parte di Leibniz e Newton, portò a soluzione molti problemi aperti. Vennero introdotte le funzioni inverse, in particolare l'arcotangente, legata alla quadratura del cerchio.

Fu Eulero (1707-1783) nel XVIII secolo a introdurre la prassi di misurare archi e segmenti con la stessa unità di misura, assumendo tra l'altro il raggio del cerchio R=1. Egli utilizzò il simbolo π per indicare la lunghezza della semicirconferenza di raggio 1, così la lunghezza della circonferenza è 2π, quella dell'arco di 45° è π/4.

Si pervenne così a definire il "radiante" come nuova unità di misura angolare, in alternativa alla misura in gradi: tracciato un cerchio con centro nel vertice dell'angolo, un *radiante* è la misura dell'angolo che sottende un arco di lunghezza pari al raggio. I radianti si dimostrarono la misura angolare più utile in analisi matematica, perché permettono di esprimere in forma semplice identità che coinvolgono le derivate e gli integrali delle funzioni circolari, come ad esempio $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ quando x è misurato in radianti.

Eulero scoprì inattese relazioni, le cosiddette formule di Eulero, che legano tra loro le funzioni seno, coseno e le potenze a esponente immaginario, in particolare $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ nonché la scrittura dei numeri complessi $z = \rho$ (cosθ +$i$sinθ). Con l'introduzione della variabile complessa, l'approccio alle funzioni circolari permette di ricavare con estrema semplicità le ben note identità trigonometriche, dalla relazione fondamentale della trigonometria, alle formule di addizione e di duplicazione.

Così ad esempio

$$1 = e^0 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = (\cos x + isenx) \cdot (\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x\,.$$

11. Considerazioni finali

Nelle applicazioni della trigonometria ai problemi posti dalla navigazione e dal rilevamento topografico, è certamente utile definire le funzioni trigonometriche come rapporti tra segmenti. Per quanto concerne, tuttavia, tutti questi aspetti applicativi si può affermare che l'uso della trigonometria è superato ampiamente, sostituito dall'utilizzo di segnali radio satellitari, di aerofotogrammetria e telerilevazioni, i cui dati vengono raccolti ed elaborati con l'impiego dei calcolatori elettronici.

Le funzioni seno e coseno si incontrano oggi più frequentemente nel loro aspetto di funzioni periodiche, piuttosto che come ausilio per trovare le grandezze incognite di un triangolo rettangolo. Biologi, fisici, economisti usano tali funzioni nella costruzione di modelli matematici per studiare fenomeni periodici.

Con il carattere funzionale delle grandezze trigonometriche, tutte riunite sotto il nome di funzioni circolari, si entra nella trigonometria moderna in cui le funzioni circolari vengono studiate in quanto tali come parte dell'analisi matematica. Volendo che gli studenti comprendano l'aspetto funzionale delle grandezze trigonometriche, si ritiene che le definizioni originarie che le descrivono come relazioni tra due grandezze, archi e corde, risultino le più immediate e trasparenti.

Vi è da parte degli studenti una difficoltà a comprendere la misura in radianti degli angoli. Si potrebbe semplificare il percorso seguendo la via indicata da Eulero, ovvero prendendo come argomento del seno la lunghezza dell'arco su un cerchio di raggio 1 e come valore del seno la lunghezza della corrispondente mezza corda.

La storia ha dunque molto da insegnare e suggerisce di introdurre la trigonometria imitando gli antichi astronomi che inizialmente hanno studiato le relazioni funzionali tra lunghezze di archi e lunghezze di segmenti. Se le funzioni trigonometriche vengono introdotte prima come lunghezze di segmenti nel cerchio di raggio 1, è più facile poi, pensando a triangoli simili, passare alla trigonometria del triangolo e alla definizione delle funzioni trigonometriche come rapporti.

Bibliografia e siti web

Loria, G. (1914), *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano: Hoepli.

Boyer, C. (2000), *Storia della matematica*, Mondatori.

Kline, M. (1999), *Storia del pensiero matematica. Dall'antichità al Settecento*, Torino: Einaudi.

Bressoud, D.M. (2010), *Historical Reflexions on Teaching Trigonometry*, Mathematics Teacher, 104 (2), September, pp. 107-112.

Giardino di Archimede, Un museo per la matematica, http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/trigonometria/trigonometria/prima.html

Beardon, T., *When the Angles of a Triangle don't add to 180 degrees*, http://nrich.maths.org/1434

Locomat. The Loria collection of mathematical tables. DTL (Digital Tables Library) http://locomat.loria.fr/locomat/reconstructed.html