Didattica e insegnamento della Matematica
Esperienze e proposte

a cura di Maria Teresa Borgato

Indice

Introduzione

Il presente volume nasce con l'obiettivo di raccogliere alcuni tra i contributi più significativi alla didattica della matematica e nella formazione dei docenti di matematica, progettati e sviluppati in Emilia Romagna durante l'esperienza decennale della SSIS (Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento secondario).

Diversi sono i temi e gli aspetti che i ricercatori delle università dell'Emilia Romagna hanno analizzato e le proposte che hanno potuto sperimentare con la collaborazione degli insegnanti in formazione e dei tutor. Pur nella impossibilità di illustrarli tutti in un solo numero della rivista, si è cercato di dare una visione abbastanza ampia e differenziata, che testimonia la grande energia e la spinta al rinnovamento nell'insegnamento della matematica, che la passata Scuola di specializzazione era riuscita a mettere in campo. Queste proposte, a posteriori corrette e implementate, costituiscono prezioso materiale su cui basare gli interventi nei futuri Tirocini Formativi Attivi per gli insegnanti di matematica.

Anche se la divisione tra gli ambiti è troppo schematica, possiamo dire che all'insegnamento e apprendimento della matematica sono principalmente dedicati i primi cinque capitoli di questo volume. Seguono quattro capitoli maggiormente rivolti alla formazione degli insegnanti, gli ultimi due capitoli riguardano alcuni aspetti della storia degli insegnamenti matematici in Italia.

Alla didattica dell'algebra sono dedicati tre interventi. Il primo saggio, che apre il volume, è un'approfondita rassegna di Nicolina Malara sui principali apporti della letteratura internazionale sui processi di generalizzazione, in relazione all'insegnamento dell'algebra. Per 'processo di generalizzazione' si intende una serie di atti di pensiero che portano un soggetto a riconoscere, dall'esame di casi singoli, l'occorrenza di elementi caratteristici comuni; quindi a spostare l'attenzione dai singoli casi alla totalità dei casi possibili ed infine ad estendere a tale totalità i caratteri comuni individuati. La generalizzazione, che è un processo generale della conoscenza e cardine di quella matematica, è particolarmente significativo in algebra, dove i processi di astrazione e generalizzazione stanno alla base della rappresentazione simbolica. Sono analizzati e confrontati i modelli proposti da W. Dörfler (1991), M. Heyny (2003) e A. Ellis (2007). Si passa poi più specificamente agli studi sull'early algebra, che propone un uso precoce delle lettere intrecciato ad un insegnamento relazionale dell'aritmetica, ed una valorizzazione del linguaggio algebrico come strumento di rappresentazione di relazioni e proprietà, di ragionamento e giustificazione. Questi sono distinti secondo tre filoni principali, negli anni tra il 2003 e il 2011, attribuiti a T. J. Cooper e E. Warren, a F. Rivera e J. Becker, e a L. Radford.

Segue un articolo, della medesima autrice, sulle ricerche svolte dal nucleo di Modena sulla formazione degli insegnanti per un approccio socio-costruttivo all'early algebra. La ricerca si situa nell'ambito di un vasto studio iniziato ancora negli anni Novanta del secolo scorso e che ha portato alla nascita del Progetto ArAl: percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico, e che si fonda sul presupposto che l'apprendimento del linguaggio algebrico possa svilupparsi in analogia con le modalità d'apprendimento del linguaggio naturale. I principi base del progetto sono: l'anticipazione di attività pre-algebriche di tipo generazionale all'inizio della scuola primaria; la costruzione sociale delle conoscenze; la centralità del linguaggio naturale come mediatore didattico principale; l'individuazione e l'esplicitazione del pensiero algebrico presente nei concetti e nelle rappresentazioni dell'aritmetica. Strumenti, metodi ed attività messi a punto in seno al progetto hanno la funzione di sostenere gli insegnanti nel proporre alle classi attività di early algebra con modalità socio costruttive, e di formarli come insegnanti 'metacognitivi' attraverso la riflessione sulla loro azione di classe.

Completa la trilogia sull'algebra, il saggio di Annalisa Cusi che si occupa di un modello per la riflessione a posteriori sulle attività condotte durante l'insegnamento e verificate dagli specializzandi SSIS durante il tirocinio. La ricerca trae origine dagli studi sull'early algebra, ossia sull'approccio anticipato all'algebra, in un ottica di continuità tra i vari livelli scolari (tra scuola primaria e secondaria, tra scuola secondaria di primo e secondo grado). Per lo sviluppo della consapevolezza negli allievi che il linguaggio algebrico possa rappresentare un importante strumento per la scoperta e talvolta anche la creazione di nuovi oggetti, sono state scelte attività di approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico. Il percorso didattico si sviluppa sul lungo termine partendo da semplici attività di modellizzazione ed interpretazione per arrivare a proporre agli allievi attività di formulazione di congetture e costruzione di dimostrazioni. L'analisi delle sperimentazioni in ambito SSIS ha tuttavia messo in luce come i docenti che avevano condiviso sia la progettazione del percorso didattico, sia la pianificazione della metodologia da adottare, non siano riusciti a porsi, durante l'azione di classe, secondo comportamenti e atteggiamenti consapevoli ed efficaci. In linea con le idee di John Mason (*Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London, 2002), gli insegnanti vengono quindi coinvolti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su di essi, attraverso la metodologia delle 'trascrizioni multicommentate'. E' allo studio un percorso più strutturato per i Tirocini Formativi Attivi che vedrà impegnati piccoli gruppi di tirocinanti coinvolti sulle stesse attività da proporre in classe e nelle successive attività di riflessione congiunta sul proprio lavoro.

Alla storia della matematica come utile strumento per l'apprendimento della matematica è dedicato un articolo di Alessandra Fiocca. Si tratta di una linea di ricerca nel campo dell'educazione matematica, da diversi decenni sviluppato anche in campo internazionale. In Gran Bretagna ad esempio, la British Society for the History of Mathematics (BSHM) tra i suoi obiettivi indica quello di: *to promote the use of the history of mathematics at all levels in mathematics education in order to enhance the teaching of mathematics for the public benefit*, che persegue organizzando convegni e corsi per docenti e pubblicando materiali. In Francia l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) dedica una apposita sezione *all'Épistémologie et histoire*. Sezioni specifiche sull'insegnamento sono sviluppate all'interno dei congressi internazionali di storia della scienza, e viceversa la storia della matematica in classe occupa una parte rilevante nei convegni sulla didattica della disciplina. L'American Mathematical Association ha pubblicato diversi volumi dedicati alla introduzione di temi matematici attraverso percorsi storici.

Ultimamente in Italia specifici convegni sono stati organizzati e altri prenderanno il via prossimamente, sulla spinta legislativa delle Indicazioni Ministeriali relative ai nuovi programmi pubblicati nel marzo 2010 e che sottolineano l'importanza di connettere le diverse teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate.[1] Sembra oramai accertato, che un approccio storico, specialmente in concomitanza ad ostacoli epistemologici, favorisca un apprendimento della disciplina stessa e dell'autostima. Inoltre esso colloca la disciplina matematica all'interno di una più generale storia della cultura, favorendo un apprendimento olistico della scienza. A fronte di un largo consenso sulla necessità di introdurre elementi di storia della matematica a tutti i livelli

[1] Si vedano i convegni organizzati nel 2011 e nel 2013 dal Giardino di Archimede in collaborazione con la SISM (Società Italiana di storia delle matematiche):
http://php.math.unifi.it/convegnostoria/index.html
http://php.math.unifi.it/convegnostoria/convegnostoria2/index.html

dell'insegnamento e delle indicazioni esistenti nei curricula scolastici, non è tuttavia ancora definito un quadro generale né una prassi didattica. Pertanto si ricercano proposte, esperienze e metodologie, che forniscano suggerimenti per un uso non episodico della storia in classe e per una sua adeguata integrazione nel percorso di studi. Nell'ambito della SSIS, sono state sviluppate diverse esperienze in questo campo. Qui viene proposto un percorso per l'apprendimento della trigonometria, disciplina spesso ostica e arida in un approccio tradizionale, che appare strettamente collegata all'astronomia e alle necessità di misurare oggetti non raggiungibili (topografia). Il percorso è principalmente indirizzato alle classi terza e quarta del Liceo Scientifico, degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali (di tipo Tecnologico). Si parte dalle antiche tavole delle corde, dai teoremi di Tolomeo per derivare formule di sottrazione e bisezione, dai contributi di indiani e arabi, per arrivare agli sviluppi in Occidente e alla risoluzione dei triangoli rettangoli, alle tavole logaritmiche e trigonometriche e alle funzioni circolari.

Il contributo di Giuliano Mazzanti, Valter Roselli e Luigi Tomasi è incentrato sulla introduzione dell'algebra lineare nella scuola secondaria di secondo grado. L'introduzione del concetto di vettore, con riferimento alle operazioni fondamentali, era già previsto nel programma sperimentale PNI nella terza classe, ai fini del suo utilizzo in altri capitoli della matematica e nelle altre scienze. L'argomento doveva essere ripreso ed ampliato successivamente, pervenendo al concetto generale di spazio vettoriale ed, eventualmente, a quello di applicazione lineare attraverso l'analisi di casi concreti in vari contesti. Nelle attuali Indicazioni nazionali (2010) per il Liceo Scientifico (Primo Biennio - Aritmetica e algebra), sono inclusi i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Dopo aver analizzato, anche criticamente, la proposizione di questo programma che appare troppo ambizioso, gli autori propongono un percorso adeguato alle conoscenze pregresse degli alunni, valorizzando il calcolo vettoriale, non solo per le note applicazioni nel campo della fisica, ma anche nell'affrontare argomenti diversi di matematica, e particolarmente di geometria analitica. Il percorso, presentato in forma unitaria si presta ad essere articolato dal docente in tempi diversi a seconda dei temi introdotti, poiché permette di stabilire relazioni e collegamenti tra argomenti di algebra e le applicazioni.

Alla introduzione del concetto di probabilità nella scuola secondaria superiore è dedicato il lavoro di Paola Vighi. Si tratta di un tema, quello della probabilità, inserito nei programmi della scuola secondaria in Italia solo in tempi recenti, e dunque spesso senza l'apporto di precedenti esperienze, anche personali, degli insegnanti. L'attività svolta dall'autrice nell'ambito della SSIS ha condotto alla elaborazione delle considerazioni e del materiale che qui è proposto. Dopo una illustrazione del quadro teorico di riferimento, basato sulla letteratura internazionale, l'autrice sottolinea come dall'indagine condotta risultasse problematica non tanto la trasmissione delle procedure basate sul calcolo combinatorio e sull'uso di frazioni, grafi, e diagrammi ad albero, quanto l'introduzione al concetto stesso di probabilità, e lo 'scoprire o intuire la probabilità di un evento'. Viene quindi proposta una scelta di problemi, che spaziano da Galileo ai giorni nostri, i quali, opportunamente commentati, costituiscono i primi passi per accedere al mondo della probabilità per i futuri insegnanti e per gli studenti. I problemi, arricchiti di aspetti non deterministici in situazioni di tipo aleatorio, sono anche un'occasione per riflettere sull'uso del buon senso e dell'intuizione, facendo emergere l'esigenza del calcolo delle probabilità come 'strumento più sicuro e veloce', per passare successivamente al calcolo come conferma dei risultati ottenuti.

Al ruolo della Logica matematica nell'insegnamento e nella formazione degli insegnanti è dedicato il lavoro di Carlo Marchini. Se in passato argomenti di Logica matematica trovavano posto e spazio nei programmi o nelle proposte di programmi (progetto Brocca, Piano nazionale dell'Informatica, programmi per la Scuola Media e per la Scuola Elementare) oggi questa esigenza, tradotta negli attuali documenti ufficiali della scuola, sembra molto ridotta.

L'autore sottolinea però, alla luce della sua esperienza di docente SSIS, l'importanza formativa della Logica matematica e l'utilità quindi di ricevere una preparazione adeguata in questo campo anche nel TFA. La mancanza o una presenza avulsa dal contesto, di un capitolo di logica matematica nei libri scolastici, la necessità di una riflessione filosofica ed epistemologica sulla disciplina, finalizzata alla figura dell'insegnante, la validità di una formazione in logica matematica ai fini della certificazione e della valutazione della conoscenza, hanno motivato la scelta della sezione di Parma per l'Indirizzo FIM della SSIS d'inserire la Logica matematica tra gli argomenti da trattare (per le classi di abilitazione A047 e A049). Questo è stato realizzato rifuggendo dalla rigida schematizzazione che s'incontra sui manuali scolastici e sui testi universitari specifici per l'argomento, ma cercando di mostrare come si possa gestire l'apprendimento della Logica matematica nelle prassi scolastiche più consuete. L'autore presenta allora uno schema riassuntivo del suo sviluppo, introduce e illustra con esempi presi dalla matematica, le distinzioni tra verità e dimostrabilità, tra linguaggio e metalinguaggio, tra sintassi e semantica, intensione ed estensione… Quindi si passa ai sistemi deduttivi, con una analisi di manuali scolastici in questo contesto, ai rapporti tra logica minimale, logica intuizionista e logica classica, agli assiomi e le regole d'inferenza, e alla descrizione sommaria di altre parti del corso di Logica per gli specializzandi SSIS (suddivisi in un Indice e quattro lezioni). Infine è trattato il tema delle sostituzioni e del loro corretto utilizzo, e delle strategie per il loro insegnamento.

L'articolo di Giuliana Gnani e Angela Balestra presenta una interessante sperimentazione che ha riguardato la formazione di insegnanti di matematica e scienze. Si tratta di un corso di formazione on-line, progettato e sperimentato all'interno di un progetto europeo (progetto ISSUE) che ha operato dal 2005 al 2008. I principi ispiratori erano quelli di realizzare percorsi di tipo interdisciplinare, tra matematica e scienze, condivisivi a livelli europeo e dunque compatibili con i diversi ordinamenti dei paesi partecipanti, per studenti tra gli 11 e i 14 anni. L'interdisciplinarietà dei percorsi doveva in particolare favorire un apprendimento olistico delle conoscenze scientifiche, e dunque un patrimonio permanente dello studente, anche in un ambiente extrascolastico e in situazioni nuove. Tra gli obiettivi, anche quello di favorire le candidature alle professioni di matematico, fisico, chimico, biologo, geologo e di predisporre una piattaforma comune di conoscenze nella prospettiva di una integrazione europea del sistema di istruzione. Il corso di formazione era la fase finale del progetto, in cui i materiali elaborati servivano per la formazione di nuovi docenti, che dovevano apprendere una metodologia di insegnamento di tipo interdisciplinare. La partecipazione del gruppo di ricerca dell'Università di Ferrara ha prodotto diversi materiali, in particolare il corso cui si fa riferimento nell'articolo, ha visto la partecipazione di due tutor e di alcuni insegnanti, che provenivano dalla esperienza SSIS, ed ha avuto successive ricadute nell'ambito della Scuola di specializzazione e nella collaborazione ad altri progetti dell'Ufficio Scolastico regionale dell'Emilia Romagna. Le modalità di realizzazione, che fanno ricorso alle Tecnologie della informazione e della comunicazione, possono costituire un modello per corsi analoghi.

Segue un articolo sulla sperimentazione del progetto EM.MA, avviato nel triennio 2008-2011 dall'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia Romagna, a seguito delle criticità sugli apprendimenti in matematica degli studenti della regione, messi in luce dalle indagini OCSE (Pisa 2006), dalla prova nazionale INVALSI effettuata nell'ambito degli esami di licenza media (Legge 176/2007) e dalle numerose rilevazioni svolte a livello regionale. Il progetto, il cui acronimo significa "Emergenza matematica", ha voluto avviare, a partire dall'analisi delle rilevazioni, una riflessione didattica ampia che potesse coinvolgere i docenti di matematica, dalla primaria al biennio di secondo grado, sulle problematiche dell'apprendimento e su possibili strategie migliorative, da elaborare attraverso un confronto organico e permanente.

Nell'articolo sono riportati le tappe più significative dello svolgimento del progetto nella provincia di Ferrara, a partire dal coinvolgimento delle scuole primarie e secondarie di primo grado, esteso poi al biennio delle scuole di secondo grado. Per realizzare un intervento capillare, il territorio di Ferrara è stato suddiviso in tre reti, che sotto la responsabilità di tutor senior realizzavano seminari per i tutor junior, operanti nelle singole scuole. E' stato realizzato quindi un approccio cooperativo tra gradi di istruzione diversi, operanti nello stesso territorio, su un nucleo tematico diverso assegnato a ciascuna rete. Al termine del biennio, nella provincia di Ferrara sono continuate le attività del progetto denominato EM.MA 2, dedicato allo studio del processo dell'argomentazione. La seconda parte dell'articolo illustra le modalità di lavoro del progetto EM.MA, che si propone come un modello di aggiornamento permanente per i docenti di matematica, una volta che sia individuato un nucleo di contenuti/abilità problematico, attraverso la costituzione di un gruppo di ricerca eterogeneo per livello di scuola.

In un periodo in cui si sono succedute, a distanza di pochi anni, riforme dell'insegnamento primario e secondario, ed anche di quello superiore, è molto opportuna una riflessione sulla nostra storia passata. Come in altri campi, anche in quello dell'istruzione la memoria storica può insegnare a scegliere percorsi virtuosi già sperimentati o ad evitare quelli rivelatisi inadeguati o dannosi. Sono dunque qui inseriti due contributi sulla storia dell'istruzione, utili alla interpretazione della attuale legislazione scolastica.

Nel contributo di Elisa Patergnani si ricostruisce, con l'ausilio di una ricerca storica accurata e documenti rari d'archivio, l'insegnamento nelle scuole tecniche a Ferrara, prima e dopo l'Unità d'Italia. L'insegnamento tecnico, in un territorio come quello ferrarese, la cui sopravvivenza era ed è legata alla gestione delle acque, ha origine nelle figure di Giudici e Notai d'Argine, ossia dei periti addetti alla salvaguardia del territorio dalle piene dei fiumi (1675). Una formazione tecnica superiore era impartita nella Accademia di Disegno istituita nel 1736, che comprendeva una scuola per disegnatori d'architettura e prospettiva. Nel periodo napoleonico, la pubblica istruzione fu suddivisa in elementare, media e superiore e furono soppresse le Università di Ferrara e Modena e mantenute solo quelle di Pavia e Bologna. Ferrara, capoluogo del Dipartimento del Basso Po, fu sede del Liceo Dipartimentale (che comprendeva tra i suoi insegnamenti Elementi di geometria ed algebra, Fisica generale e sperimentale, Principi di disegno architettonico e Figura, Agraria, Chimica e Botanica), e anche di una scuola speciale (superiore) di idrostatica a Ferrara. Nell'articolo della Patergnani sono ricostruiti insegnamenti e docenti di queste scuole, come pure quelli per la formazione di ingegneri e periti agrimensori della successiva università pontificia dopo la Restaurazione, e dei tecnici formati nella Scuola di agricoltura comunale (1843). La seconda parte dell'articolo esplora la formazione tecnica a Ferrara dopo la Legge Casati (1859), con il progressivo adeguamento delle strutture locali alle leggi nazionali.

Luigi Tomasi presenta un ampio quadro della evoluzione delle indicazioni e dei programmi per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria in Italia, partendo dalle sperimentazioni degli anni Ottanta per arrivare al riordino del 2010. Il Piano Nazionale per l'Informatica segna l'introduzione del computer nella scuola a partire dagli anni Settanta, inizialmente negli Istituti Tecnici e poi in tutte le scuole superiori, e fu anche l'occasione per una riscrittura dei programmi di matematica. L'autore, che ha vissuto da vicino questa evoluzione, con anche la partecipazione ad alcune commissioni, descrive poi la matematica nei programmi del 'Progetto Brocca' (1987), il periodo di sperimentazione dal 1996 al 2000 e la proposta di un nuovo curricolo di matematica da parte dell'Unione Matematica Italiana. Infine è descritto il processo di riforma iniziato nel 2001 e concluso nel 2010 con il riordino dei Licei, degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali. Sono analizzate in dettaglio, con riferimento alla matematica, le nuove Indicazioni per i Licei.

Maria Teresa Borgato

Processi di generalizzazione nell'insegnamento/apprendimento dell'algebra

Nicolina A. Malara(*)

> *Imparare la matematica comporta apprendere a pensare matematicamente. [...] L'essenza del pensiero matematico è riconoscere, apprezzare, esprimere e manipolare generalità. [...] Il futuro dell'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra sta nella consapevolezza dell'insegnante dei processi di pensiero fondamentali in matematica, soprattutto in particolare della generalizzazione.*
> (J. Mason, 1996a)

1. Aspetti teorici sulla generalizzazione

Per dare corpo e significato alla matematica come disciplina è necessario praticare un insegnamento metacognitivo. In tale insegnamento uno dei principali compiti cui l'insegnante deve assolvere è quello di portare gli studenti, di fronte allo studio delle varie situazioni affrontate, a riflettere sulla significatività dei procedimenti scelti e degli accorgimenti adottati, ad esplicitare verbalmente le strategie messe in atto, a distinguere tra ciò che è essenziale e ciò che è occasionale. Operando in tal modo gli studenti possono fissare l'attenzione sugli elementi unificanti che emergono dall'attività giungendo ad inglobare in un'unica visione un'ampia varietà di casi o situazioni, a concepire opportune rappresentazioni, così da ripercorrere, controllandone il significato, la dinamica processo-oggetto (Sfard, 1991) che governa la reificazione degli oggetti matematici.

Elementi basilari di questo tipo di insegnamento sono i processi di generalizzazione. Per 'processo di generalizzazione' intendiamo sommariamente una serie di atti di pensiero che portano un soggetto a riconoscere, esaminando casi singoli, l'occorrenza di elementi caratteristici comuni; a spostare l'attenzione dai singoli casi alla totalità dei casi possibili ed ad estendere a tale totalità i caratteri comuni individuati.

Riconoscere pattern, individuare somiglianze, collegare fatti analoghi

---

(*) Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (malara@unimore.it).

sono atti fondativi dei processi di generalizzazione, ma elemento chiave di tali processi non è tanto il riconoscimento di somiglianze tra casi quanto lo spostamento di attenzione dai casi singoli a tutti i possibili, e l'estensione ed adattamento del modello individuato ad uno qualsiasi di essi.

La generalizzazione, anche se strettamente inerente all'attività matematica è un processo naturale e pervasivo, insito nel nostro modo di 'guardare' alle cose.

Enriques, sotto lo pseudonimo di Giovannini (1942), parlando della significatività e fecondità dell'errore nella ricerca in matematica, scrive:

> Il cammino dello spirito umano è essenzialmente induttivo: cioè procede dal concreto all'astratto. Perciò la comprensione del generale è bene sempre conseguire come un grado più alto di qualcosa di più facile che sia già conosciuto, cioè come 'generalizzazione'. D'altronde, l'esempio ha una virtù chiarificatrice che ne fa un valido istrumento della ricerca scientifica e, in pari tempo, un prezioso mezzo di verificazione e di correzione delle dottrine. … Ancora più evidente è il valore euristico degli esempi, perché ognun sa che il raffronto di casi diversi in cui si palesi qualcosa di comune è atto a suggerire alla nostra mente le più belle generalizzazioni additandoci così la migliore posizione dei problemi …

E' tuttavia possibile anche generalizzare dall'esame di un solo singolo caso, quando a prescindere da suoi caratteri particolari si riesca a vederlo come elemento rappresentativo di un intero ambiente. Il caso risulta 'esemplare', nel senso di esemplificativo della totalità dei casi. Celebre al riguardo è l'aforisma di Hilbert:

> L'arte del fare matematica consiste nel trovare il caso speciale che contiene tutti i germi di generalità.

Mason (1996a, 1996b) sostiene che «la generalizzazione è il cuore pulsante della matematica» e che nell'insegnamento matematico occorra portare gli studenti alla conquista di una doppia consapevolezza: di «vedere il particolare nel generale» e di «vedere il generale attraverso il particolare». Riguardo a questo, sostiene l'importanza della esperienza di «examplehood» (esemplificazione), che porta a divenire consapevoli di come una moltitudine di particolari possa essere inglobata in una generale. Egli scrive (1996b, p. 21):

> … Una delle forme fondamentali o esperienze dello spostamento nel luogo, punto focale, o struttura di attenzione è il senso di ‘*examplehood*’: vedere all’improvviso qualcosa ‘puramente’ come un esempio di una maggiore generalità. Fare esperienza di examplehood, in cui le cose che precedentemente erano viste disparate sono ora viste come esempi di qualcosa di più generale, produce come un effetto di cristallizzazione o condenzazione (Freudenthal, 1978[2], p. 272): ciò libera energia e riduce la quantità di attenzione richiesta per affrontare simili situazioni.

Egli sottolinea che il riconoscimento di una cosa come un esempio richiede l’aver afferrato il senso di che cosa l’esempio esemplifica, richiede la valorizzazione delle caratteristiche che lo rendono esemplare e la messa in ombra di quelle che lo rendono particolare. Sottolinea inoltre che se l’insegnante non è consapevole nel momento dell’attività di cosa rende un certo caso esemplare, non può riuscire a dare agli studenti l’adeguato supporto per cogliere l’esemplificazione insita in esso.

Radford (1996a, pp. 107-109) pur non negando l’efficacia della generalizzazione come mezzo didattico, in riferimento alle inferenze di fatti matematici dall’osservazione di pochi casi esemplificativi, pone il problema della validità logica degli assunti che emergono da essa[3]. Denuncia l’abuso che se ne fa nell’insegnamento, per il fatto che gli studenti acquisiscono la concezione che basti verificare una ‘legge’ in pochi casi per asserire la sua validità in termini generali, e che pertanto occorra spendere tempo e lavoro per portarli a riconoscere i limiti della generalizzazione, a distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi, a divenire consapevoli che la validità di una proposizione desunta induttivamente si stabilisce attraverso una dimostrazione.

Va comunque rilevato che i processi di generalizzazione in matematica non riguardano solo singoli contenuti matematici ma investono anche aspetti meta legati alla organizzazione e strutturazione delle conoscenze che via via si acquisiscono.

A questo riguardo Harel e Tall (1991) riflettono sulle modalità con cui gli studenti, nell’avanzare dei loro studi, collegano conoscenze ed ampliano gli orizzonti in cui queste si collocano. Essi sottolineano come

---

[2] Freudenthal, H. (1978), *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education*, Reidel, Dordrecht.

[3] Radford introduce la questione facendo riferimento ad una celebre scena della ‘Cantatrice calva’ di Jonesco: in casa Smith suonano alla porta, Mrs Smith va ad aprire ma non trova nessuno; così al secondo e terzo squillo di campanello; al quarto squillo ella sbotta con il marito con una inferenza assurda, generalizzazione dai casi precedenti «*Non mandarmi ad aprire la porta! Hai visto che è inutile! L’esperienza ci ha mostrato che quando sentiamo il campanello questo implica che non c’è nessuno*».

queste riorganizzazioni dipendano dal tipo di comprensione (relazionale o strumentale) che sottende la conoscenza dello studente. Essi distinguono tre tipi di generalizzazione che dipendono dalla costruzione mentale dell'individuo:
1) generalizzazione espansiva in cui un soggetto estende il range di applicabilità di uno schema precedente sic et simpliciter;
2) generalizzazione ricostruttiva in cui un soggetto modifica e riadatta uno schema precedente per estenderne il dominio di applicabilità;
3) generalizzazione disgiuntiva in cui nel passare da un contesto familiare ad uno nuovo il soggetto costruisce un nuovo schema che aggiunge alla lista di quelli a lui già disponibili senza alcuna rielaborazione delle conoscenze.

Essi sottolineano la maggiore facilità d'applicazione della generalizzazione espansiva rispetto a quella ricostruttiva, la maggiore delicatezza della generalizzazione ricostruttiva ma anche la sua maggiore efficacia nei tempi lunghi, la povertà cognitiva della generalizzazione disgiuntiva che, anche se sul momento può apparire funzionale, è una 'ricetta di fallimento' per gli studenti deboli, che non hanno schemi di collegamento tra le nozioni e vengono schiacciati dal loro accumulo.

Dörfler (1989, 1991) è interessato alle modalità di costruzione della conoscenza negli studenti e teorizza sul processo di generalizzazione. Egli vede la generalizzazione come una combinazione di processi cognitivi ad un doppio livello: il livello psicologico individuale, collegato alla dimensione personale (del pensiero e della riflessione autonomi); quello epistemologico-oggettivo, collegato alla dimensione sociale (della condivisione, della comunicazione e dell'uso del linguaggio). Egli considera la conoscenza come il risultato della strutturazione e della organizzazione della propria esperienza e la vede come sostenuta da appropriate azioni su dati oggetti attraverso una riflessione sia sulle azioni sia sulle trasformazioni prodotte negli oggetti. Per il consolidamento della conoscenza egli considera cruciale la rappresentazione di un processo «attraverso l'uso di oggetti percepibili, come segni scritti, di elementi caratteristici e stage, di passi e risultati delle azioni». In questo modo si genera un protocollo di azioni che permette una cognitiva recostruzione e concettualizzazione del processo stesso.

Su queste premesse egli sviluppa un «modello per i processi di astrazione e generalizzazione» (Dörfler, 1991). Questo modello ha le sue radici nella 'astrazione riflessiva' di Piaget, un processo dove le azioni sono viste come sorgente genetica dei concetti (anche matematici). Dörfler però amplia il significato di azione di Piaget includendo anche le azioni simboliche. Nel suo modello si possono distinguere due fasi: la prima conduce all'emergere di invarianti e alla nascita di una prima loro rappresentazione; la seconda, più significativa dal punto di vista matematico, riguarda le rappresentazioni stesse: è attraverso una riflessione su di esse che il modo di vederle si evolve fino a portare alla reificazione di nuovi concetti matematici.

Più in dettaglio, il punto di partenza del modello di Dörfler è un'azione o un sistema di azioni (che sono materiali, immaginate o simboliche, ma sempre intese come concrete) su certi oggetti, materiali o mentali: In queste azioni l'attenzione è diretta verso alcune relazioni o connessioni tra elementi di azioni. In molti casi le azioni combinano gli elementi originali in un modo che, ripetendole a piacere, tali relazioni si rivelano stabili, quando ciò accade queste combinazioni o trasformazioni di base emergono come 'invarianti di azioni' che vengono a definire uno 'schema'. Dörfler sottolinea che «l'emergere degli invarianti necessita di una certa simbolica descrizione». Questo è un punto chiave del modello. Vengono usati simboli per rappresentare elementi di azioni o per quantità rilevanti per loro, per trasformazioni su o combinazioni degli oggetti indotte dalle azioni. Questa rappresentazione degli invarianti può includere elementi variabili relativi ad oggetti su cui sono condotte le azioni. I simboli (di natura verbale, iconica, geometrica o algebrica) inizialmente hanno un ruolo puramente descrittivo: rappresentano azioni o trasformazioni. Questa prima fase è vista come momento di astrazione costruttiva: gli elementi originali sono sostituiti da prototipi, che evidenziano meglio proprietà o relazioni su cui si concentra l'attenzione (essi guadagnano significato ed 'esistenza' via le azioni). La seconda fase si sviluppa attraverso due importanti momenti:

- un momento di generalizzazione estensionale, quando l'uso di prototipi conduce a determinare il dominio di variabilità dei pattern, cosa che promuove l'interscambiabilità degli oggetti rispetto alle azioni su di essi. A questo punto i simboli perdono il loro iniziale significato di generici rappresentanti ed acquisiscono quello di variabili con proprietà di sostituzione.
- un momento di generalizzazione intensionale, quando attraverso la riflessione sulle rappresentazioni simboliche degli invarianti, i simboli usati perdono il loro significato di rappresentanti (di elementi variabili delle azioni) e diventano elementi delle azioni stesse e 'portatori' degli invarianti: a questo punto i simboli si distaccano dal loro range di riferimento, e acquistano un significato nuovo, intrinsecamente connesso agli inva-

rianti: nasce un oggetto matematico nuovo, dove i simboli sono ora variabili con il carattere di oggetti.

Dörfler sostiene che una volta che una tale generalità viene costruita essa diviene a sua volta base per ulteriori generalizzazioni estensionali. Egli sottolinea che il suo modello di 'generalizzazione teorica' si contrappone a quello aristotelico di 'generalizzazione empirica', ossia il processo di base che, grazie alla percezione dei sensi, porta alla individuazione di una qualità comune o di una proprietà tra oggetti diversi o situazioni. Egli afferma che la generalizzazione empirica non contribuisce alla costruzione del significato dei concetti perché è principalmente un processo di riconoscimento, ne critica l'uso nell'insegnamento della matematica e sottolinea il fatto che nell' insegnamento un tale riconoscimento viene usualmente postulato[4].

Dörfler dà una interessante serie di esempi del suo modello sia elementari che di matematica avanzata. In questi esempi tuttavia egli rivolge l'attenzione unicamente ai contenuti matematici, senza fare riferimenti né agli studenti né all'insegnante; volutamente lascia aperto il problema di quali siano le situazioni iniziali più motivanti per gli studenti e più appropriate a dar loro consapevolezza di tali processi e rimanda all'insegnante la scelta di tali situazioni poiché - egli scrive - «è solo l'insegnante che conosce gli studenti ed i loro interessi».

Più tardi Hejny (2003) propone un modello di costruzione e strutturazione della conoscenza articolato in sei stages (vedi tavola sotto) dove la generalizzazione è considerata elemento basilare ma ad un livello precedente rispetto alla astrazione e funzionale ad essa per la strutturazione della conoscenza. Hejny, tra l'altro, riferendosi a quanto espresso da Sierpinska[5] circa lo sviluppo della comprensione matematica, considera riduttiva la visione della studiosa, che vede la generalizzazione come elemento centrale in tale comprensione. Egli si dichiara d'accordo con lei a patto di affiancare l'astrazione alla generalizzazione[6]. Elemento di originalità nel modello di Hejny consiste nel considerare come primo passo

[4] A questo riguardo considera il concetto di derivata e gli 'esempi', quali velocità, pendenza, densità, che sono usualmente usati per mostrare la derivata come loro struttura comune ma sottolinea che tale struttura non viene sviluppata dagli studenti stessi.

[5] Sierpinska, A. 1994, *Understanding in mathematics*, London & NewYork: The Falmer press

[6] Hejny (2003) scrive: «Nella sua analisi dell'atto di comprendere, Sierpinska considera quattro operazioni mentali di base: identificazione, discriminazione, generalizzazione e sintesi. 'Tutte e quattro le operazioni sono importanti in un processo di comprensione. Ma nella comprensione matematica, la generalizzazione ha un particolare ruolo da giocare. Non è la matematica, soprattutto, un'arte di generalizzazione? *L'art de donner le même nom à des choses différentes*, come usa dire Poincare?' Sierpinska (1994, p. 59). Noi siamo d'accordo su questa asserzione purché il 'donner' comprenda entrambi i termini generalizzazione ed astrazione».

del processo la ‘motivazione al conoscere’ dello studente.

Gli stage di sviluppo e strutturazione della conoscenza nel modello di Hejny

1. Motivazione. Per motivazione intendiamo una tensione, che appare nella mente di uno studente come una conseguenza della contrapposizione tra ‘Io non so’ e ‘mi piacerebbe sapere’. Questa tensione dirige l’interesse degli studenti verso un particolare problema matematico, situazione, idea, concetto, fatto, schema, …
2. Stage di modelli mentali isolati. Acquisizione di un insieme iniziale di esperienze. All’origine queste esperienze sono incamerate come eventi isolati o immagini. Più tardi, ci si potrebbe aspettare che intervenga un qualche legame tra loro.
3. Stage di generalizzazione. I modelli isolati ottenuti aono mutuamente confrontati, organizzati e posti in gerarchie per creare una struttura. Tra i modelli appare la possibilità di un transfert e avviene la scoperta di uno schema che li generalizza. Il processo di generalizzazione non cambia il livello di astrazione del pensiero.
4. Stage del(i) modello(i) mentale universale(i). Si sviluppa una sintesi generale dei modelli isolati preesistenti. Essa dà una prima visione nella comunità dei modelli. Allo stesso tempo, è uno strumento per affrontare modelli nuovi e più impegnativi. Se lo stage 2 è di collezionare nuove esperienze, gli stage 3 e 4 portano ad organizzarli in una struttura. Il ruolo di un tale schema generalizzante è frequentemente giocato da uno dei modelli isolati.
5. Stage di astrazione. Vi è la costruzione di un nuovo concetto più profondo e più astratto, di un processo o schema, che porta una nuova visione in quella parte di conoscenza.
6. Stage della conoscenza astratta. Il nuovo pezzo di conoscenza si colloca nella rete cognitiva preesistente dando luogo a nuove connessioni. A volte porta alla riorganizzazione della struttura matematica o di una parte di essa.

Confrontando il modello di Hejny con quello di Dörfler, rileviamo una prima importante differenza: Dörfler non esprime una distinzione tra generalizzazione ed astrazione, anzi nella descrizione dei processi di generalizzazione considera l’attuarsi di momenti di astrazione, al contrario Hejny rimarca una priorità della astrazione rispetto alla generalizzazione. Una seconda differenza riguarda il ruolo della rappresentazione. Nel modello di Hejny la rappresentazione non appare esplicitamente, per Dörfler invece è essenziale in quanto è proprio il ruolo giocato dai simboli nella rappresentazione degli invarianti e il mutamento progressivo dei significati che si associano ad essi che consente la reificazione degli oggetti matematici. Un altro elemento collaterale di differenza riguarda il carattere degli esempi offerti a supporto del modello. Mentre Dörfler presenta esempi focalizzati sul contenuto matematico senza riferimento ai soggetti coinvolti nel processo, Hejny mostra analiticamente lo svolgersi del processo di costruzione della conoscenza attraverso estratti di attività dei ragazzi che testimoniano i momenti di generazione di generalizzazioni e di astrazioni.

In questo senso, rifacendoci alla classificazione di Sfard (2005) sui periodi temporali che segnano l'evoluzione della ricerca in Educazione Matematica, mentro lo studio di Dörfler si colloca nella 'content's era' quello di Hejny si colloca in pieno nella student's era.

In riferimento agli studenti, un vasto ed interessante studio è dovuto ad Ellis (2007), insegnante-ricercatrice. Oggetto dello studio è l'identificazione dei comportamenti chiave degli studenti nella generazione di generalizzazioni. Ellis esamina studi in educazione matematica dai quali emergono tre categorie di azioni tipiche della generalizzazione: (a) lo sviluppo di una legge che enuncia relazioni o proprietà; (b) l'estensione o l'espansione di un tipo di ragionamento oltre il caso o i casi considerati, (c) l'identificazione di elementi comuni attraverso i casi.

Tassonomia degli atti di pensiero degli studenti nella produzione di generalizzazioni (Ellis, 2007)

Azioni di generalizzazione

1) collegare (oggetti o situazioni);
2) ricercare (una stessa relazione, una stessa procedura, uno stesso pattern, uno stesso risultato);
3) estendere (l'allargare il range di applicabilità di un fenomeno per induzione da alcuni casi, il rimuovere casi particolari legati al contesto per sviluppare un modello generale, l'operare su un oggetto al fine di generare nuovi casi, il riapplicare pattern esistenti per generare nuovi casi).

Formulazioni di generalizzazione

1. identificazione o affermazione 1.1) l'esplicitazione del riconoscimento di un fenomeno che continua (identificazione di una proprietà dinamica al di là di una singola occorrenza)
1.2) riconoscimento di una somiglianza (identificazione di una proprietà comune ad oggetti o situazioni, l'identificazione di oggetti o situazioni come simili o identici);
1.3) formulazione di un di principio generale (la descrizione di una formula generale o di un fatto, l'identificazione di un pattern generale; la descrizione

di un metodo o strategia che si estende al di là di un caso specifico; l'affermazione di una legge globale o del significato di un oggetto o un'idea).
2. Definizione di una classe di oggetti che soddisfano ad una data relazione, pattern o altro fenomeno.
3. Influenza 3.1 di una idea strategia nota (implementazione di una precedente generalizzazione); 3.2. di una idea strategia modificata (adattamento di una generalizzazione precedente ad un nuovo porblema o situazione).

Lamenta tuttavia che tali studi sono rivolti alla evidenziazione delle modalità di pensiero degli studenti in relazione alla produzione di una legge predeterminata dai ricercatori, e che di conseguenza questi trascurano di considerare possibili generalizzazioni parziali o non aderenti a ciò che essi si aspettano. Ella si pone in una prospettiva più ampia e considera accanto ai processi di generalizzazione classici, gli «actor-oriented transfer» ossia processi attraverso i quali gli studenti in autonomia trasferiscono e adattano loro conoscenze in nuovi contesti operando sotto nuove condizioni.

La studiosa esplora come gli studenti estendono i loro ragionamenti, esamina il senso che gli studenti attribuiscono alle proprie affermazioni generali, indaga circa quali tipi di caratteri comuni gli studenti potrebbero percepire attraverso i casi. L'ampia gamma di dati raccolti, relativi a protocolli degli studenti su problemi di vari natura, da successive interviste, dalle video trascrizioni dei processi di classe, le consente di mettere a punto, una tassonomia su due macro livelli: quello delle «azioni di generalizzazione» e quello delle conseguenti «generalizzazioni di riflessione», ossia le formulazioni generali prodotte. Sostiene che attraverso l'esame di quali azioni di generalizzazione promuovono particolari generalizzazioni di riflessione, la tassonomia permette di studiare i processi attraverso i quali gli studenti giungono a generalizzare, cominciando dai primi atti di pensiero fino alla fomulazione delle proposizioni di generalizzazione. Una tabella riassuntiva della tassonomia è sopra riportata.

Diversi altri studi riguardano i processi di generalizzazione in algebra di cui riferiamo qui di seguito.

2. Generalizzazione ed insegnamento dell'algebra

In un insegnamento dell'algebra che dia spazio ad attività generazionali e di tipo meta nel senso di Kieran (1996) i processi di generalizzazione sono dominanti. In ambito internazionale sono pochi gli studi implicanti processi di generalizzazione a livello avanzato, essi riguardano comportamenti di studenti di scuola secondaria o futuri insegnanti coinvolti in attività non standard di problem solving (Papadopulos-Iatridou, 2010; Zazkis-Liljedal, 2002). La maggioranza degli studi riguardano processi di generalizzazione in attività generazionali e si intrecciano con l'introduzione delle lettere per la codifica in termini generali di regolarità osservate. Kaput (1995) scrive:

> sia i mezzi sia l'obiettivo del generalizzare sono rivolti a stabilire alcuni oggetti simbolici formali che sono da intendersi come rappresentazioni di ciò che si è generalizzato per rendere ciò che è stato generalizzato soggetto di ragionamento ulteriore […] atti di generalizzazione e graduale formalizzazione della generalità costruita devono precedere il lavoro formale - altrimenti il formalismo non si radica nella esperienza dello studente.

Kaput può essere considerato una dei padri dell'early algebra, area disciplinare oggi consolidata, che propone un uso precoce delle lettere intrecciato ad un insegnamento relazionale dell'aritmetica ed una valorizzazione del linguaggio algebrico come strumento di rappresentazione di relazioni e proprietà, di ragionamento e giustificazione. I suoi studi hanno dato origine ad interessanti sperimentazioni in US che hanno investito sia il curricolo, avvicinando gli studenti alla generalizzazione di fatti, procedure e ragionamenti, sia la formazione insegnanti (Kaput-Blanton, 2001; Blanton-Kaput, 2001; Carpenter-Levi, 2001; Carpenter et Al., 2003; Carraher et Al., 2000, 2001; Schliemann et Al., 2001). Le influenze di tali studi si ritrovano nelle proposte della NCTM per il curricolo, dove viene data una forte enfasi all'attività di generalizzazione di pattern.

Al riguardo anticipatori ed ormai classici sono gli studi di Stacey (1989), Lee (1996), Orton-Orton (1994, 1996) ed i libri di Mason et Al. (1985) e di Orton (1999).

In generale gli studi a livello internazionale di approccio all'algebra che investono i processi di generalizzazione riguardano oltre che lo studio di pattern, la rappresentazione di corrispondenze funzionali tra coppie di variabili, lo studio di equazioni, aspetti strutturali delle operazioni aritmetiche, la formulazione di congetture e la loro giustificazione. Tuttavia le attività di esplorazione di pattern è quella più praticata, come è anche documentato dal numero speciale della rivista ZDM *From Patterns to generalization: development of algebraic thinking* (2008).

Dörfler nel suo commento agli articoli presenti in questo numero speciale, fa alcune osservazioni su cui concordiamo (Dörfler, 2008). Innanzi tutto, egli sostiene che la conoscenza ed il controllo delle notazioni algebriche non si sviluppa semplicemente attraverso la generalizzazione di pattern. In particolare, egli osserva che per promuovere la generalità non è sufficiente che gli allievi siano capaci di tradurre espressioni dal registro verbale a quello algebrico ma occorre che essi riescano a cogliere il senso delle espressioni formali; egli sottolinea l'importanza della «negoziazione dei significati dei termini algebrici e soprattutto della generalità insita in loro», perché è «l'abitudine all'uso, all'operare con, al parlare di, etc, i segni/le lettere sulla carta» che rende gli studenti consapevoli dei significati di cui questi sono portatori. Circa le successioni figurali egli evidenzia l'importanza che gli studenti divengano consapevoli che una data raffigurazione può essere vista in modi differenti e che di conseguenza è opportuno che se ne cerchino interpretazioni differenti. Inoltre sia per dare spazio alla inventiva degli studenti sia per non determinare in loro lo stereotipo della esistenza di una 'unica legge', data una serie di figure, suggerisce di chiedere «come puoi continuare?» o «che cosa puoi cambiare nelle figure date?»

Analogamente, circa le attività di modellizzazione di relazioni funzionali egli afferma che «generalizzazioni verbali o generalizzazioni via quasi-variabili[7] non permettono con facilità di pensare a proprietà di cui le relazioni funzionali godono. Essi descrivono la rispettiva generalità ma non consentono di operare in essa o con essa». Egli sottolinea anche che ciò che rende produttivo l'uso delle lettere è quello di permettere di trasferire in calcolo ragionamenti sui fatti in tavola, operando con le lettere secondo le comuni leggi dell'aritmetica (condensate nelle nozioni di anello o di campo); ancora, rileva che se gli studenti non sono consapevoli delle possibilità di azioni sulle lettere come «aggiungere» o «moltiplicare», l'espressione «n sta per un numero qualsiasi» remane vuota e difficile da accettare. Inoltre egli afferma che i lavori presentati nel numero dello ZDM in questione non chiariscono la relazione tra questo genere di attività e la padronanza nel calcolo algebrico, che necessariamente lo studente ha bisogno di praticare per poter giungere a sviluppare ragionamenti e produrre dimostrazioni attraverso il linguaggio algebrico. Infine, egli sottolinea che molti lavori sono focalizzati solo sulle difficoltà in-

[7] Questo costrutto, su cui torneremo più avanti, si riferisce alla individuazione di una generalità attraverso l'interpretazione di specifiche occorrenze numeriche in termini di variabilità.

contrate dagli studenti ma che questo è riduttivo poiché cognizione e comportamenti degli studenti possono essere influenzati da metodi dell'insegnante e modi di porre i problemi.

Riguardo alla letteratura, per questioni di spazio, ci limitiamo qui a considerare alcuni studi tra i più ampi e consolidati, quali quelli di Cooper e Warren, di Rivera e Rossi Becker e soprattutto di Radford. Prima di affrontarli tuttavia ci piace ricordare un singolare studio sulla generalizzazione e formalizzazione di procedimenti risolutivi di problemi aritmetici (Ferrari, 2006) in cui bambini di scuola elementare vengono guidati ad operare la distinzione tra dati e valori numerici dei dati e vengono posti di fronte al compito di esprimere in termini generali la procedura risolutiva di un problema. In questo processo le lettere vengono adottate dagli allievi come nomi contratti di una quantità volutamente non precisata dei dati per esaltare l'espressione delle relazioni aritmetiche tra essi; le singole scritture vengono da loro composte secondo gli atti operatori necessari alla risoluzione del problema giungendo a rappresentare la procedura risolutiva in una espressione algebrica. I risultati mostrano non solo l'efficacia dell'approccio ma anche un forte coinvolgimento degli allievi che genera motivazione allo studio della disciplina.

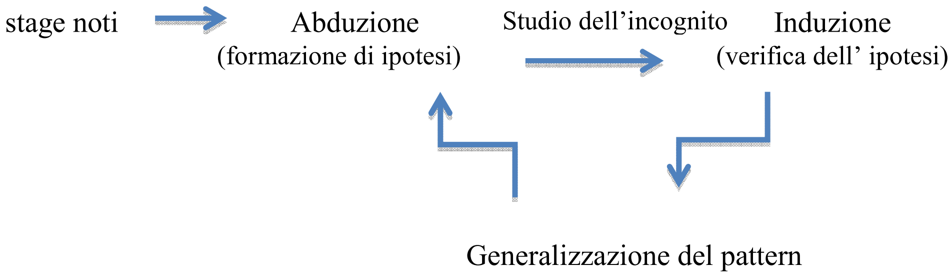
2.1 Gli studi di Cooper e Warren

Gli studi di Cooper e Warren (Warren-Cooper, 2008; Cooper-Warren, 2011) riguardano lo sviluppo di un progetto (Early Algebra Teaching Project) finalizzato alla collocazione di attività in early algebra nei programmi del Queesland (Australia). Gli autori considerano tre principali temi: a) pattern e funzioni; b) equivalenze ed equazioni; c) generalizzazioni aritmetiche. Essi, in linea con Radford (come vedremo più avanti), non vedono l'algebra come la manipolazione di lettere ma piuttosto come un sistema caratterizzato da: indeterminazione degli oggetti, natura analitica del pensiero; modi simbolici di designare gli oggetti. Il loro obiettivo è lo sviluppo dei modelli mentali degli studenti basato su relazioni tratte situazioni del mondo reale, simboli, linguaggio, evoluzione di fenomeni e grafici, in particolare di quelli che permettono la modellizzazione di situazioni reali in cui intervengono dati incogniti o variabili. Nel progetto EATP essi hanno studiato atti di generalizzazione degli studenti in relazione alla individuazione di: leggi soggiacenti a pattern (successioni figurali), leggi di cambiamento e loro inverse attraverso l'uso di macchine numeriche e tabelle di dati numerici, principi di equivalenza (emergenti dall'uso della bilancia) ed equazioni, principi di compensazione nei calcoli, rappresentazione di un cambiamento mediante tabelle, diagrammi a frecce, grafici, relazioni ed equazioni, guardando con particolare attenzione al collegamento tra uso di rappresentazioni e sviluppo del pensiero algebrico. Questi studi hanno rinforzato la loro convinzione che la generalizzazione è quella che maggiormente determina lo sviluppo del pensiero algebrico e la preparazione per gli studi successivi (Cooper-Warren, 2011, p. 188-190). Questi autori, in analogia con la nozione di 'quasi variable' (Fuji-Stephens, 2001) - che esprime il riconoscimento degli studenti che una o più espressioni numeriche possono evidenziare una relazione matematica soggiacente - introducono la quasi-generalizzazione nozione che indica 'un passo molto vicino verso la piena generalizzazione', ossia lo stato in cui gli studenti riconoscono ed esprimono la generalizzazione mediante numeri specifici, sono in grado di applicarla a molti altri numeri, ed anche estenderla ad un 'numero imprecisato', prima che essi possano esprimerla pienamente in linguaggio naturale o nel codice algebrico. I loro risultati mostrano che la 'quasi-generalizzazione' risulta un passo propedeutico alla formulazione in termini verbali o simbolici di una generalità (Cooper-Warren, 2011, p. 193).

Dal punto di vista delle attività di classe e degli studenti questi studi sono in linea con i nostri (Cusi-Malara, 2008; Cusi-Malara-Navarra, 2011), ma noi prendiamo in considerazione anche il ruolo dell'insegnante nella classe e, cosa più complessa, affrontiamo la questione di come sviluppare le competenze degli insegnanti nel condurre gli studenti ad affrontare questo tipo di questioni.

2.2. Gli studi di Rivera e Rossi Becker

Gli studi di Rivera (2010) e Rivera & Rossi Becker (2007, 2008, 2011) sono rivolti alla messa a fuoco dei processi mentali attuati da studenti di scuola media nel cogliere ed esprimere leggi lineari, in qualche caso quadratiche, generate dall'analisi delle prime occorrenze (o stage) di pattern non elementari. Gli autori sono interessati ai processi di costruzione e giustificazione delle generalizzazioni da parte degli studenti. Essi focalizzano la loro attenzione sulla 'percezione visiva' come risultante sia della percezione sensoriale che della 'percezione cognitiva', quest'ultima intesa come la capacità di un individuo di riconoscere un fatto o una proprietà in relazione ad un oggetto. Sostengono, come Radford, che i processi di esplorazione di un pattern sono di tipo abuttivo-induttivo, ma (come vedremo più avanti) a differenza di Radford' inglobano nel loro modello i processi per tentativi, ammettendo che cicli di abduzione-induzione possano ripetersi per raffinare ipotesi iniziali fino alla definizione di una legge adeguata alla generalizzazione. Modellizzano questo processo nel triangolo sottoindicato



In particolare Rivera (2010) studia in modo molto analitico l'evoluzione delle visualizzazioni cognitive degli studenti che stanno alla base delle modellizzazioni algebriche prodotte. In riferimento a questo egli si riferisce a: Giaquinto (2007) il quale sostiene che il riconoscimento della struttura di un pattern nasce delle associazioni dovute al 'poter visivo' naturale di ciascuno e dell'uso di un 'template (modello) visivo o percettibile' che indirizza le esplorazioni per il riconoscimento di parti costanti o ridondanti di un pattern; Davis (1993) che vede l''occhio' come 'organo legittimo di scoperta e di inferenza' e che considera la scoperta non solo frutto di ragionamento logico ma anche di osservazione; Arcavi (2003) che considera un prototipo visivo (template) come una strategia che permette agli studenti di vedere il non visto e l'astratto, che è dominato da relazioni e strutture concettuali non sempre evidenti; Metzger (2006) per la «legge di buona gestalt» riguardante l'abilità di percepire, distinguere ed organizzare una figura. Rivera usa l'espressione «pattern di alta (o bassa) gestalt» per esprimere il grado di efficacia di un pattern nell'evidenziare la struttura di una sequenza. Egli mostra l'esistenza ed efficacia di 'template' visivi nello studiare pattern che hanno una struttura lineare o quadratica ma sostiene che sono necessarie ulteriori ricerche per accertarsi della possibilità di template visivi per pattern che non hanno una struttura lineare[8].

In Rivera e Rossi Becker (2011) gli studiosi classificano le procedure attivate dagli allievi per giungere alla rappresentazione algebrica di una

[8] Rivera realizza anche un raffinamento del modello precedente considerando il triangolo <abduzione, induzione, generalizzazione> come base comune di due opposti tetraedri, dove il vertice in alto di un tetraedro rappresenta 'l'effetto gestalt' ed il vertice in basso del tetraedro opposto 'l'effetto conoscenza/azione'. Egli pone poi la questione di ricerca di come questo nuovo modello possa essere usato per altri compiti di carattere algebrico coinvolgenti la generalizzazione.

successione nelle tre seguenti categorie: 1) *generalizzazioni costruttive standard* (CSGs); 2) *generalizzazioni costruttive non standard* (CNG); 3) *generalizzazioni decostruttive* (DGs). Le *generalizzazioni costruttive* si riferiscono a quelle formule polinomiali che gli studenti construiscono direttamente dall'analisi degli stage noti del pattern come risultato di una percezione cognitiva della loro struttura vista costituita nel suo insieme da parti non sovrapposte. La generalizzazione decostruttiva invece si riferisce a quelle formule polinomiali che gli studenti costruiscono dall'analisi degli stage noti del pattern come risultato di una percezione cognitiva delle figure che le mostra strutturalmente costituite da parti sovrapposte (in alcuni casi ciò avviene vedendo il pattern come parte di una più ampia configurazione ma ben nota e facile). I modi decostruttivi di vedere un pattern implicano che alcuni elementi (lati o vertici) di una figura possono essere contati due o più volte e perciò le corrispondenti formule nascono da un processo combinato di 'addizione e sottrazione', in quanto gli elementi sovrapposti devono essere sottratti dal totale. I termini «standard» e «non standard» si riferiscono alle espressioni algebriche della legge: se viene applicata rispettivamente già semplificata oppure no. Dagli studi in esame le CSGs appaiono essere dominanti rispetto alle DGs. Gli autori, anche se identificano nel lavoro degli studenti gli stage 'fattuale', 'contestuale' e 'simbolico' di Radford (si veda più avanti), focalizzano la loro analisi sull'evoluzione del lavoro degli studenti dalla (de)costruzione guidata dalle figure a quella guidata dai numeri. Essi documentano quattro tipi di giustificazione a supporto della formula prodotta: generazione per estensione; uso dell'esempio generico; proiezione della formula; formula che contrasta l'apparenza. Essi collegano il successo degli studenti con la mediazione socio-culturale della classe cosa che permette loro di affrontare il pensiero moltiplicativo e, in alcuni casi, di semplificare le loro giustificazioni.

Da questi risultati quello che appare incomprensibile è la difficoltà degli studenti di produrre generalizzazioni costruttive non standard, dal momento che queste riflettono fedelmente le visioni cognitive degli studenti esse dovrebbero precedere quelle standard. Probabilmente il comportamento rilevato negli studenti dipende dal particolare tipo di contratto didattico in uso in quelle classi.

2.3. Gli studi di Radford

Radford sviluppa una serie di studi molti raffinati (Radford, 2003, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011) dove sono analizzati e teorizzati i modi con cui ragazzi di 12-14 anni, immersi in un ambiente d'insegnamento socio-costruttivo, generalizzano pattern di tipo lineare. Noi richiamiamo qui alcuni punti chiave della teoria di Radford.

L'autore afferma che la generalizzazione implica due principali processi che coinvolgono aspetti fenomenologici e semiotici: catturare una generalità, un atto fenomenologico che si realizza attraverso l'osservazione di come caratteristiche comuni locali valgono attraverso i termini dati[9]; ed esprimere una generalità, un atto semiotico che si realizza attraverso gesti, linguaggio verbale e simboli algebrici.

Il 'cogliere' (grasping) è visto come l'attivazione di una abduzione dall'osservazione di alcuni casi, ossia l'individuazione di una comunanza intesa in senso Peirceano di 'predizione generale'. L'abduzione diviene un'ipotesi attraverso cui, se positivamente verificata, emerge un nuovo oggetto: il *genus*, cioè un concetto generale, che sorge per generalizzazione, e che estende la comunanza osservata a tutti i termini della sequenza. Avviene una generalizzazione algebrica quando il genus si cristallizza in uno schema, cioè una legge che rappresenta con una espressione un qualunque termine della sequenza.

Casi particolari $p_1, p_2, \ldots, p_k$	Osservare una comunanza *C*	Fare di *C* una ipotesi	Produrre un'espressione di p_n
abduzione $\Rightarrow$	Trasformazione dell'abduzione $\Rightarrow$	Deduzione di p_n da *C* $\Rightarrow$	

Più tardi egli sostiene che «l'identificazione del genus non può essere considerato il risultato di un processo algebrico» (Radford, 2011). Egli afferma che lo sviluppo del pensiero avviene sia sul piano mentale che su quello sociale, generato da componenti materiali (gesti, linguaggio, percezione) e immateriali (immaginazione, discorso interiore…), che tutte insieme constituiscono la sua 'tessitura semiotica'. Considera che il pensiero algebrico è caratterizzato da indeterminatezza e analiticità che può essere riconosciuta dai segni che lo studente traccia. Rispetto all'emergere del pensiero algebrico egli afferma che: a) esprimere la generalità algebricamente non implica necessariamente l'uso delle lettere

[9] Dorfler (2008) riflette criticamente su una concezione del 'catturare una generalità' che sia basata unicamente su una comprensione empirica. Come esempio egli consiera la nozione di cerchio e sottolinea che essa non aderisce con questa visione perché «niente di osservabile ha (esattamente) la forma di un cerchio […] e che in molte situazioni la generalizzazione empirica o le astrazioni necessitano il supporto complementare di processi epistemici quali idealizzazione e ipostatizzazione».

(esse possono essere usate senza alcun significato generale) ma dal modo di ragionare che si esplica nel cogliere ed esprimere in qualche modo l'indeterminatezza. b) l'emergere del pensiero algebrico avviene quando lo studente riesce a spotare l'attenzione dal calcolare il numero di certi elementi al «modo di calcolare» tale numero.

Dall'esame dei comportamenti degli studenti, distingue tre livelli di approccio alla generalità. Un primo livello, che egli definisce di 'induzione ingenua', dove non vi è effettiva, consapevole generalizzazione. Esso si caratterizza dal procedere degli allievi per tentativi ed errori, dalla occasionalità di eventuali scoperte di generalità, da prime abduzioni che vengono falsificate nella verifica. A questo livello si può anche arrivare ad esprimere una legge nel sistema alfanumerico ma la generalizzazione non è algebrica. Un secondo livello, in cui la generalizzazione viene vista localmente, in modo ricorsivo, e viene espressa nei vari casi attraverso aggiunzione di un termine costante, che chiama di 'generalizzazione aritmetica'. Un terzo livello, molto intrigato e complesso, segnato da varie fasi via via più evolute, che definisce di 'generalizzazione algebrica'. Circa questo ultimo livello l'autore parla di un area di lavoro che chiama zona dell'emergere della generalizzazione algebrica che si sviluppa mediante strati di generalità. Il primo strato, definito 'fattuale', è quello dove la generalizzazione si manifesta attraverso concrete azioni sui casi in esame ma non si coagula in un enunciato. Il secondo strato, definito contestuale, è raggiunto quando l'indeterminazione entra nel discorso, si arriva a parlare di 'numero di una figura' ma si ragiona facendo riferimenti spazio-temporali su di essa in una prospettiva generale e una legge viene espressa in vario modo ricorrendo a parole, gesti, ritmi, segni. Il livello di generalizzazione algebrica si raggiunge quando avviene che ci si distacca dal contesto figurale e si attua uno spostamento verso le relazioni tra elementi costanti e variabili (numeri e lettere). Elementi importanti che intervengono in questo ultimo processo sono l'iconicità, ossia il rilevamento tratti simili in procedure precedenti, lo spostamento da un particolare e non specificato numero al livello di variabile per sintetizzazione di tutte le esperienze matematiche locali, la contrazione di espressioni che testimonia un più profondo livello di consapevolezza. Questa una rappresentazione di sintesi dei processi indicati (Radford, 2006, p. 15)

Modello di Radford relativo ai processi attivati dagli studenti nell'affrontare lo studio di pattern

Induzione ingenua	**Generalizzazione**			
Formulazione di congetture	Aritmetica	Algebrica		
(Tentativi ed errori)	(ricorsività locale)	Fattuale	Contestuale	Simbolica

Nei lavori più recenti Radford (2010, 2011) indirizza la sua attenzione verso allievi molto giovani (7-8 anni) e studia in dettaglio la relazione insegnante-allievi in un processo di classe dove gli allievi sono portati ad individuare ed esprimere generalizzazioni nell'esplorazione di sequenze figurali. In (Radford, 2010) lo studioso afferma che «l'apprendimento può essere teorizzato come quel processo attraverso il quale gli studenti gradualmente acquisiscono familiarità e iniziano ad avere consapevolezza dei significati culturali e delle forme di ragionamento e di azione che si sono costituiti». In particolare egli si focalizza sul «modo di vedere» e afferma che «gli occhi dei matematici sono stati soggetti ad un lento processo di addomesticazione» nel corso del quale gli uomini hanno imparato a vedere e riconoscere cose secondo modalità culturali «efficienti».

Radford considera il «vedere» non un semplice atto fisiologico ma un frutto del contesto culturale in cui si è immersi; egli sottolinea che la «generalizzazione si basa sull'individuare somiglianze tra cose differenti ed anche differenze tra cose somiglianti», e che questo gioco di visioni deve essere convenientemente educato dall'insegnante. Egli evidenzia il carattere sociale dei processi di insegnamento-apprendimento, il ruolo assunto dell'insegnante in esso e si concentra su «il modo in cui gli insegnanti creano le possibilità per gli studenti di percepire le cose in un certo modo e di avvicinarsi ad un modo culturale di generalizzare»; egli afferma che «percepire le successioni in un certo modo culturalmente efficiente coinvolge una transformazione dell'occhio in un sofisticato organo teorico».

Nell'analisi delle trascrizioni di classe egli evidenzia i comportamenti dell'insegnante (domande, riflessioni guidate, gesti, toni di voce, silenzi, sguardi) attraverso i quali ella riesce ad indirizzare i suoi piccoli allievi a rendersi conto da sé stessi della improprietà di certe loro visioni e ad autocorreggersi. Rispettto a questo egli scrive:

…Poēsis è un momento creativo di rivelazione – l'evento della cosa in

> consapevolezza… il momento poetico di rivelare la struttura generale della successione discussa in questo lavoro era il risultato di una interazione congiunta allievo-insegnante. Questo momento - l'evento della cosa in consapevolezza – era molto più che una negoziazione di significati e di scambio. Era piuttosto una fusione di voci, gesti, percezioni e prospettive nel senso di Bactiniana eteroglossia… (Radford, 2010, p. 3)

Da tale brano emerge come Radford consideri essere «la consapevolezza» elemento chiave nella conquista della conoscenza, frutto delle visioni coagulate dagli allievi per sollecitazione dell'insegnante e da loro espresse in varie modalità.

3. Brevi considerazioni conclusive

Dall'esame globale degli studi sulla generalizzazione che abbiamo considerato, appaiono chiari elementi comuni circa l'articolazione delle fasi attraverso cui la generalizzazione emerge, ma ci sono anche alcuni elementi di differenza, per esempio la differente posizione dei processi di tentativi ed errori nei modelli di Radford e di Rivera circa i comportamenti degli studenti di fronte all'esplorazione di successioni figurali. Gli studi di Radford si distinguono per il fitto intreccio tra aspetti teorici e aspetti della pratica, ed inoltre per la considerazione della dimensione socio-culturale della matematica e del suo insegnamento.

Nella maggioranza degli studi che noi conosciamo, il ruolo dell'insegnante rimane nell'ombra. Warren (2006) afferma che occorre una maggiore ricerca per individuare azioni e modi di porre domande da parte degli insegnanti che possono facilitare le generalizzazioni degli studenti. Solo nei più recenti studi di Radford (2010, 2011) vengono evidenziate azioni degli insegnanti nel guidare gli studenti a 'vedere' analogie e differenze tra vari stage di un pattern. In tali studi tuttavia non si fa menzione del fatto che la maggior parte degli insegnanti incontrano grandi difficoltà ad affrontare questo tipo di insegnamento anche quando questi siano convinti dell'opportunità di praticarlo.

Il problema di una formazione degli insegnanti adeguata allo sviluppo nella classe di processi socio-costruttivi indirizzati alla generalizzazione ed alla modellizzazione algebrica è oggetto di nostri studi (Malara, 2005; Malaram 2008; Cusi et Al., 2011; Cusi-Malara, 2012), esso si inquadra nel più generale problema, oggi molto dibattuto, della formazione degli insegnanti (Even-Ball, 2008; Wood, 2008). In Italia purtroppo tale problema è ancora più serio e drammatico a causa delle riforme attuate nell'Università, che hanno portato alla progressiva riduzione nei corsi di laurea in matematica degli spazi offerti agli insegnamenti specifici per l'insegnamento, e per la chiusura delle scuole di specializzazione per l'insegnamento secondario.

Bibliografia

Blanton, M., Kaput, J.J. (2011), Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, 24, pp. 483-510

Carpenter, T., Franke, M. L. (2001), Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof, in E. Chick et Al. (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'*, Melbourne: University of Melbourne, vol. 1, pp. 155-162.

Carpenter, T.P., Franke, M.L., Levi, L. (2003), *Thinking Mathematically. Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*, Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D., Brizuela, B., Schliemann, A. (2000), Bringing out the algebraic character of Arithmetic: instantiating variables in addition and subtraction, in T. Nakahara e M. Yoyama, (a cura di), *proc. PME 24,* Hiroshima: University of Hiroshima, vol. 2, pp. 145-152.

Carraher, D., Brizuela, B. e Darrell, E. (2001), The reification of additive differences in early algebra, in E. Cick, K. Stacey, Jl. Vincent e Jn. Vincent (a cura di), *The future of the teaching and learning of algebra*, Melbourne: University of Melbourne, pp.163-170.

Cooper, T.J., Warren, E. (2011), Years 2 to 6 students' ability to generalize: models, representations and theory for teaching and learning, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, 24, pp. 483-510.

Cusi, A., Malara, N.A. (2008), Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante*, 16 (1), pp. 57-80.

Cusi, A., Malara, N.A. (2012), Educational processes to promote, among teachers and in the classes, a linguistic approach to algebra: behaviours, difficulties and awareness emerged in teachers, in L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier e A. Robert (a cura di), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 299-319.

Cusi, A., Malara, N.A, Navarra, G. (2011), Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspective*, Advances in Mathematics Education, 24, pp. 483-510.

Cusi, A., Navarra, G. (2012), Aspects of generalization in early algebra, in

B. Mai-Tatsis e K. Tatsis (a cura di), *Generalization in Mathematics at all educational levels*, Rzeszow: Rzeszow University press, pp. 182-192.

Dorfler, W. (1989), Protocols of actions as a cognitive tool for knowledge construction, in M. Artigue, J. Rogalski e G. Vergnaud (a cura di), *proc. PME 13*, Paris, vol. 1, pp. 212-219.

Dorfler, W. (1991), Forms and means of generalization in mathematics, in A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen e van J. Dormolen (a cura di), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching*, Kluver, pp. 63-95.

Dorfler, W. (2008), En route from patterns to algebra: comments and reflections, *ZDM*, 40 (1), pp. 143-160.

Giovannini, A. (alias Enriques, F.) (1942), L'errore nelle matematiche, *Periodico di Matematiche*, IV, 22, pp. 57-65.

Ellis, A. (2007), A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations, *Journal of Learning Science*, 16 (2), pp. 221-262.

Even, R., Loewenberg Ball, D. (2009), *The professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, Springer.

Ferrari, P.L. (2006), 'From verbal texts to symbolic expressions: A semiotic approach to early algebra', in J.Novotná, H. Moraová, M. Krátká e N. Stehlíková (a cura di), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Prague, vol. 3, pp. 73-80.

Fuji, T., Stephens, M. (2001), Fostering understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variables, in H. Chick, K. Stacey, Jl. Vincent e Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', Melbourne, vol. 1, pp. 258-264.

Harel, G., Tall, D. (1991), The general, the abstract, and the generic, *For the Learning of Mathematics*, 11, pp. 38-42.

Hejny, M. (2003), Understanding and structure, in M. Mariotti (a cura di), *proc. CERME 3*, Bellaria, WG3, pp.1-8.

Kaput. J. (1995), A Research base supporting long term algebra reform?, *proc. PME 17-NA Chapter*, Columbus, OH: Ohio State University, pp. 2-26 (ERIC n. ED389534)

Kaput, J., Blanton, M. (2001), Algebrafying the elementary mathematics experience: transforming task structures, in H.Chick, K. Stacey, Jl. Vincent e Jn. Vincent (a cura di), *proc. 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', Melbourne: University of Melbourne, vol. 1, pp. 344-353.

Kieran, C. (1996), The changing face of school algebra, in C.Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde e A. Perez (a cura di), *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures*, Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, pp. 271-290.

Lee, L. (1996), An initiation into algebraic culture through generalization activities, in N. Bednardz, C. Kieran e L. Lee (a cura di), *Approaches to algebra*, Dordrech: Kluver, pp. 87-106.

Malara, N.A. (2005), Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra, in L. Santos (a cura di), *"Mathematics Education: Paths and Crossroads"*, Lisbona: Etigrafe, pp. 285-304.

Malara, N.A. (2008), Methods and Tools to Promote in Teachers a Socio-constructive Approach To Mathematics Teaching, in B. Czarnocha (a cura di), *Handbook of Mathematics Teaching Research*, Rzeszów University Press, pp. 273-286.

Mason, J. (1996a), Future for Arithmetic & Algebra: Exploiting Awreness of Generality, in J.Gimenez, R. Lins e B. Gomez (a cura di), *Arithmetics and Algebra Education, Searching for the future*, Barcelona: Universitat Rovira y Virgili, pp. 16-33.

Mason, J. (1996b), Espressing generality and roots of algebra, in N. Bernardz, K. Kieran e L. Lee (a cura di), *Approaches to Algebra*, Dordrecht: Kluver Academic Publisher, pp. 65-86.

Mason, J., Grahm, D, Pimm, D., Gower, N. (1985), *Route to/roots of algebra*, Milton Keynes: Open University Press.

Orton, A., Orton, J. (1994), Students' perception and use of pattern and generalization, in J. Da Ponte e J.F. Matos (a cura di), *proc. PME 18*, Lisbon: University of Lisbon, vol. 3, pp. 407-414.

Orton, J., Orton, A. (2006), Making Sense of Children's patterning, in L. Puig e A. Gutierrez (a cura di), *proc. PME 20*, Valencia: University of Valencia, vol. 4, pp. 83-90.

Orton, A. (a cura di) (1999), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, London: Continuum, pp. 104-120.

Papadopoulos, I., Iatridou, M. (2010), Modelling problem-solving situations into number theory tasks: the route towards generalisation, *Mathematics Education Research Journal,* 22 (3), pp. 85-110.

Radford, L. (1996), Some reflection on teaching algebra through generalization, in N.Bernardz, K. Kieran e L. Lee (a cura di), *Approaches to Algebra*, Dordrecht: Kluver Academic Publisher, pp. 107-111.

Radford, L. (2003), Gestures, speech, and the spouting of signs: a semiotic culturale approach to students' type of generalization, mathematical thinking and learning, *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), pp. 37-70.

Radford, L. (2006), Algebraic thinking and the generalization of paterns: a semiotic perspective, in S.Alatorre, J. Cirtina, M. Sáiz e A. Méndez (a cura di), *proc. PME 28-NA Chapter*, Mexico: UPN, vol.1, pp. 2-21.

Radford, L. (2008), Iconiciy and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different context, *ZDM*, 40 (1), pp.83-96.

Radford, L. (2009), Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective, in V.Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne e F. Arzarello (a cura di), *proc. CERME 6*, Lyon, pp. 33-53.

Radford, L. (2010), The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, 30 (2), pp. 2-7.

Radford, (2011), Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking, in J. Cai, e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, 24, pp.483-510.

Rivera, F. (2010), Visual Templates in pattern generalization activity, *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), pp. 297-328.

Rivera, F., Rossi Becker, J. (2007), Abductive, inductive (generalization) strategies of preservice elementary majors on patterns in algebra, *Journal of Mathematical Behaviour*, 26 (2), pp.140-155.

Rivera, F., Rossi Becker, J. (2008), Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns, *ZDM*, 40 (1), pp. 65–82.

Rivera, F., Rossi Becker, J. (2011), Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: results of a three-year study, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, 24, pp.323-366.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. e Brizuela, B.M. (2001), When tables become function tables, in van der M. Huenvel-Panhuizen. (a cura di), *proc.. PME 25*, Utrecht, vol.4, pp.145-152.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.

Stacey, K. (1989), Finding and using patterns in linear generalizing problems, *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 147-164.

Warren, E. (2006), Teacher actions that assist young students write generalization in words and in symbols, in J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká e N. Stehlíková (a cura di), *proc. PME 30*, Prague, vol. 5, pp. 377-384.

Warren, E., Cooper, T. (2008), Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking, *Educational Studies in Mathematics*, 67, pp. 171–185.

Wood, T. (a cura di) (2008), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, Purdue University, West Lafayette, USA: Sense Publishers, voll. 1-4.

Zazkis, R., Liljedal, P. (2002), Generalization of patterns: the tension between algebraix thinking and algebraic notation, *Educational Studies in Mathematics*, 49, pp. 379-402.

Formazione degli insegnanti per un approccio socio-costruttivo all'early algebra: studio di un caso

Nicolina A. Malara[(*)]

1. Mutamenti nell'insegnamento dell'algebra

Tradizionalmente l'algebra viene introdotta nell'insegnamento come studio sintattico delle forme algebriche, senza alcuna attenzione ai processi di matematizzazione che le sottendono o ai mutamenti storico-epistemologici che hanno portato alla loro reificazione come oggetti matematici. La conseguenza di questo è che gli studenti non colgono il senso del linguaggio algebrico come linguaggio idoneo per la modellizzazione del reale e come potente strumento di ragionamento e di previsione.

Sin dagli anni '90 la ricerca ha mostrato come un insegnamento relazionale dell'aritmetica assieme ad un approccio anticipato alla modellizzazione algebrica consenta il superamento di classiche difficoltà nell'apprendimento dell'algebra e una più facile conquista dei significati di cui le forme algebriche sono portatrici (Chevallard, 1989, 1990; Kieran, 1989, 1992; Linchevski, 1995). Classici sono gli studi rivolti allo sviluppo del 'symbol sense' (Arcavi, 1994), inteso come traguardo meta, produttore di una concezione dell'algebra come 'strumento di pensiero' (Arzarello et Al., 2003) e studi dove si indicano percorsi innovativi centrati sul cosidetto ciclo algebrico essenziale: rappresentare, trasformare, interpretare[10]. Tutti questi studi hanno dato luogo a svariate sperimentazioni il cui successo ha portato al consolidarsi di un corpus di risultati che sono venuti a determinare una specifica area di insegnamento, l'*early algebra*, intesa come area di collegamento ed intreccio tra aritmetica ed algebra, da affrontare sin dai primi anni di scolarità (sulla evoluzione dell'insegnamento dell'algebra si veda Malara (2012), per maggiori dettagli sull'early algebra si veda Malara (2007)).

(*) Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (malara@unimore.it).

10 Si vedano ad esempio (Bell et Al., 1987; Harper, 1987).

L'early algebra si sviluppa attraverso l'esplorazione di situazioni di vario genere e punta alla individuazione di relazioni e di regolarità, al riconoscimento di analogie, alla generalizzazione di fatti osservati ed alla loro rappresentazione. Essa è presente da tempo in molti programmi dei paesi più avanzati (basti considerare gli standard USA del 2000 o i programmi inglesi già dal 1991) e appare oggi nelle linee portanti delle nostre indicazioni nazionali.

Il modello di insegnamento soggiacente a queste innovazioni è quello socio-costruttivo. Esso si basa su una visione degli studenti come artefici della propria conoscenza e si articola attraverso l'argomentazione ed il confronto delle idee, fino alla sistemazione collettiva delle conquiste fatte ed alla riflessione sul significato e ruolo di esse. Tale modello prevede che l'azione dell'insegnante si sviluppi a partire dalla devoluzione agli studenti di situazioni problematiche opportunamente studiate per favorire l'emergere di concetti e proprietà matematiche particolari.

Questo modello di insegnamento richiede nell'insegnante conoscenze e abilità che non riguardano soltanto la conoscenza della disciplina. Egli deve essere abile nel creare un buon contesto di interazione, stimolando e regolando i processi argomentativi, facilitando la comunicazione, l'ascolto, la valutazione e la capacità di produrre contro-argomentazioni.

In tale modello la discussione matematica svolge un ruolo centrale. Nel condurre una discussione l'insegnante deve dirigere l'attenzione della classe verso l'obiettivo matematico da raggiungere e deve filtrare e far convergere le idee degli studenti verso contenuti rilevanti e significativi per il raggiungimento di esso. Molte sono le azioni che deve oculatamente compiere, quali: porre domande di rilancio circa le affermazioni degli studenti per far chiarire loro quanto affermato e far controllare lo sviluppo dei loro pensieri; ricostruire i discorsi degli studenti, per evidenziare e chiarire i processi argomentativi sviluppati; riesaminare elementi dell'attività che possano favorire la comprensione delle idee matematiche sottese; indurre riflessioni locali e globali, per incoraggiare gli studenti a ripensare su cosa hanno compreso in un dato momento e per permettere loro di interiorizzare i processi collettivi di argomentazione. Deve inoltre attivare e rendere esplicite norme socio-matematiche che portino gli studenti a vagliare l'accettabilità di una soluzione, a valutare soluzioni differenti, ad apprezzare la qualità di una soluzione.

Nello sviluppo di una discussione inoltre svariate sono le situazioni che si possono determinare, ciò comporta che l'insegnante debba prendere numerose decisioni nel vivo dell'azione. Questo richiede in lui la capacità

di prefigurarsi i problemi che può incontrare sul campo, cosa che è strettamente correlata alla sua capacità di controllo della situazione.
Per l'acquisizione di tali competenze, la ricerca sulla formazione degli insegnanti ha evidenziato l'importanza dell'attuazione di pratiche educative "sul campo", che si basino sulle riflessioni critiche dell'insegnante circa i processi di classe e sulla condivisione di tali riflessioni in "comunità di indagine", gruppi misti e paritetici costituiti da insegnanti, mentori e ricercatori (Jaworsky, 1998, 2003, 2006; Lerman 2001; Mason, 1998, 2002, 2008; Shoenfeld, 1998). Mason, in particolare, propone lo studio della 'disciplina dell'osservare'. Egli afferma che l'abilità di intuire/afferrare le cose viene dalla costante pratica, andando oltre quello che accade nella classe, e raccomanda la creazione di opportune pratiche sociali in cui gli insegnanti possano condividere le loro esperienze e rifletterci su. Al riguardo Jaworski sottolinea l'efficacia delle comunità di indagine, enfatizzando come la partecipazione degli insegnanti a questi gruppi li porti, grazie alle pratiche di riflessione congiunta, a sviluppare una nuova identità.
Il nostro modello di formazione e sviluppo professionale degli insegnanti segue queste concezioni e modalità, ma rappresenta il risultato delle pratiche di educazione degli insegnanti sviluppate in Italia sin dai tardi anni '70 ed attuate in intreccio con gli studi di innovazione didattica nelle classi (Malara-Zan, 2002).

2. I nostri studi sul versante dell'early algebra e della formazione degli insegnanti

Sin dagli anni 90 ci siamo occupati di problemi di insegnamento-apprendimento dell'algebra ed abbiamo attuato sperimentazioni nelle classi in collaborazione con insegnanti-ricercatori con l'obiettivo di individuare le condizioni di applicabilità nella scuola reale di innovazioni didattiche portatrici di una visione dell'algebra aperta al problem solving, alla generalizzazione, alla modellizzazione ed alla dimostrazione, nell'ottica di un insegnamento di tipo socio-costruttivo.

I nostri numerosi studi hanno portato alla nascita del *Progetto ArAl: percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico*[11] (Malara - Navarra, 2003), progetto che propone una rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in chiave relazionale ed un avvio all'algebra di tipo

[11] ArAl è un acronimo per « Aritmetica e Algebra ». Il progetto ArAl è condotto in collaborazione con Giancarlo Navarra, insegnante ricercatore, che ne coordina gli aspetti organizzativi e contribuisce al suo programma scientifico.

linguistico-costruttivo. Il progetto coinvolge studenti ed insegnanti dalla scuola dell'infanzia al primo biennio della scuola secondaria superiore ma è principalmente rivolto alla scuola primaria e secondaria inferiore in una prospettiva di continuità tra i due ordini scolastici.

L'ipotesi su cui il progetto si basa è che l'apprendimento del linguaggio algebrico possa svilupparsi in analogia con le modalità d'apprendimento del linguaggio naturale. Come l'apprendimento del linguaggio naturale avviene attraverso un'ampia varietà di situazioni che il bambino vive sperimentalmente, attraverso le quali si appropria poco alla volta dei significati dei termini del linguaggio e delle regole morfologiche che lo supportano, così i modelli mentali propri del pensiero e del linguaggio algebrico vanno costruiti sin dai primi anni di scuola, portando gli allievi ad affrontare esperienze pre-algebriche lavorando in aritmetica (cogliere, generalizzare ed esprimere relazioni, effettuare e confrontare rappresentazioni, estendere regolarità per analogia, …) in modo che - attraverso una costante riflessione sui significati dei segni introdotti e dei processi attivati - essi possano sviluppare il pensiero algebrico progressivamente, in un fitto intreccio con l'aritmetica.

Come riportato in Cusi et Al. (2011), la nostra prospettiva di lavoro nelle classi si poggia su alcuni principi base che qui riportiamo:

- L'anticipazione di attività pre-algebriche di tipo generazionale all'inizio della scuola primaria, e ancora prima alla scuola dell'infanzia, per favorire la genesi del linguaggio algebrico, visto come linguaggio generalizzatore, nel momento in cui l'alunno viene guidato verso la riflessione sul linguaggio naturale.
- La costruzione sociale delle conoscenze, ossia la costruzione condivisa di nuovi significati, negoziata sulla base degli strumenti culturali comuni posseduti in un determinato momento dagli alunni e dal docente.
- La centralità del linguaggio naturale come mediatore didattico principale per la lenta costruzione degli aspetti semantici e sintattici del linguaggio algebrico. Attraverso l'attivazione di processi di traduzione, il linguaggio naturale crea le basi per la produzione di rappresentazioni in linguaggio algebrico. Verbalizzazione, argomentazione, discussione, confronto favoriscono la comprensione e la revisione critica delle scritture e l'esplicitazione delle idee soggiacenti attivando processi di interpretazione
- L'individuazione e l'esplicitazione del pensiero algebrico presente in modi spesso 'nascosti' nei concetti e nelle rappresentazioni dell'aritmetica. La genesi del linguaggio generalizzatore si può collocare nel 'disvelamento' che avviene quando l'alunno comincia a descrivere una

frase come 4×2+1=9 non più (non soltanto) come esito di una lettura procedurale ‘Moltiplico 4 per 2, aggiungo 1 e ottengo 9’ ma come risultato di una lettura relazionale del tipo ‘La somma fra il prodotto di 4 con 2 e 1 è uguale a 9’; cioè quando parla, attraverso il linguaggio naturale, del linguaggio matematico, e non pone l’attenzione sui numeri ma sulle relazioni, cioè sulla struttura della frase.

In un approccio di questo tipo l’elemento chiave è l’insegnante, occorre che egli attui una didattica che consenta l’affermarsi di un’autentica attività matematica socialmente condivisa, in cui si dia grande spazio agli aspetti linguistici, di rappresentazione di informazioni e di processi, ed ad aspetti meta-cognitivi per il controllo della pertinenza ed adeguatezza delle rappresentazioni, per il riconoscimento e l’identificazione di quelle equivalenti e per la selezione di quelle ottimali. Questo richiede una profonda ristrutturazione delle concezioni degli insegnanti sia sul versante dei contenuti da insegnare sia su quello metodologico-didattico nella classe e comporta una vera e propria cultura del cambiamento.

Strumenti, metodi ed attività messi a punto in seno al progetto hanno la funzione di sostenere gli insegnanti nel proporre alle classi attività di early algebra con modalità socio costruttive, e di formarli come insegnanti metacognitivi attraverso la riflessione sulla loro azione di classe. Si punta ad obiettivi su due versanti:

- degli allievi: l’obiettivo è quello di analizzare le condizioni attraverso le quali questi ultimi, sin dai gradi 4-6 riescono, a un primo livello, a generalizzare, a formulare proprietà e produrre rappresentazioni formali, a risolvere problemi algebrici… e, ad un secondo livello, a conquistare il significato delle scritture algebriche e la consapevolezza della loro forza espressiva;
- degli insegnanti: anche su questo versante gli obiettivi sono a due livelli. Un primo obiettivo è quello di affinare la loro capacità nel condurre la classe nell’approccio all’early algebra secondo le modalità indicate, un secondo obiettivo è quello di favorire la loro crescita attraverso stimoli derivanti dalla partecipazione a progetti di collaborazione almeno biennali caratterizzati dall’immersione in una comunità di indagine sulla propria pratica, in un continuo gioco di riflessione, confronto, condivisione.

La nostra ipotesi di lavoro è quella di portare gli insegnanti ad essere immersi in un ‘ambiente’ nel quale loro stessi possano divenire artefici di un loro nuovo modo di operare, impegnandosi in modo attivo e (ri)costruendo la loro professionalità docente attraverso scambi di studi, esperienze e riflessioni a tutto campo. Le nostre modalità di lavoro sono finalizzate ad indurre gli insegnanti ad oggettivare i loro processi didattici per poter meglio valutarne i risultati ed a guidarli a riflettere a vari livelli attorno a processi (propri o altrui) secondo tre punti di vista: lo sviluppo della costruzione matematica degli allievi, l'azione dell'insegnante, la partecipazione dei singoli nelle costruzione collettiva delle conoscenze.

Gli insegnanti che scelgono di partecipare alle sperimentazioni ArAl hanno alle spalle lo studio del progetto, in particolare delle sue unità,[12] e del glossario reperibile nel sito del progetto[13]. Nell'affrontare le sperimentazioni, tuttavia, accanto alla loro forte motivazione rivelano una altrettanto forte insicurezza verso le discussioni di classe, percepite come situazioni di difficile gestione, aperte ed imprevedibili.

I nostri studi ci hanno resi consapevoli delle difficoltà che essi incontrano sia nella progettazione che nella conduzione delle discussioni di classe. Hanno messo in evidenza come, nello sviluppo di una discussione, gli insegnanti spesso assumono atteggiamenti non adeguati, che ricalcano il modello trasmissivo, che li portano a: non rendere gli studenti partecipi delle finalità del problema o delle conclusioni da raggiungere; non dare spazio ad interventi potenzialmente produttivi, a ratificare immediatamente la validità di interventi significativi senza rilanciare alla classe la loro validazione. Un esempio di questo è riportato in appendice con un dettagliato commento sui limiti dell'azione dell'insegnante.

Per supportare gli insegnanti ed andare incontro ai loro bisogni, affidiamo a gruppi di insegnanti coinvolti su una stessa sperimentazione un mentore-ricercatore, con il quale oltre a momenti di lavoro *de visu* intessono un costante rapporto dialogico via mail. Periodicamente, presso le scuole o all'università, vi sono poi sessioni di lavoro dei piccoli gruppi con il mentore ed il ricercatore responsabile, ma anche sessioni collettive che riuniscono tutti i ricercatori e gli insegnanti sperimentatori.

Convinti che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe favoriscano nell'insegnante lo sviluppo della consapevolezza delle dinamiche che si realizzano in ogni discussione e delle variabili che le determinano, il nostro obiettivo è quello di portare gli insegnanti coinvol-

---

[12] Le unità possono vedersi come modelli di processi didattici in sequenza, aperti alle scelte dell'insegnante, su un filone specifico di attività. Essi danno indicazioni sul significato matematico e gli obiettivi delle singole attività esposte, riportano estratti 'esemplari' di discussioni di classe, commentate sia sul piano dei comportamenti degli allievi (costruzioni significative, atteggiamenti ricorrenti, difficoltà) sia su quello degli insegnanti (interventi oculati, modi di introdurre e gestire le questioni, atteggiamenti assunti ecc).

[13] Alle unità fanno da supporto il quadro teorico e soprattutto il glossario, consultabile in rete nel sito del progetto <www.aralweb.unimore.it>, dove gli insegnanti possono trovare chiarimenti ed approfondimenti su questioni matematiche, linguistiche, psicologiche, sociopedagogiche e metodologico-didattiche ed anche trovare esempi di buone pratiche.

ti a: a) acquisire una crescente capacità di interpretare la complessità dei processi di classe attraverso l'analisi delle micro-situazioni che li compongono, di riflettere sulla efficacia del proprio ruolo ed acquisire consapevolezza sugli effetti delle proprie micro-decisioni; b) avere un maggiore e più fine controllo sui comportamenti e sugli stili comunicativi da loro adottati; c) osservare, nella prosecuzione dell'attività di classe, l'influenza sui comportamenti ed apprendimenti degli allievi dello studio critico-riflessivo via via svolto.

Per realizzare questo obiettivo, coinvolgiamo gli insegnanti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su si essi, mirata ad evidenziare le interrelazioni tra conoscenze costruite dagli studenti e comportamenti dell'insegnante nel guidare gli studenti in tali costruzioni. Tale analisi si sviluppa attraverso la costituzione di quelli che noi chiamiamo 'Trascrizioni multicommentate' (TM), in gergo 'i diari'. Esse si realizzano sulla base dal trasferimento in versione testuale digitale delle audioregistrazioni di lezioni su temi concordati in precedenza con i ricercatori. Sono effettuate dagli insegnanti sperimentatori che le inviano, accompagnandole con commenti e riflessioni, ai mentori-ricercatori, i quali le commentano a loro volta e le rinviano quindi agli autori, ad altri docenti impegnati in attività analoghe e talvolta ad altri ricercatori. Spesso gli autori stessi reintervengono nel ciclo commentando i commenti o inserendone dei nuovi. Quello che caratterizza questa metodologia è la coralità di rete, per i fitti scambi via mail che determinano la costituzione delle TM, e la fertilità delle riflessioni che emergono dai vari commenti espressi.

Qui noi proponiamo solo un breve estratto di una TM, nell'intento di mostrare come questo strumento permette di evidenziare i comportamenti attuati dagli insegnanti, le difficoltà che essi incontrano, le consapevolezze che raggiungono dopo il lavoro di analisi e riflessione condotta sulla base dei commenti ricevuti. Siamo ben consapevoli che questo estratto non può pienamente esprimere la ricchezza e la varietà di questioni che emergono dalle trascrizioni di classe, il tipo di interazioni con gli insegnanti che i commenti consentono di attivare e come questi commenti possano aiutarli a raffinare le loro azioni nella classe, per questo ci riferiamo anche ad altri esempi che si possono trovare in Malara (2008), Malara-Navarra (2011), Cusi et Al. (2011), Cusi-Malara (2012). Per preservare il flusso della discussione, i commenti analitici sono riportati nello stesso ordine in cui essi sono stati fatti. Gli autori dei commenti così sono indicati: I: insegnante; M: mentore; R1-R2: recercatori del team.

3. Un breve esempio di TM

L'insegnante propone l'esplorazione di una successione numerica di cui sono dati i primi tre termini (si tratta di una progressione aritmetica di elemento iniziale 4 e ragione 7). L'attività è finalizzata a determinare una rappresentazione algebrica generale della sequenza. Nell'estratto riportato, la classe (I media) ha già identificato la legge di generazione ricorsiva della successione. L'insegnante scrive la seguente tabella alla lavagna ed apre una discussione per introdurre la classe allo studio di una rappresentazione per la legge generale di corrispondenza (I , come prima, sta per insegnante; S, J ed A rappresentano gli studenti coinvolti in questa parte di discussione).

Numero di posto	Numero della successione	Operazioni fatte saltando dal primo numero di posto	'Ricetta matematica[14]' per costruire il numero
1	4	4	
2	11	4 +…	
3	18	4 + … + …	
4	25		
5	32		

1 I:	Come arriviamo a 11?
2 S:	+ 7.
3 I:	Facciamo 4 + 7. E cosa al terzo posto, S? Facciamo…?
4 S:	4 + 7 + 7.
5 J:	Non sarebbe meglio fare 4 × 2? (1)
6 I:	E al quarto cosa facciamo?
7 S:	4 + 7 + 7 + 7.
8 I:	E al quinto?
9 S:	4 + 7 + 7 + 7 + 7.
10 I:	Cosa facciamo se raggiungiamo il sesto posto?
11 S:	4 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7.
12 I:	Corretto. allora, noi troviamo …

[14] L'espressione "ricetta matematica" è una metafora usata dall'insegnante per indurre l'idea che gli allievi dovrebbebro usare una rappresentazione di un numero della successione mediante il suo numero di posto.

13 A:	Io non ho capito. Cosa metto al primo posto?
14 I:	Ok, c'è 4 al primo posto.
15 A:	Io metto 4 × 1. (2)
16 I:	Si, ma lì non c'è il '×'. Il primo posto è 4 (3)

3.1 Commenti analitici dell'estratto

(1) M. Perché I non commenta l'intervento di J?

R2. Concordo con M. Probabilmente J intuisce una regolarità ma non la esprime correttamente, invece di dire 4 + 7 × 2 egli sintetizza tutto in 4 × 2. I avrebbe dovuto intervenire su questo.

(2) R1. Anche questo intervento avrebbe potuto essere indagato. Qual è il retropensiero di A? Perché pensa al prodotto fra 4 e 1?

R2. Ancora siamo di fronte ad una intuizione espressa malamente. Lo studente probabilmente vuole 'colmare il vuoto' che vede nella rappresentazione del primo termine a confronto delle altre. Qui I perde un'occasione di variare la rappresentazione del primo termine, 4, in modo funzionale alla situazione, ad esempio scrivendo 4 come 4+0 e rilanciando alla classe il problema di trovare per il primo termine una rappresentazione analoga a quella degli altri.

(3) R2. Questo intervento di I fa pensare che lei stessa escluda la rappresentazione di 4 in altro modo, mostrando poca lungimiranza da un punto di vista algebrico. Sarebbe bene invece incoraggiare queste intuizioni, anche se imprecise, ovviamente cercando di indirizzarle al meglio.

I. Tutte queste annotazioni mi fanno pensare ad una enorme chiusura mentale che ho e che credevo di non avere così tanto. Non so se sia questione di attenzione, di abitudine a vedere le cose anche in altro modo, di paura ad uscire da quello che è lo schema da seguire o che credevo di dover seguire.

3.2 Analisi dell'estratto

Questo estratto documenta alcuni rigidità nei comportamenti dell'insegnante. Questo non coglie la produttività delle intuizioni di alcuni allievi, bloccando possibili strade per la loro esplorazione matematica (linee 5, 13, 15) ed allontanandoli dalla rappresentazione relazionale della corrispondenza, che implica l'uso della rappresentazione moltiplicativa (linea 16). Notiamo che l'insegnante fa solo alcune commenti di riflessione sulla sua azione dopo la lettura dei commenti del mentore e di altri ricercatori. Il suo commento a posteriori rivela consapevolezza della sua rigidità ma anche esplicita le sue paure ad abbandonare gli schemi usuali per affrontare nuove attività e nuovi approcci (note 3-I).

In generale, i commenti associati a questo estratto riflettono alcune delle categorie da noi già evidenziate (Malara, 2008), che appaiono qui strettamente interconnesse: (1) questioni legate a concezioni culturali o educative generali (note 3-R2); (2) questioni metodologiche riguardanti aspetti matematici (note 1-R2; 2-R2; 3-R2); (3) questioni di gestione delle discussioni nella classe (note 1-M; 2-R1). Altre categorie emerse vistosamente dagli MT – qui non documentate per ragioni di spazio - riguardano la distanza tra teoria e pratica (per la difficoltà a riferirsi ad elementi del quadro teorico condiviso) e a questioni linguistiche di vario genere.

Il breve esempio presentato indica il ruolo che le TM svolgono nei nostri percorsi di formazione, va tenuto presente che questo lavoro analitico è condotto sulle trascrizioni di tutti gli episodi di classe che costituiscono l'esperimento d'insegnamento. E' attraverso la totalità dei commenti che gli insegnanti: (1) realizzano effettivamente come lo sviluppo delle costruzioni matematiche degli allievi è influenzato fortemente da linguaggio, scelte, atteggiamenti ed azioni dell'insegnante; (2) riflettono sulle loro difficoltà nel condurre una discussione e ricevono suggerimenti circa come affrontare micro-situazioni di interazione; (3) esprimono le loro difficoltà, dubbi e consapevolezze.

L'analisi critica collettiva è una modalità metodologica particolarmente importante per lo sviluppo della consapevolezza di un insegnante: commenti divergenti ad una stessa micro situazione conducono a considerare diverse interpretazioni possibili dei comportamenti assunti e degli interventi attuati; commenti convergenti permettono di amplificare i punti critici nella conduzione dell'attività, in relazione alla quale è necessario (ri)costruire competenze e raffinare le proprie sensibilità.

Desideriamo evidenziare le condizioni che determinano l'efficacia del nostro approccio via MT. Una prima condizione è la natura non episodica delle situazioni per la riflessione e di scambio: grazie al progressivo accumularsi di momenti riflessione autonoma e di riflessione interattiva, caratteristici della nostra metodologia, l'insegnante diviene più recettivo e, nel lungo termine, giunge a sviluppare nuove concezioni, atteggiamenti e modi di agire. Un'altra fondamentale condizione, cruciale per il processo di sviluppo dell'insegnante, è l'attuazione di una relazione tra membri del gruppo basata sulla fiducia reciproca e la costruzione di un senso di appartenenza e di condivisione di valori comuni.

L'analisi di diverse TM relative alla implementazione di un percorso progettato con gli insegnanti e finalizzato allo sviluppo delle abilità dimostrative via linguaggio algebrico degli studenti, ci ha permesso di identificare i caratteri specifici che costituiscono il profilo di un 'insegnante efficace', che si pone come modello di atteggiamenti e comportamenti consapevoli ed efficaci per gli studenti (Cusi-Malara, 2009). Gli elementi che definiscono il modello richiedono che l'insegnante debba: (a) porsi come soggetto che indaga, stimolando un atteggiamento di ricerca in relazione al problema in studio e come elemento partecipante costitutivo e nella classe; (b) porsi come guida operativa/strategica, proponendosi mediante un atteggiamento di condivisione di situazioni (più che di trasmissione di saperi), e di guida riflessiva portando all'identificazione di modelli operativi/strategie efficaci che emegono nell'attivita di classe; (c) essere consapevole della propria responsabilità di mantenere un armonico equilibrio tra aspetti sintattici e aspetti semantici nello sviluppo del pensiero algebrico; (d) tentare di stimolare e provocare la costruzione di competenze chiave nella produzione di pensiero via liguaggio algebrico agendo come "attivatore" di processi algebrici (generalizzare, tradurre, manipolare, interpretare, anticipare); (e) stimolare e provocare atteggiamenti di tipo meta, agendo come "attivatore" di atteggiamenti riflessivi e "attivatore" di atti meta-cognitivi, con particolare referimento al controllo del senso globale dei processi.

Il lavoro sviluppato con futuri insegnanti (Cusi-Malara, 2011), ci ha suggerito di concepire questo costrutto come una possibile lente teorica per l'analisi delle discussioni di classe da usarsi in specifici laboratori con/per insegnanti in servizio. In un prossimo futuro intendiamo verificare l'efficacia di questo costrutto anche come strumento per l'auto analisi dell'insegnante.

4. Brevi osservazioni conclusive

In questo lavoro abbiamo presentato i principali riferimenti sugli studi che stanno alla base delle ricerche da noi condotte per l'innovazione didattica in ambito aritmetico-algebrico e per una formazione degli insegnanti adeguata a gestire una tale innovazione. Ci siamo soffermati sulla questione del ruolo dell'insegnante nello sviluppo di una discussione matematica documentando attraverso estratti di trascrizioni di classe comportamenti inadeguati e incongruenze nelle azioni dell'insegnante. Abbiamo poi illustrato le modalità di formazione da noi attuate per rendere gli insegnanti consapevoli della stretta relazione tra le loro azioni e i comportamenti degli studenti al fine di affinare la loro professionalità nel gestire una discussione. Abbiamo inoltre evidenziato i caratteri di un profilo di insegnante che si pone in modo efficace per produrre negli studenti un approccio significativo e consapevole al pensiero algebrico.

Nel concludere desideriamo sottolineare l'importanza delle pratiche come quelle descritte per la conquista nell'insegnante di concezioni e consapevolezze nuove circa i contenuti di insegnamento e i modi di porsi nella classe. Ribadiamo la necessità di una fine educazione degli insegnanti sul versante della conduzione delle discussioni matematiche, cosa che richiede un attento studio di episodi di classe e soprattutto una sistematica auto-analisi circa la propria pratica d'insegnamento.

Appendice

Situazione proposta in classe IV primaria

Nella Grande Barriera corallina la vita è molto intensa. Vi si incontra ogni tipo di animale: spugne, meduse, polipi, pesci multicolori. Nella parte più a est della barriera vive una famiglia numerosissima di stelle marine, ognuna delle quali si trova attaccata ad un corallo:

Quando c'è la luna nuova le stelle marine si spostano e cambiano corallo seguendo un'antichissima regola. Vediamo di scoprirla osservando come si spostano le stelle che stanno nelle prime posizioni: Alessia va al N° 3; Loretta va al N° 5; Angela va al N° 7; Patrizia va al N° 9 Elena va al N° 11

1) Sul corallo n° 78 si trova la stellina Valeria: che numero avrà il corallo sul quale si sposterà?

2) Quale sarà il numero del corallo sul quale si sposterà la stella che si trova al 459° posto?

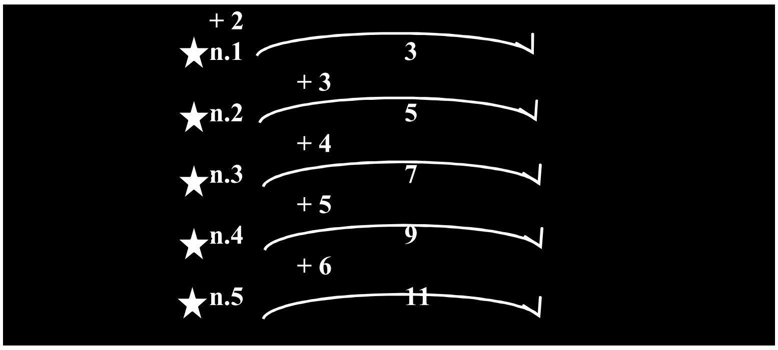
Argomenta le risposte.

Estratto della discussione

(Evidenziati, in corsivo e contrassegnati con numero progressivo gli interventi dell'insegnante)

Inizialmente alcuni bambini danno risposte numeriche casuali o non argomentate

1. *T. «vi ho chiesto di argomentare»*
Alex «Le stelle vanno: da 1 a 3, da 3 va al 5 e allora più 2, dal 5 al 7 più 2…»
Alessia: «Ho sommato tutte le stelle di quanto si spostano: 2, 3, 4, 5… perché dall'1 al 3 è +2, dal 2 al 5 è +3, poi va dal 3 al 7, +4 e poi dal 4 al 9 ed è +5, dal 5 a 11 +6 e sommando 2+3+4+5 si ottiene 15»
Beatrice «Io ho fatto così». (Va alla lavagna e con molta calma e altrettanta chiarezza descrive il suo ragionamento rappresentando i vari casi con frecce)



«la stella Alessia deve andare dal posto n. 1 al posto n. 3 e allora fa +2; Loretta deve andare dal n. 2 al n. 5 e allora fa +3; Angelica va dal n. 3 al n. 7 e fa +4; Patrizia va dal n. 4 al n. 9 ed è +5; Elena va dal n. 5 al n. 11 e fa +6; io ho fatto così ed allora secondo me è 78+79 che fa 157, perché ho aggiunto al numero dove si trovava la stella marina il numero che viene dopo»

2. *T «Bravissima! Cosa ne pensate? Uno di voi ha detto che Valeria arriva al n. 80, un altro al n. 93, un altro all' 84, uno al 157»*
Nicola «Non ho ben capito quella di Beatrice»

3. *T «Beatrice, devi proprio aiutare Nicola (rivolta alla classe), se non capite chiedete*»
Beatrice «Sì. La stella Alessia che si trovava al n. 1 si è spostata nel n. 3… » *(parte dalla prima stella e ripercorre la freccia orientata da 1 a 3, continua analogamente con le altre stelle indicandole mentre parla).*

4. *T «Cosa ha fatto di diverso Beatrice rispetto ai compagni che l'hanno preceduta?»*
Alcuni: «Ha rappresentato… ». Altri: «Ha schematizzato… »
(L'insegnante suggerisce a Beatrice di scrivere in rosso gli operatori sopra le frecce. Mentre colora, Beatrice spiega)
Beatrice «… poi la 2 per arrivare a 5 fa +3, dopo da 3 per arrivare a 7 ho aggiunto 4, dal 4 per arrivare a 9 ho aggiunto 5, da 5 per arrivare a 11 ho aggiunto 6»
Nicola «Deve mettere 6 perché è 5+1; deve mettere l'indirizzo della stella più 1. Deve sempre aggiungere il numero dell'indirizzo più 1 al numero dell'indirizzo»

5.*T «Bravo! Traducilo in linguaggio matematico»*
Nicola «+5+5+1»
Nicola, Beatrice e alcuni altri arricchiscono la lavagna di una seconda rappresentazione sagittale
Nicola, Beatrice e alcuni altri arricchiscono la lavagna con una nuova rappresentazione: ciascuna freccia della precedente rappresentazione è scomposta nel prodotto di due, la prima risulta un operatore dipendente dal numero di posto, la seconda freccia risulta l'operatore invariante '+1'.

6. *T «E allora se la stella parte da 78, cosa sarà?*
Beatrice: 78+78+1=157»

7. *T: (batte il cinque con Beatrice. Poi rivolta alla classe) : «Avete capito?»*
Giulio «Allora deve andare al 157… ho scritto solo il processo: 78+78+1»

8. *T «Si potrebbe scrivere la stessa cosa anche in modi diversi?»*
I contributi di Alex, Enrico, Nicola e Giulio portano a queste scritture. 78+78+1=157; 78+79=157; 78×2+1; 78+(78+1)

9. *T «Benissimo. C'è un'altra sfida per voi: la stellina Filippa è al posto n. 100; dove si sposta?»*
Alessia «100×2+1=201»

10. T «OK. La stella Maria è al n. 300; dove va?»
Alex «300+300 fa 600, più 1 è uguale a 601»
Beatrice «Oppure si può moltiplicare il suo valore per 2 e poi più 1»

11. T *«Siete stati bravissimi! Non siamo arrivati ancora alla generalizzazione, ma ci siamo vicini!»*

Qualche giorno dopo la stessa classe riprende l'attività. L'insegnante punta alla conquista della generalizzazione.

12. T «*Ritorniamo da dove eravamo partiti: che regola segue la stella Valeria per spostarsi*?»
Si riscrive alla lavagna: 78+78+1=157

13. T «*Qualcuno ha detto 78×2+1=157, vi ricordate? Adesso guardate: se una stellina parte dal numero 15 dove si trova quando arriva*?»
Molti «15×2+1!»

14. T «*Bene. E se parte da 103*?»
Coro «103×2+1!»
L'insegnante propone altri numeri di partenza: 598; 3654; 92045 e scrive una sotto l'altra le frasi degli alunni lasciando volutamente uno spazio tra il numero di casa e gli operatori che agiscono su di esso: 78 ×2+1; 15 ×2+1; 103 ×2+1; 598 ×2+1; 3674 ×2+1; 92045 ×2+1
La classe esplode in un coro «Per 2 più 1 resta lo stesso!!!
15. T «*Ottimo! Rimane costante '×2+1'. Adesso provate ad esprimere in lingua italiana la regola di questo spostamento. Dovete scrivere il Regolamento dei movimenti delle Stelle Marine. Immaginate che la stella Carlotta arrivi per la prima volta nella colonia. Quando c'è la luna nuova osserva che tutte le stelle marine si muovono e cambiano posizione, lei non ci capisce niente e chiede alla sua vicina cosa deve fare. Secondo voi quale aiuto può dare a Carlotta l'amica stella? Argomentate la risposta*»
Alessandro «Deve fare il numero della casa per 2 più 1»

16. T «*Come potreste dirlo in un altro modo*?»
Costanza «dal numero della casa devi andare avanti per 2 più 1»
Piero «Io direi: se tu sei nella casetta numero 50, devi spostarti nella… devi andare… ancora 50 casette in là e più un'altra»

17. T «*Intanto la stellina è morta di fame… sentite, bisogna dare dei nomi; come chiamiamo questi numeri*? *(i primi di ogni calcolo)*»
Costanza «Numero della casa»

18.T «*Tutti e due sono numeri di casa*»
Lucia «Numero del corallo»
Coro «Numero iniziale»

19.T «*Come si dice nelle gare*?»
Coro «Partenza! Arrivo!»
L'insegnante scrive a sinistra ed a destra rispettivamente della lista delle espressioni numeriche sulla lavagna: "numero del corallo di partenza; numero

del corallo di arrivo".

20 T «*Vi consiglio di cominciare dal numero che sta dopo l'uguale. Il numero del corallo di arrivo è uguale a…* »
Enrico «Al numero iniziale per 2 più 1»
Alessia «Il numero del corallo di arrivo è uguale al doppio del numero di partenza più 1»

21. T «*Possiamo anche togliere 'del corallo'. Dettatemela*»
Molti: Il numero di arrivo è uguale al doppio del numero di partenza più 1
L'insegnante scrive e rilegge la legge alla lavagna.

22. T «*Sapete come tradurre per Brioshi?* [15]»
Matteo «Per 2»
23.T «*Solo così? E secondo te Brioshi capisce*?»
Mattia «78... »

24.T «*Allora vale solo per 78*?»
Enrico «Vale per qualsiasi numero di partenza»

25.T «*L'idea è ottima, ma in matematica, dopo molti studi, è stato deciso di chiamare 'qualsiasi numero' con una sola lettera*»
Mattia «Io l'avevo detto!»

26 T «*Cosa mettiamo per numero di partenza*?»
Coro «p»

27. T «*E come numero di arrivo*?»
Coro «a»
Anna dà la formalizzazione della legge: «p×2+1=a»
Si scrive la relazione da inviare a Brioshi: p×2+1=a

Commento

Ad una prima lettura della discussione riportata, il comportamento dell'insegnante nella discussione appare buono. Ma egli in realtà non agisce al meglio. Dialoga con pochi, non promuove l'interazione e soprattutto non rilancia alla classe la validazione di quando alcuni propongono. Lascia cadere ragionamenti che offrono elementi di discussione e di con-

[15] Brioshi è uno studente giapponese virtuale che scambia messaggi in linguaggio matematico con altri ragazzi. La sua riconosciuta abilità in quest'area incoraggia gli allievi a verificare la correttezza delle espressioni matematiche che gli devono essere mandate.

fronto (es. quelli iniziali di Alex e di Alessia). Esprime giudizi attraverso espressioni o gesti enfatici (es. ‘bravissima’ in intervento 2 o il gesto di ‘battere in cinque’ con Beatrice nell’intervento 7). Orienta la classe verso la soluzione da lei attesa non appena appare, come si evince dal suo comportamento dopo l’intervento di Beatrice[16].

Trascura di valorizzare interventi chiave, di carattere generale, come quello di Nicola, che rende trasparente il legame tra numero di casa finale e quello iniziale di una stella. Ancora, non riesamina con la classe i ragionamenti fatti per condividerli, puntualizzarli e consolidarli, si limita invece ad un semplice ”avete capito”. Non si pone in modo riflessivo con gli allievi, per aiutarli ad andare oltre la visione procedurale indotta dalla rappresentazione sagittale, discutendo con loro di quale casa debba parlare il regolamento da redigere, in modo che questi possano comprendere che occorre esprimere il numero di casa di arrivo di una stella mediante quello di partenza. Lascia cadere l’opportunità offerta dall’intervento di Alex per chiarire che un regolamento non può essere un ‘comando’ ma deve essere una frase di senso compiuto, in modo da forzare la rappresentazione verbale della legge in termini generali; per cercare di risolvere questo problema pone una domanda poco mirata e vaga (intervento 16) che non contribuisce a guidare gli studenti in questo delicato passaggio che richiede lo scambio tra la variabile indipendente (numero di casa di partenza) a quella dipendente (numero di casa d’arrivo), passaggio molto difficile per gli allievi se non è mediato dall’insegnante.

Ancora, non porta gli allievi ad esplicitare cosa rappresentino i numeri di ingresso e di uscita nei vari casi, cosa che impedisce agli allievi di formulare verbalmente la legge dalla interpretazione delle scritture aritmetiche espresse, formulazione che viene di fatto da lei suggerita agli allievi (intervento 20). Non si pone in maniera costruttiva di fronte al problema di introdurre le lettere per rappresentare le quantità variabili ‘numero di casa’ in ingresso ed in uscita rispettivamente ma semplicemente ne suggerisce l’uso. Così, anche se nella classe si giunge alla rappresentazione algebrica della legge, in questa discussione non vi realizza con gli allievi una rappresentazione algebrica consapevole, di controllo pieno del significato di cui è portatrice.

Globalmente traspare nell’insegnante una maggiore tensione verso il

---

[16] Una azione adeguata sarebbe stata quella di rilanciare alla classe la validazione del ragionamento fatto da Beatrice, o quanto meno quella di chiedere a quest’ultima di spiegare meglio ai compagni perché secondo lei a 78 andava aggiunto 79, indirizzando l’attenzione della classe e forzando in lei l’esplicitazione del fatto che il numero da aggiungere per arrivare alla nuova casa di una stella è il successivo del numero della sua casa iniziale, cosa funzionale all’individuazione della relazione in studio, tra i numeri delle case iniziale e finale di una stella.

raggiungimento del suo obiettivo in tempi rapidi che non a dare spazio e coordinare le voci degli allievi nella discussione, tensione che lo porta ad assumere un atteggiamento procedurale e poco attento ai significati delle singole azioni.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994), Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), pp. 24-35.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G. (1993), Cognitive Processes in Algebraic Thinking: Towards a Theoretical Framework?, in J. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu e F.L. Lin (a cura di), *Proceedings of 17th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Tokio (Japan), vol.1, pp. 138-145.

Bell, A., Malone, J., Taylor, P. (1987), *Algebra: An Exploratory Teaching Experiment*, Curtin University, Perth and Shell Centre, Nottingham.

Bell, A. (1996), Problem solving approaches to algebra: two aspects, in N. Bednarz et Al. (a cura di), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp.167-187.

Chevallard, Y. (1989), Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, deuxeme partie: perspectives curriculaires: la notion de modelization, *Petit X*, 19, pp. 43-72.

Chevallard, Y. (1990), Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, troisieme partie: voies d'attaque et problemes didactiques, *Petit X*, 23, pp. 5-38.

Cusi, A., Malara, N.A. (2008), Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante,* 14 (1), pp. 57-80.

Cusi, A., Malara, N.A. (2009), The role of the teacher in developing proof activities by means of algebraic language, in M. Tzekaki et Al. (a cura di), *proc. PME 33*, Thessaloniki, vol. 2, pp. 361-368.

Cusi, A., Malara, N.A. (2011), Analysis of the teacher's role in an approach to algebra as a tool for thinking: problems pointed out during laboratorial activities with perspective teachers, in M.Pytlak e E. Swoboda (a cura di), *CERME 7 proceedings*, Rzezsow: University of Rzezsow, pp. 2619-2629.

Cusi, A., Malara, N.A. (2012), Educational processes to promote, among teachers and in the classes, a linguistic approach to algebra: behaviours, difficulties and awareness emerged in teachers, in L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier e A. Robert (a cura di), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 299-319.

Cusi, A., Malara, N.A., Navarra, G. (2011), Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, 24, pp. 483-510.

Harper, E. (a cura di) (1987-88), *NMP Mathematics for Secondary School*, Essex, UK: Longman.

Kieran, K. (1989), The Early Learning of Algebra: a Sctructurale Perspective, in S. Wagner e K. Kieran (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Reston Virginia: LEA,, pp. 33-56.

Kieran, K. (1992), The Learning and Teaching of School Algebra, in D.A. Grouws (a cura di), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, pp. 390-419.

Jaworski, B. (1998), Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 3-31.

Jaworski, B. (2003), Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships, *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 249-282.

Jaworski, B. (2006), Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, pp.187-211

Lerman, S. (2001), A review of research perspectives on mathematics teacher education, in T. J. Cooney e F. L. Lin (a cura di), *Making sense of mathematics teacher education*, Dordrecht: Kluwer, pp.33-52.

Linchevski, L. (1995), Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra, *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, pp.113-120.

Malara, N.A. (2003), Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project, in N.A. Pateman, B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (a cura di), *Proceedings of PME 27*, Honululu, USA, vol.1, pp.33-48.

Malara, N.A. (2007), Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti, XVIII Convegno Nazionale della Unione Matematica Italiana, *Notiziario UMI*, 35 (1.2), inserto speciale.

Malara, N.A. (2012), Il caso dell'algebra. Consolidamenti nella ricerca e mutamenti di prospettiva nell'insegnamento, in F. Arzarello (a cura di), *Insegnare matematica, oggi. Ricerca didattica, rilevamento degli apprendimenti, pratiche di classe. Dossier Insegnare*, pp. 52-61.

Malara, N.A., Navarra, G. (2001), "Brioshi" and other mediation tools employed in a teaching of arithmetic with the aim of approaching algebra as a language, in H.Chick, K.Stacey, Jl. Vincent e Jn Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', Melbourne: University of Melbourne, vol. 2, pp.412-419.

Malara, N.A., Navarra, G. (2003), *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Favouring Pre-Algebraic Thinking*, Bologna: Pitagora.

Malara, N.A., Navarra, G. (2009), Approaching the distributive law with young pupils, *PNA Revista de Investigacíon en Didáctica de la Matematica*, 2009, 3 (2), pp. 73-85.

Malara, N.A., Navarra, G. (2011), Multicommented transcripts methodology as an educational tool for teachers involved in early algebra, in M. Pytlak e E. Swoboda (a cura di), *CERME 7 proceedings*, Polonia: Università di Rzezsow, pp. 2737-45.

Malara, N.A., Zan, R. (2002), The Problematic Relationship between Theory and Practice, in L. English (a cura di), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ: LEA pp. 553-580.

Mason, J. (1998), Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 243-267.

Mason, J. (2002), *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.

Mason, J. (2008), Being Mathematical with and in front of learners, in B. Jaworski e T.Wood (a cura di), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, Sense Publishers, pp. 31-55.

Shoenfeld, A. (1998), Toward a theory of teaching in context, *Issues in Education*, 4 (1), pp. 1-94.

Un costrutto teorico per guidare il docente nell'attività di riflessione a posteriori sulla propria pratica: analisi di un'esperienza di tirocinio

Annalisa Cusi(*)

1. Introduzione: il nostro approccio alla didattica dell'algebra

In questo articolo, che mira ad evidenziare le ricadute nella formazione insegnanti di una ricerca condotta con il prioritario obiettivo di favorire l'innovazione nelle classi, presenteremo un esempio del lavoro condotto con alcuni tirocinanti SSIS con l'obiettivo di fornire loro un efficace modello per la riflessione a posteriori sulle attività condotte durante il tirocinio. Tale modello si basa sull'uso di un costrutto teorico, frutto di precedenti ricerche (Cusi-Malara, 2009), elaborato per caratterizzare i diversi ruoli svolti da un docente che sa porsi come 'Modello di Comportamenti e Atteggiamenti Consapevoli ed Efficaci' (d'ora in poi ci serviremo dell'acronimo M-CA_{CE}), stimolando nei suoi allievi lo sviluppo di competenze e consapevolezze chiave nell'attivazione di processi di pensiero via linguaggio algebrico. Prima di presentare la nostra metodologia di lavoro con i futuri insegnanti ed un esempio di analisi di un'attività di tirocinio, inquadriamo le nostre ricerche soffermandoci sul nostro framework di approccio alla didattica dell'algebra. Alla presentazione del costrutto M-CA_{CE} sarà invece dedicato il prossimo paragrafo.

La ricerca che abbiamo condotto si situa nell'ampio quadro di studi di innovazione sulla didattica dell'algebra sviluppati a partire dagli anni '90 dal gruppo di ricerca coordinato da N.A. Malara (Malara, 1999) che hanno portato alla costituzione del progetto ArAl (Malara-Navarra, 2003). Tale è progetto finalizzato ad un approccio anticipato all'algebra, in un ottica di continuità tra i vari livelli scolari (scuola primaria, scuola secondaria inferiore, scuola secondaria superiore), e si pone anche come sistema integrato di formazione degli insegnanti (Malara, 2004, 2007).

(*) Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia – GREM (annalisa.cusi@unimo.it).

La nostra ricerca ha avuto sin dall'inizio il prioritario obiettivo di promuovere nella scuola attività mirate a favorire negli studenti lo sviluppo di quello che Arcavi (1994) definisce symbol sense, una più profonda visione dell'algebra associata a particolari attitudini, quali l'abilità di vedere i simboli come strumenti portatori di significato e la capacità di saper apprezzare l'eleganza, la concisione ed il potere dei simboli come strumenti per rappresentare e provare relazioni. In linea con le idee di Bell (1996), che sostiene l'importanza di stimolare gli allievi ad un uso del linguaggio algebrico come strumento per rappresentare ed esplorare relazioni, e di Wheeler (1996), che sottolinea la necessità di favorire, da parte loro, lo sviluppo della consapevolezza che il linguaggio algebrico possa rappresentare un importante strumento per la scoperta e talvolta anche la creazione di nuovi oggetti, abbiamo scelto di focalizzare l'attenzione su attività mirate a 'far toccare con mano' agli studenti la potenza del linguaggio algebrico: quelle di approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico. Tali attività si situano tra le global/meta-level activities che, secondo Kieran (2004), consentono agli allievi sia di cogliere come l'algebra possa rappresentare un fondamentale strumento nella risoluzione di problemi, sia di sviluppare in maniera naturale abilità manipolative, visto che il significato guida le manipolazioni che essi si trovano ad operare (Brown, 2004).

Per realizzare questi obiettivi abbiamo progettato ed implementato, in classi del biennio della scuola secondaria superiore, un percorso di introduzione alla dimostrazione in ambito aritmetico, che si sviluppa sul lungo termine e che parte da semplici attività di modellizzazione ed interpretazione per arrivare a proporre agli allievi attività di formulazione di congetture e costruzione di dimostrazioni. Il percorso si sviluppa attraverso 6 principali fasi, caratterizzate dalle seguenti attività: (1) Traduzioni da linguaggio verbale a linguaggio algebrico e viceversa; (2) Studio delle relazioni che intercorrono tra proprietà di una data espressione algebrica e proprietà delle variabili in essa contenute; (3) Analisi della veridicità/falsità di enunciati in ambito aritmetico e giustificazione delle risposte fornite; (4) Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e relative dimostrazioni; (5) Analisi di strategie dimostrative; (6) Costruzione delle dimostrazioni di teoremi assegnati. Le diverse attività del percorso vengono proposte alle classi attraverso momenti di lavoro individuale, momenti di lavoro a piccoli gruppi e discussioni collettive, coordinate dai docenti, sui risultati di tali attività.

2. Il costrutto M-CA$_{CE}$ per l'analisi del ruolo dell'insegnante

Uno dei principali risultati del lavoro di ricerca presentato nel precedente paragrafo è il costrutto teorico M-CA$_{CE}$, da noi elaborato con l'obiettivo di analizzare le azioni dell'insegnante durante le attività di classe, caratterizzando in particolare i ruoli chiave che un docente dovrebbe svolgere con l'obiettivo di favorire, da parte degli allievi, lo sviluppo delle competenze che intervengono in un approccio efficace alla costruzione di ragionamenti via linguaggio algebrico.

Il quadro teorico all'interno del quale il costrutto si è delineato è costituito da due terne di componenti. La prima terna si riferisce alle componenti teoriche da noi individuate per l'analisi dello sviluppo di processi di pensiero via linguaggio algebrico: (a) il modello di didattica dell'algebra come strumento di pensiero proposto da Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001), che, in particolare, hanno messo in luce come l'attivazione di frames concettuali ed il passaggio da un frame ad un altro costituiscano un elemento essenziale per una corretta interpretazione delle scritture algebriche via, via prodotte; (b) il concetto di pensiero anticipatorio introdotto da Boero (2001) e da lui presentato come un elemento chiave nella produzione di pensiero attraverso processi di trasformazione; (c) l'analisi teorica proposta da Duval (2006), che ha individuato nel coordinamento tra diversi registri di rappresentazione un aspetto chiave nell'apprendimento in matematica. La seconda terna di componenti teoriche si riferisce al quadro all'interno del quale ci collochiamo per l'analisi dei processi di insegnamento-apprendimento e del ruolo del docente. La prima di queste componenti è Vygotskiana: ci ispiriamo, in particolare, all'idea di Vygotsky (1978) circa l'importanza di un'istruzione mirata ad estendere la zona di sviluppo prossimale dell'allievo in modo da stimolarlo ad attivare processi interni di apprendimento, operati attraverso l'interazione con l'adulto o con compagni più bravi (anche attraverso processi di imitazione), che si concretizzano nel raggiungimento di un più elevato livello di sviluppo. La seconda componente trae ispirazione dal lavoro di Leont'ev (1977), che ha messo in luce le interrelazioni tra attività che si realizzano in un contesto sociale e sviluppo del senso dell'apprendimento che tali attività hanno l'obiettivo di promuovere, suggerendo di non tralasciare l'obiettivo fondamentale di favorire la realizzazione di una effettiva consapevolezza, da parte degli allievi, del senso delle azioni che vengono realizzate in classe. La terza componente, che a nostro parere costituisce un idoneo riferimento nello studio (di progettazione-attuazione ed analisi) dei processi di insegnamento-apprendimento finalizzati a favorire un uso efficace del linguaggio algebrico come strumento di pensiero, è il paradigma del *cognitive apprenticeship*. Tale idea è stata introdotta da Collins, Brown e Newman (1989), i quali propongono un modello di istruzione che si rifà all'idea di apprendistato ed incorpora contemporaneamente elementi dell'istruzione tradizionale. Tale modello si pone l'obiettivo di rendere il pensiero visibile, attraverso metodi di insegnamento, che, secondo gli autori, andrebbero progettati per dare agli studenti l'opportunità di osservare, scoprire o inventare le strategie degli esperti nel contesto stesso in cui vengono attivate. Alcuni metodi sono mirati ad aiutare gli studenti ad acquisire solide abilità attraverso processi di osservazione e pratica guidata: il *modeling* (che richiede che un esperto esegua un compito esternalizzando i processi e le attività interne in modo che gli studenti possano osservarlo e costruire così un modello concettuale dei processi richiesti per portare a termine quel compito); il *coaching* (che consiste nell'osservazione, da parte dell'esperto, degli studenti mentre conducono un'attività, per fornire loro stimoli, supporti, feedback); lo *scaffolding* (che si riferisce sia ai supporti che l'insegnante fornisce per aiutare lo studente a portare un'attività a compimento, sia alla rimozione graduale degli stessi, indicata come *fading*, in modo che gli allievi possano arrivare a completare autonomamente il compito). Un secondo gruppo di methods è costituito da quelle metodologie progettate con l'obiettivo di aiutare gli studenti a focalizzare le loro osservazioni sugli approcci esperti al problem-solving e ad imparare a controllare in maniera consapevole le proprie strategie: l'*articulation* (il saper condurre gli studenti ad articolare le loro conoscenze, i loro modi di ragionare ed i loro processi di problem solving); la *reflection* (il mettere a confronto i processi di problem-solving attivati dagli studenti con quelli di un esperto o di un altro studente fino ad arrivare a confrontarli con un modello cognitivo interno della pratica esperta).

Questo quadro ci ha consentito di dare fondamento alla nostra ipotesi che i processi chiave nella produzione di pensiero via linguaggio algebrico, che si attivano in modo automatico per un esperto, devono essere esplicitati e resi visibili al novizio in modo che quest'ultimo possa focalizzare la propria attenzione non soltanto sugli aspetti sintattici, ma anche su strategie adottate e riflessioni meta sulle azioni, appropriandosi delle prime e sviluppando, grazie alle seconde, una reale consapevolezza del senso delle attività svolte. E' in quest'ottica che abbiamo elaborato il costrutto teorico di M-CA_{CE}, delineando i caratteri essenziali dell'approccio adottato da un docente che sa porsi, durante le attività di classe, in modo da «rendere il pensiero visibile», favorendo, da parte dei suoi studenti, attraverso un processo di cognitive apprenticeship, l'acquisizione di quegli atteggiamenti e quei comportamenti che consente loro la progressiva costruzione delle competenze e delle consapevolezze necessarie per poter affrontare, in maniera efficace, le attività di costruzione di ragionamento via linguaggio algebrico. Un docente che adotta questa tipologia di approccio: (a) si pone come «soggetto che indaga», stimolando un atteggiamento di ricerca nei confronti del problema in esame, e come elemento costituente del gruppo classe nel lavoro di ricerca che viene attivato; (b) si pone come guida operativa/strategica, mediante un atteggiamento di condivisione (anziché di trasmissione) delle strategie adottate e delle conoscenze da attivare localmente; (c) cerca di stimolare e provocare la costruzione delle competenze chiave nella produzione di pensiero via linguaggio algebrico (saper generalizzare, tradurre, anticipare, manipolare, interpretare), ponendosi come «attivatore di processi interpretativi» ed «attivatore di pensieri anticipatori»; (d) si pone come guida al controllo dei significati delle scritture a cui si perviene, sia sul piano sintattico che semantico, con l'obiettivo di realizzare un armonico equilibrio tra i due aspetti; (e) si pone come guida riflessiva nell'individuazione di modelli operativi/strategici efficaci durante le attività di classe (suo compito è anche quello di esplicitare e stimolare riflessioni sugli approcci efficaci adottati dagli studenti della classe affinché questi approcci vengano individuati come modelli ai quali ispirarsi); (f) si pone, con l'obiettivo di stimolare e provocare atteggiamenti di tipo meta, come «attivatore di atteggiamenti riflessivi» ed «attivatore di atti metacognitivi», con particolare riferimento al controllo del senso globale dei processi.

3. Il nostro lavoro con insegnanti in formazione

Quanto messo in luce nel precedente paragrafo mette in evidenza che, affinché un docente sappia porsi come M-CA_{CE}, egli deve essere pienamente consapevole del senso del processo che gli è richiesto di attuare e di controllare nel suo sviluppo. L'analisi delle sperimentazioni da noi condotte ha però messo in evidenza come docenti che avevano condiviso con noi sia la progettazione del percorso didattico, sia la pianificazione della metodologia da adottare, non siano riusciti a svolgere, durante l'azione di classe, i ruoli caratterizzanti un docente che si pone come M-CA_{CE}. Per cercare di individuare le motivazioni alla base delle difficoltà incontrate da alcuni docenti è necessario porsi nel quadro elaborato da Mason (1998), che presenta l'insegnamento come «educazione alla consapevolezza». L'autore distingue tre diversi livelli di consapevolezza: (1)

awareness-in-action, che viene definita come «il potere di costruire ed agire sul piano materiale»; (2) awareness-in-discipline, che è descritta come una forma di «spostamento dell'attenzione» che si realizza attraverso l'esplicitazione della propria awareness-in-action; (3) awareness-in-counsel, che rappresenta l'auto-consapevolezza richiesta agli educatori affinché essi possano essere realmente sensibili a ciò di cui chi apprende ha bisogno affinché quest'ultimo possa costruire una propria awareness-in-action ed in-discipline.

Mason (2008) si serve del framework sui tre livelli di consapevolezza anche per descrivere le dinamiche sottese ai processi di sviluppo professionale dei docenti. Pianificare efficaci percorsi per la formazione degli insegnanti richiede di indirizzare l'attenzione dei docenti verso costrutti, teorie e pratiche che possano guidare efficacemente le loro future scelte. Condurre un insegnante attraverso un processo di formazione che possa renderlo un «buon insegnante» (Mason, 1998) richiede di fargli acquisire consapevolezze non solo sulle differenti modalità di interventi che si possono attivare in classe, ma anche sulle «sensibilità sottili» che guidano la sua azione, consentendogli di scegliere le modalità di intervento che possono rivelarsi più efficaci.

Una strada da percorrere per favorire lo sviluppo di queste consapevolezze è quella di attuare nella formazione insegnanti processi di riflessione critica, più volte indicati dalla ricerca come attività essenziali per consentire la costruzione, da parte dei docenti, di una adeguata professionalità. Mason (2002) sostiene che un insegnante che voglia imparare ad agire in modo diverso in classe, come ogni altro professionista, deve cercare di sviluppare una conoscenza attiva, pratica, che permette di reagire a stimoli in modo creativo anziché attraverso comportamenti 'meccanici', ovvero di saper agire al momento. La discipline of noticing (Mason, 2002) fa sì che il docente sia sensibilizzato ad individuare situazioni nelle quali è possibile realizzare azioni alternative per poi modificare le proprie pratiche scegliendo consapevolmente di agire in modo differente in altre simili situazioni. La valenza della riflessione critica degli insegnanti sulla pratica e soprattutto delle pratiche di condivisione di tali riflessioni tra insegnanti ed ancor più tra ricercatori ed insegnanti è sottolineata anche da Jaworski (1998, 2003, 2004, 2006), che sostiene l'importanza di adottare un approccio di inquiry (2004) allo studio dei processi di insegnamento per favorire lo sviluppo della ricerca come vero e proprio modo di essere, specialmente se praticato all'interno di una comunità nella quale i diversi membri collaborano, in quanto learners, per lo sviluppo della propria pratica.

Il modello da noi attuato per la formazione degli insegnanti è in sintonia con queste posizioni. La nostra ipotesi è infatti che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe di tipo socio-costruttivo, attuato sia individualmente che all'interno di gruppi di ricerca, sia condizione necessaria perché l'insegnante acquisisca consapevolezza del nuovo ruolo che deve svolgere nella classe, delle dinamiche che si sviluppano nella costruzione matematica collettiva e delle variabili che intervengono (Malara, 2003). Per realizzare questi obiettivi, coinvolgiamo gli insegnanti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su di essi, attraverso la metodologia delle 'Trascrizioni multicommentate' (per approfondimenti rimandiamo a Cusi-Malara-Navarra, 2011).

In questo lavoro mostreremo come queste idee siano state da noi applicate anche nell'ambito del lavoro condotto con insegnanti in formazione durante il periodo in cui erano attive le Scuole di Specializzazione per l'insegnamento secondario, mettendo in evidenza come l'approccio adottato possa ben prestarsi per le attività di Tirocinio Formativo Attivo.

In linea con le idee proposte da Mason, riteniamo che perseguire l'obiettivo di provocare nei docenti degli 'spostamenti di attenzione' che favoriscano lo sviluppo di quelle consapevolezze che determinano o meno una efficace azione di classe richieda di guidarli in attività di riflessione sulla propria pratica attraverso processi di scaffolding e di graduale fading, fornendo loro inizialmente stimoli costanti e proponendo successivamente stimoli meno diretti e meta-domande mirati a favorire la loro internalizzazione degli stimoli ricevuti in modo da potersi servire degli stessi per analizzare autonomamente la propria pratica. La nostra ipotesi è che tali stimoli possano essere forniti se le attività di riflessione sui processi di classe vengono attuate in riferimento a specifici indicatori per l'osservazione, che consentano di analizzare ed interpretare le azioni di classe attraverso precise lenti teoriche.

Per questo motivo i nostri più recenti interventi di formazione insegnanti sono così articolati: (1) momenti di studio di risultati di ricerca in educazione matematica utili alla pratica, mirati a fornire ai docenti strumenti teorici e metodologici per imparare ad interpretare mediante nuove lenti le loro azioni in classe; (2) attività di analisi di estratti di discussioni di classe, tratti da precedenti sperimentazioni da noi condotte, mirati a mettere in luce come l'uso dei costrutti teorici precedentemente introdotti consente di evidenziare aspetti di problematicità o efficacia correlati alle azioni dell'insegnante; (3) momenti di progettazione di attività da proporre nelle classi e di pianificazione della metodologia di lavoro sulla base dei costrutti teorici introdotti; e (4) fase di analisi delle attività condotte nelle classi proponendo riflessioni prodotte da una osservazione dei processi sotto le lenti teoriche fornite.

La metodologia adottata per la progettazione e l'analisi degli interventi di tirocinio durante i corsi SSIS ricalca quella appena presentata. Per motivi di spazio, ci limitiamo a presentare un esempio di una attività, relativa alla quarta fase di lavoro, condotta con una tirocinante che ha proposto in una classe alcune attività del percorso didattico di introduzione alla dimostrazione in ambito aritmetico delineato nel paragrafo 2.

4. Analisi di una attività di tirocinio: il lavoro del mentore come guida nel processo di modellizzazione della riflessione

L'attività che presentiamo in questo paragrafo si riferisce alla fase centrale del percorso didattico di introduzione alla dimostrazione via linguaggio algebrico: quella di formulazione di congetture e costruzione delle relative dimostrazioni. Assieme alle altre attività del percorso, è stata proposta ad una classe seconda liceo classico (seconda ginnasio) da una tirocinante SSIS per la classe A049. La tirocinante (d'ora in poi sarà indicata con S) ha affrontato lo studio e la progettazione del percorso con grande entusiasmo, cogliendo la necessità di attivare una metodologia di lavoro in linea con quella da noi suggerita e svolgendo efficacemente l'azione nelle classi, riuscendo spesso a porsi come M-CA_{CE}. S ha però mostrato, nell'ultima fase di lavoro, difficoltà nel servirsi delle lenti teoriche da noi fornite per riflettere sulla propria pratica. Le era stato, in particolare, richiesto di analizzare le discussioni di classe da lei condotte evidenziando: i momenti nei quali era riuscita ad assumere il ruolo di docente che si pone come M-CA_{CE}; i momenti in cui il suo approccio si discosta da quello caratterizzante un docente che si pone come M-CA_{CE}; gli effetti (positivi e/o negativi) di questo lavoro sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante le discussioni collettive.

La nostra ipotesi è che le difficoltà manifestate da S nel servirsi del costrutto teorico M-CA_{CE} per oggettivare i processi attivati siano ascrivibili al gap che intercorre tra un'esperienza di studio teorico ed osservazione di altri ad un'esperienza di osservazione di sé. Di fronte alla richiesta, da parte di S, di aiutarla a superare queste difficoltà, abbiamo deciso di far precedere, alla fase di analisi autonoma della propria pratica, una fase di confronto dialogico con il mentore, mirata, in sintonia con il quadro prima delineato, ad attivare un processo di scaffolding per fornire ad

S gli stimoli necessari per imparare ad esplicitare ed oggettivare efficacemente i momenti salienti dei processi di classe. Le riflessioni su alcune significative discussioni di classe sono state perciò condotte assieme al mentore con l'obiettivo costante di favorire, da parte di S, lo sviluppo di una reale consapevolezza della propria azione, attraverso una sua oggettivazione mediante l'uso del costrutto teorico M-CA_{CE}.

Di seguito presentiamo un esempio del lavoro che il mentore ha condotto con l'obiettivo di stimolare il processo di 'modellizzazione della riflessione'.

La discussione oggetto dell'analisi del mentore è stata condotta in riferimento al seguente problema:

> Prendi un numero di 3 cifre con cifre consecutive strettamente decrescenti (esempio: 543); considera il numero che si ottiene da questo invertendo le cifre (es: 345); considera la differenza tra questi due numeri. Considera altri esempi. Che regolarità osservi? Prova a dimostrare quanto affermi.

Affrontare efficacemente la costruzione della dimostrazione della congettura da formulare ('la differenza risulta sempre 198') richiede di: (1) saper attivare e coordinare i frame notazione polinomiale e 'successivo di un numero' per costruire la rappresentazione del numero iniziale $(100(x+2)+10(x+1)+x)$, cogliendo la necessità di introdurre una sola variabile per esplicitare il legame tra le tre cifre del numero di partenza ed introducendo le corrette limitazione alla variabile ($0 \leq x \leq 7$); (2) saper coordinare i frame notazione polinomiale e posizionale per costruire il numero che si ottiene invertendo le cifre di quello di partenza $(100x+10(x+1)+x+2)$; (3) saper operare corrette trasformazioni sintattiche sulla differenza così costruita attivando il corretto pensiero anticipatorio relativo all'obiettivo di tali manipolazioni:

$$100(x+2)+10(x+1)+x-(100x+10(x+1)+x+2) = 2 \cdot 100 - 2 = 198$$

Nella tabella qui sotto riportata la colonna di sinistra contiene gli interventi della tirocinante S e di alcuni studenti (indicati con diverse lettere dell'alfabeto), quella di destra riporta i commenti del mentore (numerati), fatti in modo da evidenziare gli elementi di aderenza/contrapposizione con i caratteri del costrutto M-CA_{CE}.

Trascrizione di una discussione di classe	**Commenti del mentore**
Fase 1: la classe si confronta sulla regolarità individuata	
(1) S: Ragazzi, che regolarità avete osservato? (2) A: 98 (3) Coro: NO! 198! (4) A: Aspettate: *543-345* ... sì, 198, scusate! (5) S: Bene, tutti i gruppi sono arrivati a trovare che qualsiasi numero consideriamo in partenza, si ottiene sempre 198? (6) Coro: Sì! (7) I: Noi abbiamo fatto anche la dimostrazione!	(1) *Qui S avrebbe potuto chiedere 'cosa intendete per 198?' per far loro formulare meglio la congettura prodotta. Infatti 198 non è la risposta corretta alla domanda 'che regolarità avete osservato?'*
Fase 2: Analisi della prima proposta dimostrativa	
(8) S: Bene! Adesso mi dettate quello che avete fatto? Ricordiamo: vogliamo dimostrare che preso un numero di 3 cifre consecutive decrescenti se a questo sottraiamo il numero ottenuto invertendo le cifre il risultato è 198. (9) I: Si: Noi abbiamo messo …	
S scrive sulla lavagna ciò che detta l'alunno I $100x+10y+z-(100z+10y+x)=$	
(10) S: Quindi per questo gruppo $100x+10y+z$ è il numero di 3 cifre iniziale, poi avete sottratto il numero ottenuto invertendo le cifre …	(2) *S interpreta, nel frame 'notazione polinomiale', in coordinamento con il frame 'notazione posizionale', la scrittura che il gruppo di I ha prodotto per esplicitare al resto della classe l'approccio da loro attivato. In questo modo si pone come guida operativa strategica nel favorire la condivisione delle strategie adottate e delle conoscenze da attivare localmente.*

<table>
<tr><td>(11) I: Sì, come avevamo fatto stamattina[17] per i numeri a due cifre. Poi abbiamo tolto la parentesi e abbiamo scritto:
$=100x+10y+z-100z-10y-x$

(12) S: poi dove siete arrivati?
(13) I: Poi abbiamo fatto i calcoli e abbiamo ottenuto: $99x-99z=99(x-z)$</td><td>(3) L'allievo I mostra di aver intuito il collegamento con l'attività del mattino: è importante che sia riuscito a riconoscere la necessità di attivare gli stessi frame concettuali.</td></tr>
<tr><td colspan="2">S inserisce alla lavagna l'approccio suggerito dal gruppo di I ed indicato come proposta (a):
$a)\ 100x+10y+z-(100z+10x+y)=$
$=100x+10y+z-100z-10x-y=$
$=99x-99z=$
$=99(x-z)$</td></tr>
<tr><td>(14) S: Poi cosa avete fatto?
(15) I: Poi era finito il tempo...
(16) S: Bene, questa è una strada. Qualche altro gruppo è arrivato alla stessa conclusione, o ha provato una dimostrazione partendo da un'altra strada?</td><td>(4) Qui S avrebbe potuto chiedere al resto della classe se il risultato ottenuto era in sintonia con la congettura prodotta. Durante l'analisi di questa discussione, infatti, un dubbio nasce spontaneo: il gruppo di I è realmente consapevole di cosa significhi dimostrare una congettura? Ha operato cioè seguendo un obiettivo o per imitazione di quanto fatto durante il mattino?
(5) In questo senso non svolge al meglio il ruolo di guida al controllo dei significati delle scritture cui via, via si perviene.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 3: Analisi della seconda proposta dimostrativa</td></tr>
<tr><td colspan="2">(17) D: Noi abbiamo fatto in un modo diverso
S scrive sulla lavagna ciò che detta l'alunno D
$100(k+2)+10(k+1)+k$</td></tr>
</table>

[17] Durante la mattinata la classe aveva affrontato, in una discussione collettiva coordinata da S, il seguente problema: «Scrivi un numero naturale di due cifre ed il numero che ottieni da questo invertendo le cifre. Calcola la differenza tra il maggiore ed il minore. Ripeti il procedimento a partire da altri numeri di due cifre. Che regolarità puoi osservare? Sapresti dimostrare quanto affermi?».

(18) D: Dove questo qua rappresenta il numero di 3 cifre decrescenti. (19) **S**: Puoi spiegarci perché? (20) D: Il $100(k+2)$ sono le centinaia, che sono quelle con la cifra più grande: $k+2$, che deve essere il numero decrescente più grande. Abbiamo messo $k+2$ perché abbiamo iniziato con la cifra più piccola nelle unità, che abbiamo indicato con k.	(6) *Difficoltà espressive da parte di D – basti pensare al termine 'numero decrescente'! - ma l'allievo ha saputo cogliere la necessità di attivare anche il frame 'successivo di un numero' per costruire, a partire dalla cifra delle unità k, quelle delle decine e delle centinaia in modo da esplicitare la relazione tra le tre cifre.* (7) *S stimola efficacemente l'esplicitazione, da parte dell'allievo dei significati sottesi all'espressione costruita.*
(21) S: Esatto, come dice D, le centinaia sono quelle che hanno la cifra maggiore tra le tre, ed inoltre nella rappresentazione $(k+2)$, $(k+1)$, k compare la decrescenza a passi di uno tra le cifre. Mi chiedo: perché avete scelto questa rappresentazione, anziché usare k, $(k-1)$, $(k-2)$?	(8) *S esplicita al resto della classe quanto D ha cercato di spiegare: questo è in sintonia con le tipiche azioni di un docente che si pone come guida riflessiva nell'aiutare i suoi allievi a riconoscere modelli operativi-strategici efficaci nella classe.* (9) *Corretta è anche la scelta di S di far esplicitare a D le motivazioni alla base della conversione prodotta nel rappresentare tre cifre disposte in ordine decrescente.*
(22) D: Eh, perché altrimenti non sarebbe venuto naturale. Se $k=0$, non vengono cifre positive. (23) S: Esatto, con la rappresentazione che ti ho proposto avremmo dovuto specificare $k \geq 2$.	(10) *Qui forse era il caso comunque di far precisare all'allievo l'insieme di variabilità di k, che è una cifra. Anche nel caso precedente S non ha fatto fare questa osservazione.*
(24) D: Quindi, se questo che ho dettato rappresenta il primo numero di tre cifre, dobbiamo fare la sottrazione con il secondo numero che è quello che otteniamo invertendo le cifre quindi	(11) *Anche D mostra di aver ben interiorizzato la rappresentazione polinomiale dei numeri e di saper coordinare i frame notazione polinomiale e posizionale per rappresentare il numero che si ottiene invertendo le cifre.*
S scrive sulla lavagna ciò che detta l'alunno: $100(k+2)+10(k+1)+k-100k-10(k+1)-(k+2)$	

<table>
<tr>
<td>(25) D: Dove quella che prima era la cifra delle unità è diventata quella delle centinaia, il $(k+1)$ rimane alle decine, e il $(k+2)$ è rimasto per le unità.
(26) C: Anche noi abbiamo fatto così.
(27) E: uguale!
(28) F: Noi abbiamo fatto come il gruppo di prima, solo che abbiamo messo $100z+10y+x$.
(29) A: noi non siamo arrivati fino a quel punto lì, abbiamo solo visto che viene sempre 198.
(30) S: Quindi rimaniamo con queste due proposte. Nella prima abbiamo messo in evidenza un 99 ... adesso propongo a D di raccontarci i passaggi successivi, in modo da iniziare a sviluppare anche la seconda proposta.
(31) D: Dobbiamo fare i conti …</td>
<td>(12) Anche in questa discussione un allievo, D, comincia a fare interventi ‘simili a quelli dell’insegnante’, mirati cioè ad esplicitare al resto della classe il senso dell’espressione che ha costruito. Questo testimonia il fatto che S sia riuscita a svolgere bene il ruolo di attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">T scrive sulla lavagna ciò che detta l’alunno, indicandola come proposta (b):
$b)\ 100(k+2)+10(k+1)+k-100k-10(k+1)-(k+2)=$
$=100k-200+10k+10-100k-10k-10-k-2=$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">(32) E: I $10k$ vanno via.
(33) G: anche i $100k$
(34) A: I k vanno tutti via.
(35) E: anche il 10 e il -10 vanno via. Per cui ci rimane …</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">S scrive sulla lavagna ciò che rimane al termine delle semplificazioni, per cui la proposta (b) risulta la seguente:
$b)\ 100(k+2)+10(k+1)+k-100k-10(k+1)-(k+2)=$
$=100k-200+10k+10-100k-10k-10-k-2=$
$=200-2=$
$=198$</td>
</tr>
<tr>
<td>(36) S: Quindi direi che in questo modo la congettura che avete fatto, cioè che, dato un numero di 3 cifre decrescenti, se ad esso si toglie il</td>
<td>(13) Sarebbe stato meglio stimolare la classe in modo che gli allievi stessi potessero arrivare a questa conclusione.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>numero che si ottiene invertendo le cifre il risultato è 198, è stata dimostrata! E lo avete dimostrato a partire da un generico numero di 3 cifre.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 4: Riflessioni sul primo approccio alla dimostrazione della congettura</td></tr>
<tr><td>(37) S: posso farvi riflettere ancora sulla proposta (a)? Guardiamo il risultato ottenuto... cosa sono x e z?
(38) I: Le cifre delle centinaia la x, e quelle delle unità la z.
(39) S: Allora, in base al testo del problema sappiamo di quanto sono distanziate queste cifre?
(40) E: di due!
(41) D: infatti.
(42) S: allora possiamo concludere qualcosa riguardo a quel $99(x-z)$, che non abbiamo analizzato mentre i vostri compagni dettavano la loro soluzione?
(43) I: Cioè, anche questa è giusta... solo che dobbiamo inserire $x-z=2$
(44) S: Come dice I, anche la proposta (a) permette di arrivare alla dimostrazione di ciò che vogliamo dimostrare. Bastava accorgersi, leggendo il risultato ottenuto, che la ‘distanza’ tra x e z, essendo queste le cifre associate alle centinaia e alle unità è 2. Una volta sostituito il 2, cosa accade?
(45) C: Dopo risulta $99 \cdot 2 = 198$.</td><td>(14) Molto bene! S ritorna sulla prima ‘dimostrazione’ per evidenziare che anche dall’espressione ottenuta si poteva ottenere il risultato atteso. Forse era il caso di sottolineare meglio che questa formalizzazione è stata fatta senza tenere conto del fatto che le tre cifre sono strettamente decrescenti. Cmq è un importante momento di tipo meta, in cui si invita la classe a riflettere sui legami tra i diversi approcci allo stesso problema.
(15) L’allievo I (uno degli elementi del gruppo che non è riuscito a completare la dimostrazione) riesce autonomamente a cogliere l’invito di G per esplicitare il legame tra le diverse espressioni ottenute facendo riferimento all’ipotesi che il gruppo non aveva considerato.</td></tr>
</table>

4.1 Alcune riflessioni sul ruolo svolto dal mentore

La discussione è stata commentata linea per linea dal mentore facendo un costante riferimento sia ai termini caratterizzanti il costrutto di M-CA_{CE}, sia ai costrutti (che fanno parte della prima terna di componenti teoriche del nostro quadro) che consentono di esplicitare i processi attivati da S e dagli studenti che intervengono nel corso della discussione. Il mentore, in particolare, alterna osservazioni relative ai processi di pensiero sviluppati dagli allievi ad osservazioni relative alla conduzione della discussione (con riferimenti specifici al particolare contenuto in esame), con l'obiettivo di aiutare S a cogliere gli effetti del suo approccio in termini di competenze e consapevolezze sviluppate e manifestate dagli studenti.

I feedback del mentore, inseriti nella seconda colonna, possono essere interpretati come interventi mirati all'interno di un processo di *scaffolding* finalizzato alla modellizzazione della riflessione. Tali interventi hanno infatti l'obiettivo di provocare quelli che Mason indica come i necessari shifts nelle strutture di attenzione per favorire una piena awareness-in-discipline relativa sia alla capacità di agire in classe, sia alla capacità di riflettere a posteriori sulla propria pratica.

Analizzando sia questo estratto che, in particolare, le riflessioni che propone il mentore è possibile evidenziare diversi obiettivi associati ai commenti prodotti dal mentore stesso, che consentono di suddividere questi ultimi in tre principali gruppi, a seconda delle diverse consapevolezze che mirano a far sviluppare:

(1) Il primo gruppo riguarda i commenti che hanno l'obiettivo di far sviluppare consapevolezze relative ai processi attivati/da attivare-stimolare negli allievi (commenti 1, 4, 7, 9, 10, 13, 14);

(2) Il secondo gruppo contiene i commenti mirati a far sviluppare consapevolezze circa i diversi ruoli, associati al costrutto M-CA_{CE}, che il docente deve cercare di interpretare in classe (talvolta il mentore evidenzia anche ruoli che non sono stati interpretati al meglio): guida operativa-strategica (commento 2); guida al controllo dei significati (commento 5); guida riflessiva (commento 8); attivatore di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi (commenti 12 e 14);

(3) Il terzo gruppo di commenti è caratterizzato dall'obiettivo di far sviluppare consapevolezze relative agli effetti del lavoro del docente in termini di competenze/consapevolezze degli studenti (commenti 3, 6, 11, 12, 15).

5. Osservazioni conclusive

Questo approccio alle attività di riflessione è caratteristico dell'intero percorso affrontato da S, che durante le fasi successive a questa è intervenuta in prima persona, proponendo sia riflessioni sul ruolo da lei svolto durante le attività di classe, sia riflessioni associate ai commenti proposti dal mentore.

Al termine dell'attività di tirocinio S ha, in particolare, commentato il lavoro svolto, riflettendo sui cambiamenti che esso ha prodotto in lei. In particolare, riconosce di aver compreso la necessità di modificare la propria pratica, sia in termini di metodologia da attivare, sia in termini di attenzione maggiore verso i propri atteggiamenti e comportamenti, sottolineando di aver colto che l'attivazione di specifici atteggiamenti e comportamenti (quelli che caratterizzano un M-$\mathrm{CA_{CE}}$) favorisce il reale sviluppo di competenze e consapevolezze da parte degli allievi, come testimonia questa sua dichiarazione:

> Ritengo che un insegnante che imposti la sua attività didattica mantenendo fissi questi riferimenti possa davvero formare degli studenti che siano in grado di pensare e non limitarsi all'addestramento di studenti abili nella riproduzione di algoritmi e contenuti che rimangono per loro privi di alcun significato.

Contemporaneamente S rivela di aver colto che il processo di formazione per un insegnante non deve mai arrivare a termine, suggerendo l'importanza di condurre studi teorici a livello di ricerca in didattica della matematica per imparare sia ad agire che a riflettere meglio:

> Per poter svolgere con serietà il lavoro di insegnante non è sufficiente limitarsi allo sbrogliamento della matassa delle implicazioni che soggiacciono ai contenuti, ma è anche necessario che l'insegnante si mantenga aggiornato sugli studi di didattica che vengono continuamente svolti riguardo all'argomento che di volta in volta ci si accinge ad affrontare. La continua formazione del docente, infatti, gli permette di rifarsi a dei quadri teorici di riferimento che lo guidino nell'identificazione delle strategie da adottare affinché il suo intervento risulti efficace. L'efficacia dell'intervento didattico, inoltre, non può prescindere dall'atteggiamento con cui il docente si pone di fronte agli allievi.

Le riflessioni proposte da S testimoniano come il lavoro di riflessione congiunta condotto assieme a lei abbia potuto favorire lo sviluppo, da un lato, di una *awareness-in-discipline* relativa ad aspetti contenutistici-metodologici, dall'altro di una *awareness-in-discipline* relativa alle modalità attraverso le quali cercare di favorire il proprio sviluppo professionale.

Visti gli effetti positivi di questo lavoro, convinti dell'importanza di consentire ai futuri insegnanti di lavorare all'interno di reali communities of inquiry in un confronto continuo non solo con il mentore, ma anche con altri colleghi ed altri ricercatori, stiamo progettando ed implementando un percorso più strutturato che caratterizzerà anche i nostri interventi nei futuri Tirocini Formativi Attivi e vedrà impegnati piccoli gruppi di tirocinanti coinvolti sulle stesse attività da proporre in classe e nelle successive attività di riflessione congiunta sul proprio lavoro.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994), Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), pp. 24-35.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G. (2001), A model for analyzing algebraic thinking, in R. Sutherland et Al. (a cura di), *Perspectives on School Algebra*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 61-81.

Bell, A. (1996), Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language, in N. Bednarz et Al. (a cura di), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp.151-154.

Boero, P. (2001), Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving, in R. Sutherland et Al. (a cura di), *Perspectives on School Algebra*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 99-119.

Brown, L. (2004), Responses to ‘The Core of Algebra’, in K. Stecey et Al. (a cura di), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*, Kluwer (The Netherlands), pp. 35-44.

Collins, A., Brown, J.S., Newman, S.E. (1989), Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics!, in L.B. Resnick (a cura di), *Knowing, Learning, and Instruction*: *Essays in Honor of Robert Glaser*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 453-494.

Cusi, A., Malara, N.A. (2009), The Role of the Teacher in developing Proof Activities by means of Algebraic Language, in M. Tzekaki et Al., *Proceedings of PME 33*, Thessaloniki (Greece), vol. 2, pp. 361-368.

Cusi, A., Malara, N.A., Navarra, G. (2011), Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it, in J. Cai e E. Knuth (a cura di), *Early Algebrailization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives*, pp. 483-510.

Duval, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103–131.

Jaworski, B. (1998), Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 3-31.

Jaworski, B. (2003), Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships, *Educational Studies in Mathematics*, 54, pp. 249-282.

Jaworski, B. (2004), Grappling with Complexity: Co-learning in Inquiry

Communities in Mathematics Teaching Development, in M.J. Hoines e A.B. Fuglestad (a cura di), *Proceedings of the 28th*, Bergen (Norway), vol. 1, pp. 17-36.

Jaworski, B. (2006), Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, pp. 187–211.

Kieran, C. (2004), The core of algebra: reflections on its main activities, in K. Stecey et Al., The future of the teaching and learning of algebra, *The 12th ICMI study*, Kluwer (The Netherlands), pp. 21-34.

Leont'ev, A.N. (1977), *Attività, coscienza e personalità*, Firenze, Giunti Barbera.

Malara N.A. (1999), Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi, *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, (6), 3*, pp. 153-181.

Malara, N.A. (2003), Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project, in N.A. Pateman, B.J. Dougherty e J.T. Zilliox (a cura di), *Proceedings of PME 27*, Honululu (USA), vol.1, pp. 33-48.

Malara N.A. (2004), Formazione degli insegnanti ed avvio al pensiero algebrico, in N.A. Malara et Al., *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Bologna: Pitagora, pp. 11-36.

Malara, N.A. (2007), Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti, XVIII Convegno Nazionale della unione Matematica italiana, *Notiziario UMI*, 35 (1.2), inserto speciale.

Malara, N.A., Navarra, G. (2003), *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Pre-Algebraic Thinking*, Bologna: Pitagora.

Mason, J. (1998), Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, pp. 243-267.

Mason, J. (2002), *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.

Mason, J. (2008), Being Mathematical with and in front of learners, in B. Jaworski e T. Wood (a cura di), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, Sense Publishers, pp. 31-55.

Vygotsky, L.S. (1978), *Mind in society: The development of higher mental processes*, Cambridge: MA. Harvard University Press.

Wheeler, D. (1996), Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to algebra, in N. Bednarz et Al. (a cura di), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Netherlands: Kluwer Publishers, pp. 317-325.

Un approccio alla trigonometria attraverso un percorso storico

Alessandra Fiocca[(*)]

1. Introduzione

Già all'inizio del secolo scorso, nell'ambito del lavoro di redazione dei nuovi programmi di matematica per la scuola superiore (Commissione Reale 1908), Giovanni Vailati (1863-1909) sottolineava, tra gli aspetti metodologici, l'uso della storia della matematica al triplice fine di favorire il dialogo fra cultura scientifica e cultura umanistica, rendere più proficuo e attraente l'insegnamento, evitare ogni forma di dogmatismo. [18]

È noto che tra le discipline matematiche meno gradite agli studenti vi è la trigonometria che viene percepita tra le più aride, meno attraenti e più rigide nei suoi schemi e formule. A questa situazione si potrebbe ovviare seguendo le indicazioni metodologiche di Vailati, quindi attraverso un approccio storico alla disciplina che avrebbe, tra l'altro, il grande vantaggio di rendere ragione del perché era, ed è ancora oggi, importante conoscere la trigonometria.

Attualmente la trigonometria si studia nelle classi terza e quarta del Liceo Scientifico, degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali (di tipo Tecnologico). Le nuove indicazioni nazionali per la matematica (del 2010) la riducono molto rispetto al passato suggerendo l'introduzione dei primi elementi fin dal I biennio, soprattutto per l'utilizzo che se ne fa in fisica. Gli obiettivi specifici di apprendimento, tuttavia, sono preceduti dalla descrizione del profilo generale e dalle competenze che lo studente dovrà possedere al termine del suo percorso di studi, in cui è sottolineata l'importanza di connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate. Con l'introduzione della

---

[(*)]Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Matematica (alessandra.fiocca@unife.it).

[18] L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, in *Conoscere attraverso la matematica: linguaggio, applicazioni e connessioni interdisciplinari*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Anzio-Nettuno novembre 2004, Roma, 2005, pp. 303-344: 315.

storia della matematica nell'insegnamento: *lo studente dovrà acquisire una consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, dovrà acquisire il senso e la portata dei principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nel pensiero greco, la matematica infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del seicento...*

Un approccio storico alla trigonometria rientra dunque a buon titolo anche nelle nuove direttive ministeriali.

Il termine trigonometria deriva dalle parole greche *trigonos* (triangolo) e *metron* (misura), e nell'*Encyclopédie* di Diderot e d'Alembert è definita come "l'arte di trovare le parti incognite di un triangolo mediante quelle che si conoscono", ovvero "l'arte" della risoluzione dei triangoli.

Una difficoltà nello studio della trigonometria è dovuta ai due distinti approcci concettuali alla disciplina: da una parte viene presentata la *trigonometria del triangolo*, in cui gli angoli sono misurati in gradi e le funzioni trigonometriche sono definite come rapporti dei lati di un triangolo rettangolo, dall'altra viene insegnata la *trigonometria del cerchio*, in cui gli angoli sono misurati in radianti e le funzioni trigonometriche sono espresse in termini delle coordinate di un punto sul cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del riferimento cartesiano.

Generalmente viene insegnata prima la trigonometria del triangolo, ritenuta più semplice, e solo in seguito si passa alla trigonometria del cerchio. Il percorso storico procede invece, come si vedrà, in direzione opposta.

La trigonometria del triangolo trova ampia applicazione nell'ambito dell'agrimensura, della topografia, della navigazione per citare solo alcuni dei settori di maggior impiego. Fu tuttavia la trigonometria del cerchio la prima a nascere e svilupparsi nell'ambito degli studi astronomici. Dai primi sviluppi della trigonometria del cerchio dovuti a Ipparco (II sec. a.C.), ci vollero più di mille anni prima che la trigonometria del triangolo venisse sviluppata.

Come vedremo, originariamente la trigonometria non era altro che una "tavola delle corde", ovvero una tabella in cui ad un certo numero di archi di cerchio corrispondeva la misura della corda sottesa. Successivamente, nell'ambito della cultura indiana, furono costruite tavole delle mezze corde, corrispondenti alle nostre tavole dei seni degli angoli. La tangente e la cotangente furono invece introdotte nell'ambito della gnomonica, la scienza che insegna a costruire orologi solari.

2. Geometria quantitativa della sfera e primi contributi alla trigonometria

Fin dai tempi più remoti, l'uomo ha cercato di congetturare la forma e la struttura dell'universo. Nei secoli furono concepiti molteplici sistemi del mondo che proponevano soluzioni diverse per far corrispondere i fenomeni osservati nel cielo con la supposta architettura dell'universo. Con la civiltà greca l'universo assunse la forma di una sfera sulla cui superficie, che ruota con movimento regolare, sono incastonate le stelle, mentre al suo interno i pianeti e il sole procedono lungo orbite circolari con al centro la Terra immobile.

Fu nel III secolo a.C. che la ricerca astronomica si spostò sulla sponda meridionale del Mediterraneo, in Egitto. Nel Museo di Alessandria, la città che prende il nome da Alessandro Magno, poi retta dalla dinastia dei Tolomei che la resero il centro della scienza greca fin quasi alla conquista araba, l’astronomia raggiunse il massimo livello di rigore concettuale e perfezione teorica. I rapporti tra i pianeti e la Terra divennero l’oggetto principale della ricerca astronomica e furono accumulati dati che, legati al rapido sviluppo della geometria, permisero di conseguire straordinari risultati.

Un aspetto caratterizzante la matematica alessandrina è che accanto agli studi teorici vi fu un’attenzione costante alle applicazioni scientifiche e tecniche con lo sviluppo di nuove discipline quali l’ottica, la pneumatica, la meccanica, la geodesia. Per quanto riguarda l’astronomia, alla cosmologia rappresentata dalle opere di Aristotele, la *Fisica* e il *De cielo* in cui era investigata la struttura dell’universo e indagate le cause dei moti, venne affiancata una astronomia quantitativa per calcolare le posizioni di stelle e pianeti, prevedere i fenomeni celesti e quindi utile alla vita quotidiana dal calendario, alla navigazione, alla compilazione degli oroscopi.

Il problema fondamentale che diede origine alla trigonometria consiste nel determinare, dato un arco di un cerchio, la lunghezza della corda sottesa. Il fondatore della trigonometria è probabilmente Ipparco da Rodi (II sec. a. C.) in quanto è noto che compilò delle *tavole di corde,* che tuttavia non ci sono pervenute, così come non ci è pervenuta l’opera di Teodosio da Tripoli (I sec. a.C.) intitolata *Sphaerica*. Ci sono invece pervenute la *Sphaerica* di Menelao di Alessandria (I-II sec. d.C.) e l’*Almagesto* di Claudio Tolomeo, attivo ad Alessandria attorno alla metà del II secolo, che rappresenta l’opera più importante dell’astronomia greca. Claudio Tolomeo ha legato il proprio nome all’immagine del cosmo sopraccitata destinata a dominare sino alla fine del XVI secolo. Mettendo a frutto il bagaglio di informazioni accumulato nei secoli precedenti, Tolomeo compose un grandioso compendio astronomico conosciuto come *Almagesto*, nome che deriva dalla parola araba, al-maghesti, a sua volta derivata dal superlativo della parola greca mègas (grande), quindi Almagesto significa "l'opera massima". Tolomeo vi descrive la volta celeste analizzandone i movimenti, i fenomeni legati all'obliquità dell'asse terrestre e all'inclinazione dell'eclittica, la questione delle eclissi e delle coordinate degli astri. Il catalogo di 1025 stelle che si trova nell'ottavo libro dell'opera è stato per molti secoli il punto di riferimento per ogni nuova mappa del cielo.

3. La *Sphaerica* di Menelao e la geometria non euclidea

La *Sphaerica* di Menelao è costituita da tre libri e ci è pervenuta grazie a codici arabi ed ebraici e a una traduzione in lingua latina dall'arabo ad opera di Gherardo da Cremona (XII sec.). Nel I libro Menelao introduce l'importante concetto di triangolo sferico formato da tre archi di cerchio massimo che si ottengono intersecando la sfera con dei piani passanti per il suo centro, nel II tratta di astronomia e nel III, con l'intento di creare una teoria parallela a quella euclidea per i triangoli piani, dimostra diversi teoremi sui triangoli sferici, tra cui il teorema noto col suo nome che fornisce, nella forma completa, una condizione necessaria e sufficiente per la collinearità di tre punti. Menelao dimostra che a differenza dei triangoli piani, in quelli sferici la somma degli angoli interni è sempre maggiore di due angoli retti. Dimostra, inoltre, un criterio di uguaglianza per i triangoli sferici (s*e due triangoli sferici hanno reciprocamente tre angoli uguali, anche i loro archi sono rispettivamente uguali*) che evidenzia l'impossibilità di sviluppare sulla sfera una teoria della similitudine analoga a quella della geometria piana.

Può essere interessante osservare che la geometria sferica sviluppata da Menelao, contenente molti teoremi analoghi a quelli della geometria piana, obbedisce agli assiomi della geometria euclidea, ad eccezione del quinto postulato, quello delle rette parallele. Si pensi a una retta r e a un punto P fuori di essa. La questione è: quante rette si possono tracciare passanti per P e parallele alla retta r? In geometria euclidea la risposta è: una e una soltanto. L'unicità della parallela è uno dei modi per esprimere il quinto postulato di Euclide, postulato che i matematici, per 2000 anni, hanno cercato di dimostrare utilizzando i precedenti quattro. Una proposizione equivalente al quinto postulato è che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti. Menelao ha provato che nei triangoli sferici la somma degli angoli interni è sempre maggiore di due angoli retti, dunque in questa geometria non vale il quinto postulato. E difatti, nella geometria sferica, le "rette" (ovvero le curve di minima distanza o geodetiche) sono i cerchi massimi della sfera e due "rette" si incontrano sempre in due punti. La risposta dunque, in questa geometria, alla questione iniziale, data una "retta" e un punto fuori di essa, quante sono le "rette" passanti per P e parallele a *r*, è: nessuna.

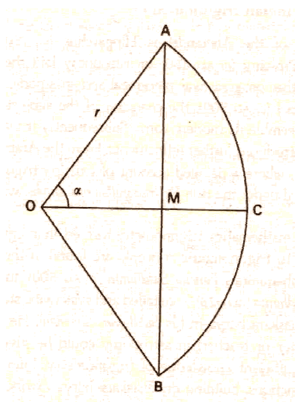
Sebbene la formalizzazione della geometria non euclidea avvenne solo nell'Ottocento, un esempio di essa era già contenuto nella *Sphaerica* di Menelao. Talvolta "scoprire" non significa altro che riconoscere qualcosa che era già sotto i nostri occhi.

4. Corde di un cerchio

La trigonometria greca differisce dalla trigonometria moderna per l'uso delle corde di un cerchio invece che delle mezze corde (ovvero dei seni degli angoli).

Se ruotiamo il cerchio in modo che la corda AB sia verticale, e tracciamo i due raggi per gli estremi della corda, vediamo come si può riscrivere la lunghezza della corda in termini della funzione *seno*. Se la corda sottende un arco di lunghezza 2α e il raggio del cerchio è *R*, la lunghezza della mezza corda è $R \cdot \sin\alpha$ e la lunghezza della corda è $2R \cdot \sin\alpha$ ovvero:

$$\text{corda}(2\alpha) = 2R\sin\alpha$$



Euclide (III sec. a. C.) nei suoi *Elementi* introdusse la sezione aurea (Libro II, proposizione 11) che rappresenta il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio unitario, e quindi la lunghezza della corda sottesa da un arco di 36°. Sempre negli *Elementi* (Libro XIII, proposizione 10) Euclide dimostra che i lati del decagono, del pentagono e dell'esagono inscritti nello stesso cerchio formano un triangolo rettangolo, proprietà che permette di esprimere, attraverso il teorema di Pitagora, il lato del pentagono, e quindi la lunghezza della corda sottesa a un arco di 72°:

Se il cerchio ha raggio R, risulta:

$$\text{corda}\,36° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R \approx 0{,}618R$$

$$\text{corda}\,72° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R \approx 1{,}176R$$

Come abbiamo già osservato, a Ipparco sono attribuite tavole di corde, che tuttavia non ci sono pervenute. Le più antiche tavole di corde che si conoscono sono quelle di Tolomeo di Alessandria contenute nell'*Almagesto*.

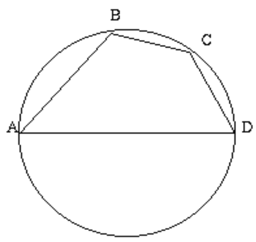
Nell'antichità, ma ancora fino al XIX secolo, i gradi erano introdotti per misurare la lunghezza di un arco, così 1° era la trecentosessantesima parte della lunghezza della circonferenza e come tale la sua grandezza dipendeva dal raggio del cerchio, così come dipendeva dal raggio del cerchio la lunghezza della corda. Per costruire le sue tavole delle corde, Tolomeo considerò come raggio del cerchio 60. Si pensi a un goniometro ideale in cui la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti. *Pars minuta prima* (minuto) e *pars minuta seconda* (secondo) erano rispettivamente la frazione del grado e la frazione della frazione del grado. Così la corda di un arco di 180° è 120, ovvero la misura del diametro; la corda di un arco di 60°, è 60, lunghezza del lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio. Si riconosce in questo sistema di misure la tradizione babilonese in quanto l'antica civiltà babilonese usava un sistema per la scrittura dei numeri in base 60.

È interessante ricordare che nel 1596 fu pubblicata l'opera postuma di Georg Rheticus (1514-1574) dal titolo *Opus palatinum de triangulis*, contenente tavole delle sei funzioni trigonometriche. Avendo assunto come lunghezza del raggio del cerchio 10^{10}, le tavole di Rheticus contenevano valori approssimati a 10 cifre delle funzioni, senza dover ricorrere ai decimali, non ancora in uso, o alle frazioni.

5. Il teorema di Tolomeo e le formule di sottrazione e di bisezione degli archi per la costruzione della tavola delle corde

Il primo libro dell'*Almagesto* di Tolomeo contiene una tavola delle corde che procede di mezzo grado in mezzo grado dalla corda di 1° a quella di 180°. Per ottenerla Tolomeo si procurò formule analoghe a quelle di addizione e sottrazione per le funzioni seno e coseno.

Ciò fu possibile grazie al *Teorema di Tolomeo*: in un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti



Considerato il quadrilatero ABCD inscritto in un cerchio con il lato AD coincidente con un diametro e posto *arcoAB* = α; *arcoAC* = β risulta *arcoBC* = $\beta-\alpha$; *arcoBD* = $180-\alpha$; *arcoCD* = $180-\beta$.

Per il teorema di Tolomeo risulta:

$$\text{corda}(\beta)\cdot\text{corda}(180-\alpha)=\text{corda}(\alpha)\cdot\text{corda}(180-\beta)+120\cdot\text{corda}(\beta-\alpha)$$

Ricordando che $\text{corda}(\alpha)=120\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ la formula precedente si traduce nella nota formula di sottrazione dei seni

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Analogamente Tolomeo ottiene una formula analoga alla formula di bisezione degli archi che permette di calcolare corde corrispondenti ad archi sempre più piccoli

$$\text{corda}^2(\alpha)=\frac{60\,\text{corda}^2(2\alpha)}{120+\text{corda}(180-2\alpha)}$$

La corda corrispondente all'arco di 1° è ottenuta da Tolomeo per approssimazione. Poiché per due archi di α e β gradi con α > β risulta

$$\frac{\mathrm{corda}(\alpha)}{\mathrm{corda}(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

segue che

$$\frac{2}{3}\,\mathrm{corda}(1°30') < \mathrm{corda}(1°) < \frac{4}{3}\,\mathrm{corda}(45')$$

D'altra parte le corde di 1°30' e di 45' erano note grazie alle formule di bisezione essendo note le corde di 3°, 6°, 12°, quest'ultima nota per differenza tra le corde di 72° (lato del pentagono regolare) e 60°.

6. Contributi Indiani e etimologia della parola "seno"

Come abbiamo visto, il primo uso delle funzioni trigonometriche è legato alle corde di un cerchio e alla ricerca della lunghezza della corda sottesa a un dato arco.

Lo sviluppo matematico in India intorno al 500 d.C. produsse una trigonometria più vicina alla forma moderna. Dall'India giunse l'uso della mezza corda al posto della corda.

Nell'opera *Surya Siddhanta* (IV-V sec.) si trova una tavola delle mezze corde, ovvero dei seni degli angoli multipli di 3° 45' fino a 90°. Il coseno era definito semplicemente come il seno dell'arco complementare: $\cos\alpha = \sin(90-\alpha)$; in genere non si avevano delle tavole del coseno, dato che esso poteva essere letto direttamente dalle tavole dei seni.

Il matematico indiano Aryabhata diede una tavola di mezze corde note col nome di *jya-ardha* o semplicemente *jya*, dove *jya* $x = r \sin x$. Gli Indiani usavano *seno*, *coseno*, e la funzione *senoverso* (1-*coseno*) ora non più in uso.

Nell'ottavo secolo l'uso della mezza corda fu importato nel mondo arabo grazie alle traduzioni in lingua araba di testi astronomici indiani compiute principalmente nella capitale, Baghdad.

In sanscrito "corda" era *jya* e "mezza corda" era *jya-ardha*. Nelle traduzioni in arabo la parola *jya* fu traslitterata e divenne *jyba* o *jyb,* parola priva di significato in quella lingua. In seguito gli arabi adottarono al posto di *jyba,* la parola *jayb* che in arabo aveva la stessa ortografia poiché la vocale "a" non veniva scritta e che significa baia o rada. Quando i testi arabi vennero tradotti in lingua latina la parola araba fu tradotta col termine *sinus* (baia) e che divenne in italiano *seno* e in inglese *sine.*

7. Gli Arabi e il metodo di Al-Kashi per il calcolo approssimato del seno di 1°

Dall'VIII al XV secolo la ricerca astronomica più avanzata fu scritta in lingua araba. Gli astronomi islamici si dedicarono con impegno allo studio dell'astronomia, nel quale conseguirono risultati importanti. Modificarono e resero più precisi i modelli geometrici di Tolomeo per il Sole, la Luna e i cinque pianeti, migliorando le coordinate fornite dall'astronomo alessandrino per le stelle fisse.

Gli autori islamici introdussero inoltre perfezionamenti negli strumenti ereditati dai Greci e ne concepirono di nuovi, in particolare per la misura del tempo mediante il Sole e le stelle. In diverse regioni dell'Islam fiorirono inoltre osservatori astronomici che produssero dati che saranno utilizzati anche dagli studiosi occidentali, tra i quali Copernico. La consapevolezza dei risultati conseguiti dagli astronomi islamici è venuta progressivamente affermandosi solo nel corso degli ultimi 150 anni, grazie alla sempre più intensa attività di studio dei manoscritti e degli strumenti islamici.

Al-Kashi, astronomo persiano del XV secolo, elaborò un metodo per il calcolo approssimato del seno di 1° basato sulla formula che dà il seno di 3α in termini del seno di α che oggi scriviamo così:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Per $\alpha=1°$, posto $x=\sin 1°$ la relazione precedente diventa

$$3x=4x^3+\sin 3°$$

Posto $a=\sin 3°$ (noto con precisione arbitraria grazie alle formule di bisezione) si tratta di risolvere l'equazione cubica

$$3x=4x^3+a$$

Se x è piccolo, $4x^3$ si può trascurare e dunque:
$x_1=a/3$ (prima approssimazione);
$3x_2=4x_1^3+a$ (seconda approssimazione);
$3x_3=4x_2^3+a$ (terza approssimazione) e così di seguito.

8. Sviluppi della trigonometria in Occidente e risoluzione dei triangoli rettangoli

La trigonometria giunse in Occidente soprattutto attraverso fonti arabe. Non si hanno notizie di contributi degli studiosi europei prima del Quattrocento. I contributi alla trigonometria vennero sempre dagli astronomi che necessitavano di tavole dei seni sempre migliori, sia nella precisione, sia per archi a intervalli sempre minori. La precisione delle tavole, in particolare, era data dalla grandezza del raggio del cerchio goniometrico.

Per quanto riguarda l'intervallo degli archi Georg Peuerbach (1423-1461) calcolò una tavola dei seni di 10' in 10'; Johannes Müller detto Regiomontano (1436-1476) ne compose una di 1' in 1'; Rheticus (1514-1574) preparò monumentali tavole trigonometriche a intervalli di 10'', ottenute utilizzando una formula di ricorrenza che dà il seno dell'angolo multiplo di α, $(n+1)\,\alpha$, in funzione di seno e coseno degli angoli α, $n\alpha$, $(n-1)\,\alpha$; François Viéte (1540-1603) sviluppò formule di moltiplicazione degli angoli, $\cos x$; $\cos 2x$, $\cos 3x$, ecc.

La trigonometria del triangolo iniziò col problema di determinare la lunghezza dell'ombra prodotta da un'asta verticale – gnomone – noto l'angolo formato dai raggi del sole con la verticale. Le prime tavole di tali valori furono quelle di Al-Kwarizmi di Baghdad (IX sec.) il matematico dal cui nome deriva la parola *algoritmo*, autore di un'opera sull'*al-jabr* che rappresenta l'origine della parola *algebra*. Poiché il segmento che rappresenta tale grandezza è tangente al cerchio, la funzione prese il nome di *tangente*. La secante deriva dal termine latino *secantem*, che significa "che taglia" ed è la lunghezza del segmento staccato sul prolungamento del raggio dalla tangente. Il coseno, la cotangente e la cosecante sono i segmenti corrispondenti a questi relativi all'angolo complementare.

I due termini, tangente e cotangente, furono introdotti tra la fine del XVI e l'inizio del secolo successivo rispettivamente da Thomas Fink, *Geometriae Rotundi* (1583) e Edmund Gunter, *Canon triangulorum* (1620).

Un ulteriore impulso allo sviluppo della trigonometria venne dalla topografia che, al contrario dell'astronomia, si basa totalmente sulla trigonometria rettilinea. Per le necessità dei rilievi topografici vennero studiati i triangoli e la loro risoluzione. Il primo trattato di trigonometria composto in Occidente e per molto tempo il più importante è il De *triangulis omnimodis* di Regiomontano scritto circa nel 1464 ma stampato solo nel

1533 in cui si trovano applicazioni della trigonometria al calcolo dei lati di un triangolo rettangolo. Ne seguirono altri, alcuni autonomi, altri propedeutici a opere di astronomia come nel caso di Nicolò Copernico (1473-1543) e del suo trattato *De revolutionibus orbium coelestium* (1543). Bartolomeo Pitiscus (1561-1613) introdusse il termine trigonometria nel titolo della sua opera; si trattava di una traslitterazione dal greco al latino del termine "misura del triangolo".

Il problema della risoluzione dei triangoli rettangoli veniva risolto, qualora fossero noti due lati del triangolo, per trovare il terzo lato applicando il teorema di Pitagora; per trovare gli altri due angoli, il triangolo ABC veniva inscritto in una semicirconferenza di diametro AB uguale all'ipotenusa (=120). Noto il lato BC (ovvero nota la corda sottesa dall'angolo 2α), usando la tavola delle corde si ricavava 2α e quindi α corrispondente all'angolo CAB del triangolo, opposto al lato BC. Si può evitare di cambiare unità di misura per ricondursi a un triangolo avente come lunghezza dell'ipotenusa 120, cercando nelle tavole delle corde l'arco 2α corrispondente alla corda di lunghezza $\frac{BC \cdot 120}{AB}$.

La risoluzione dei triangoli in generale era ricondotta alla risoluzione dei triangoli rettangoli.

9. Tavole logaritmico-trigonometriche

Un impulso decisivo allo sviluppo delle tecniche trigonometriche venne dall'invenzione dei logaritmi da parte di John Napier (1550-1617) per la semplificazione nel calcolo che i logaritmi comportarono. Moltiplicazioni e divisioni si riducevano a somme e sottrazioni, potenze ed estrazioni di radici a prodotti e quozienti per numeri interi.

Ci si accorse che l'uso combinato delle tavole trigonometriche e di quelle logaritmiche semplificava i calcoli. Ad esempio usando il teorema dei seni nella risoluzione di triangoli, il calcolo si semplificava passando ai logaritmi. Si aggiunsero così tavole dei logaritmi dei seni e dei coseni, le cosiddette Tavole logaritmico trigonometriche. L'avvento dei calcolatori ha reso obsolete queste tavole dato che non è più complicato per un computer una moltiplicazioni piuttosto di una addizione.

10. Le funzioni circolari. XVII e XVIII secolo

Fino alla metà del Seicento i seni e le altre espressioni trigonometriche erano numeri dati da tavole, elenchi che per ogni valore dell'arco davano il valore del seno. Intorno al 1650 comincia a emergere un punto di vista diverso, quello funzionale, o meglio quello geometrico. Vengono così studiate le curve dei seni, dei coseni, delle tangenti ecc. La curva rappresentata dall'equazione y=sin$x$ comincia a entrare insieme alle più note curve come la parabola, l'iperbole ecc. Si cominciano a porre tutta una serie di questioni, al pari delle altre curve, tracciare la tangente in un punto della curva, calcolare l'area di una porzione o il volume facendo ruotare la curva.

L'invenzione nel Seicento del calcolo infinitesimale, da parte di Leibniz e Newton, portò a soluzione molti problemi aperti. Vennero introdotte le funzioni inverse, in particolare l'arcotangente, legata alla quadratura del cerchio.

Fu Eulero (1707-1783) nel XVIII secolo a introdurre la prassi di misurare archi e segmenti con la stessa unità di misura, assumendo tra l'altro il raggio del cerchio R=1. Egli utilizzò il simbolo π per indicare la lunghezza della semicirconferenza di raggio 1, così la lunghezza della circonferenza è 2π, quella dell'arco di 45° è π/4.

Si pervenne così a definire il "radiante" come nuova unità di misura angolare, in alternativa alla misura in gradi: tracciato un cerchio con centro nel vertice dell'angolo, un *radiante* è la misura dell'angolo che sottende un arco di lunghezza pari al raggio. I radianti si dimostrarono la misura angolare più utile in analisi matematica, perché permettono di esprimere in forma semplice identità che coinvolgono le derivate e gli integrali delle funzioni circolari, come ad esempio $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ quando x è misurato in radianti.

Eulero scoprì inattese relazioni, le cosiddette formule di Eulero, che legano tra loro le funzioni seno, coseno e le potenze a esponente immaginario, in particolare $e^{ix} = \cos x + i\sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ nonché la scrittura dei numeri complessi $z = \rho\ (\cos\theta + i\sin\theta)$. Con l'introduzione della variabile complessa, l'approccio alle funzioni circolari permette di ricavare con estrema semplicità le ben note identità trigonometriche, dalla relazione fondamentale della trigonometria, alle formule di addizione e di duplicazione.

Così ad esempio

$$1 = e^0 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = (\cos x + isenx) \cdot (\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x\,.$$

11. Considerazioni finali

Nelle applicazioni della trigonometria ai problemi posti dalla navigazione e dal rilevamento topografico, è certamente utile definire le funzioni trigonometriche come rapporti tra segmenti. Per quanto concerne, tuttavia, tutti questi aspetti applicativi si può affermare che l'uso della trigonometria è superato ampiamente, sostituito dall'utilizzo di segnali radio satellitari, di aerofotogrammetria e telerilevazioni, i cui dati vengono raccolti ed elaborati con l'impiego dei calcolatori elettronici.

Le funzioni seno e coseno si incontrano oggi più frequentemente nel loro aspetto di funzioni periodiche, piuttosto che come ausilio per trovare le grandezze incognite di un triangolo rettangolo. Biologi, fisici, economisti usano tali funzioni nella costruzione di modelli matematici per studiare fenomeni periodici.

Con il carattere funzionale delle grandezze trigonometriche, tutte riunite sotto il nome di funzioni circolari, si entra nella trigonometria moderna in cui le funzioni circolari vengono studiate in quanto tali come parte dell'analisi matematica. Volendo che gli studenti comprendano l'aspetto funzionale delle grandezze trigonometriche, si ritiene che le definizioni originarie che le descrivono come relazioni tra due grandezze, archi e corde, risultino le più immediate e trasparenti.

Vi è da parte degli studenti una difficoltà a comprendere la misura in radianti degli angoli. Si potrebbe semplificare il percorso seguendo la via indicata da Eulero, ovvero prendendo come argomento del seno la lunghezza dell'arco su un cerchio di raggio 1 e come valore del seno la lunghezza della corrispondente mezza corda.

La storia ha dunque molto da insegnare e suggerisce di introdurre la trigonometria imitando gli antichi astronomi che inizialmente hanno studiato le relazioni funzionali tra lunghezze di archi e lunghezze di segmenti. Se le funzioni trigonometriche vengono introdotte prima come lunghezze di segmenti nel cerchio di raggio 1, è più facile poi, pensando a triangoli simili, passare alla trigonometria del triangolo e alla definizione delle funzioni trigonometriche come rapporti.

Bibliografia e siti web

Loria, G. (1914), *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano: Hoepli.

Boyer, C. (2000), *Storia della matematica*, Mondatori.

Kline, M. (1999), *Storia del pensiero matematica. Dall'antichità al Settecento*, Torino: Einaudi.

Bressoud, D.M. (2010), *Historical Reflexions on Teaching Trigonometry*, Mathematics Teacher, 104 (2), September, pp. 107-112.

Giardino di Archimede, Un museo per la matematica, http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/trigonometria/trigonometria/prima.html

Beardon, T., *When the Angles of a Triangle don't add to 180 degrees*, http://nrich.maths.org/1434

Locomat. The Loria collection of mathematical tables. DTL (Digital Tables Library) http://locomat.loria.fr/locomat/reconstructed.html

I vettori nell'insegnamento della matematica nella Scuola secondaria di II grado

Giuliano Mazzanti[*], Valter Roselli[*], Luigi Tomasi[**]

1. I vettori nei programmi e nei curricoli di matematica

In questo articolo prendiamo spunto dalle Indicazioni nazionali per i Licei (2010) e dalle Linee guida per gli Istituti Tecnici e gli Istituti professionali (2010, 2012) per quanto riguarda la matematica.

Introduciamo inizialmente un riferimento ai programmi sperimentali del PNI (1991 e 1996), per il triennio, dove, nel Tema n. 2 - Insiemi numerici e strutture, è previsto il seguente argomento (tra asterischi sono indicati temi facoltativi):

> Spazi vettoriali: strutture vettoriali in R^2 e *in R^3* *Basi, applicazioni lineari*. Risoluzione di sistemi lineari. *Struttura algebrica dell'insieme delle matrici*.

Nel commento al Tema n. 2, nei programmi del PNI, si dice inoltre:

> L'introduzione del concetto di vettore nella terza classe, con riferimento alle operazioni fondamentali, risulta opportuno per il suo utilizzo in altri capitoli della matematica e nelle altre scienze. L'argomento sarà ripreso ed ampliato successivamente.
> Al concetto generale di spazio vettoriale ed, eventualmente, a quello di applicazione lineare si perverrà attraverso l'analisi di casi concreti in vari contesti. Qualora si farà riferimento alla struttura vettoriale anche in R^3, sarà opportuno collegare l'argomento a brevi cenni sulla geometria analitica dello spazio. […]. L'eventuale studio delle matrici può offrire un esempio particolarmente semplice e significativo di anello non commutativo e potrà utilmen-

[*] Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Matematica (giuliano.mazzanti@unife.it, valter.roselli@unife.it).
[**] Liceo Scientifico Statale 'Galileo Galilei', Adria (RO) (luigi.tomasi@unife.it).

te essere collegato alle equazioni delle trasformazioni geometriche studiate nel precedente anno.

Nei programmi del PNI, questo argomento tuttavia aveva ampie parti contrassegnate da un asterisco, quindi facoltative almeno dal 1996, ed è stato largamente trascurato nella didattica.

Le stesse osservazioni riguardano anche i Programmi Brocca per il Triennio delle Scuole superiori (1992).

Nelle Indicazioni nazionali (2010) per il liceo scientifico, primo biennio, Aritmetica ed Algebra, si afferma che dalla storia della matematica, si ricavano alcuni «gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio» nei licei. Uno degli otto punti prevede che siano affrontati:

> gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari.

Inoltre, sempre nel Liceo Scientifico - Primo Biennio - Aritmetica e algebra si legge:

> Concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale.

Francamente, anche se nel primo biennio del liceo scientifico si hanno a disposizione 5 ore di lezione alla settimana, sembra troppo richiedere tutto questo nelle prime due classi. I concetti richiamati richiedono una notevole capacità di astrazione, in particolare quelli «di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale». Prima di questo riordino non sempre questi concetti erano trattati nella scuola secondaria di II grado, tantomeno nel primo biennio. Vi è poi un errore, o quanto meno un'ambiguità nel modo di scrivere, perché sembra che si chieda di svolgere il prodotto vettoriale nel piano, cosa ovviamente priva di senso.

Sulla questione del calcolo con i vettori, è opportuno osservare che esso ha un ruolo fondamentale in fisica, ma anche in informatica, in economia, ecc. Non si parla quasi della sua importanza fondamentale in matematica. Occorre invece sottolineare che si tratta di uno degli 'oggetti' della matematica più usato in tutte le applicazioni. Le Indicazioni nazionali sono forse troppo centrate sulla fisica.

Ma ammettiamo pure che si debba fare il calcolo con i vettori nel primo biennio del liceo scientifico. Si potrebbe allora introdurre la somma di due vettori (regola del parallelogramma), il prodotto di un vettore per uno scalare, usando dei software di geometria dinamica, e non molto di più. Si ritiene opportuno rinviare al secondo biennio il prodotto scalare, il prodotto vettoriale e i concetti di dipendenza e indipendenza lineare. È auspicabile che le scuole, nella loro autonomia, si orientino in tal senso.

Riguardo poi agli 'elementi di calcolo matriciale', si ritiene semplicemente fuori luogo questa richiesta in un primo biennio. Andrebbe anzi chiarita, anche se fosse collocata nel secondo biennio. Probabilmente le indicazioni richiedono di definire la somma di matrici, il prodotto di una matrice per uno scalare e forse anche il prodotto 'righe per colonne', ma scritto così non è per nulla chiaro e non ha senso proporre questi argomenti nel primo biennio. Sarebbe stato più sensato richiedere, più semplicemente, la risoluzione di sistemi lineari 2×2 (e al massimo 3×3) senza parlare pomposamente di 'calcolo matriciale'.

Dopo aver accennato alle *Indicazioni nazionali* per la matematica nei licei, in questo articolo proponiamo un percorso, da svolgere non solo nel primo biennio di scuola secondaria di II grado, in cui si introducono gli elementi fondamentali del calcolo vettoriale.

Si precisano inizialmente i concetti di segmento, lunghezza di un segmento e misura della lunghezza di un segmento, i concetti sempre problematici di direzione e di verso, per arrivare alla definizione di segmento orientato (detto anche vettore applicato). Si affronta poi la relazione di 'uguaglianza' tra segmenti per definire il concetto di vettore libero a partire da quello di segmento orientato. Si prosegue poi con le operazioni tra vettori liberi, introducendo la definizione di vettori dipendenti ed indipendenti. Si discuteranno in questo contesto le possibili difficoltà didattiche di questi concetti.

Dopo questa parte, che si svolge sostanzialmente nel piano e nello spazio tridimensionale, si affronteranno il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, fornendone una interpretazione geometrica. L'articolo si conclude con qualche applicazione dei vettori e delle relative operazioni ad argomenti di matematica e di fisica.

Questo lavoro si propone di valorizzare il calcolo vettoriale nell'insegnamento della matematica, non relegandolo solo alla fisica, evidenziando il vantaggio di un suo utilizzo nell'affrontare diversi argomenti di matematica. Nelle conclusioni accenneremo ad alcuni problemi didattici che si possono presentare in questo percorso.

2. Cenni di storia del calcolo vettoriale e della sua 'fortuna' dal punto di vista didattico

Il tema dei vettori ha una storia di un paio di secoli, che non è molto lunga se paragonata con altri temi delle matematiche elementari studiati nelle scuole secondarie.

Occorre però citare alcuni matematici che si sono occupati dei vettori e del calcolo con i vettori: Michel Chasles (1793-1880), William R. Hamilton (1805-1865) e Hermann G. Grassmann (1809-1877).

Una formalizzazione del calcolo vettoriale si ha con Giuseppe Peano (1858-1932). Sembra che l'introduzione del concetto di spazio vettoriale risalga al matematico tedesco Hermann Weyl (1885-1955), che l'avrebbe introdotta negli anni Venti del secolo scorso.

Il calcolo tensoriale può essere considerato, nella storia della matematica, uno sviluppo del calcolo vettoriale; su questo calcolo è necessario citare almeno i due grandi matematici: Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1955). Il contributo di Ricci-Curbastro è da citare in particolare riguardo alla formulazione della Teoria della Relatività generale che, per stessa ammissione di Albert Einstein (1879-1955), è debitrice del calcolo tensoriale.

La storia della didattica di questo argomento, per quanto riguarda la scuola secondaria di II grado, deve citare almeno l'influenza del bourbakismo nei programmi di matematica introdotti in diversi paesi a partire dagli anni Settanta del secolo scorso. Secondo il gruppo Bourbaki (fondato nel 1935) la struttura di spazio vettoriale è a fondamento della geometria.

Le proposte della 'matematica moderna' degli anni Sessanta proponevano infatti di introdurre abbastanza presto – addirittura dai primi anni del liceo – la struttura di spazio vettoriale e di fondare lo studio della geometria su questa struttura. Una qualche traccia la si trova nei libri che sono stati pensati per le 'classi pilota' per la matematica, introdotte in modo sperimentale alla fine degli anni Sessanta in Italia (Linati, 2011). Questo modo di impostare la geometria, introdotto per la prima volta nelle scuole di influenza francese, ha provocato non pochi problemi ed ha portato a risultati negativi dal punto di vista didattico e alla convinzione che non si può introdurre l'algebra lineare prima della geometria euclidea classica.

3. Dai segmenti ai vettori

Il concetto di 'segmento' viene introdotto quando si affronta la Geometria euclidea (a livello di scuola secondaria di secondo grado, in generale, nel primo anno). Richiamiamo sinteticamente tale concetto.

Possiamo dire che (in base a postulati della geometria euclidea) ogni retta r è un insieme ordinato di punti e presi su r due punti distinti A, B esiste sempre almeno un punto C della retta r che precede A e segue B o che precede B e segue A (o impropriamente C sta fra A e B). Tenendo presente che ad ogni ordinamento corrisponde sempre un ordinamento opposto (ordine stretto, relazione transitiva e antiriflessiva), data una retta AB esistono su di essa due possibili ordinamenti dei suoi punti; quello per il quale A precede B e che si rappresenta come in figura 1

Figura 1

e quello per il quale B precede A e che si rappresenta come in figura 2.

Figura 2

Fissato uno dei due ordinamenti dei punti, si dice che la retta è orientata. A questo punto possiamo dire che:

se A e B sono due punti distinti di una retta r, il segmento che ha per estremi questi due punti è l'insieme dei punti che stanno fra A e B (estremi compresi)[19].

Quando si parla di segmenti 'uguali', a volte si intende che sono coincidenti, cioè il segmento AB (di estremi A e B) è uguale al segmento CD se A coincide con C e B con D o A coincide con D e B con C, mentre in altri casi si intende che sono isometrici o congruenti, cioè è possibile trasportare con un movimento rigido AB su CD, in modo che A coincida con C e B con D o viceversa (attenzione, non si parla di misura!).

[19] Non consideriamo segmenti aperti o semiaperti.

Per lunghezza si dovrebbe intendere ‘la proprietà comune’ all’insieme dei segmenti che sono uguali rispetto alla seconda definizione (cioè quelli congruenti)[20].

Quando si parla di misura di un segmento, si tratta di associare un numero alla lunghezza della quale fa parte quel segmento e questo numero non è unico, perché dipende da quella che si fissa come ‘unità di misura’.

In sostanza la lunghezza di un dato segmento è unica, mentre la misura dipende dall’unità scelta.

Nel linguaggio comune una misura di lunghezza si confonde con questa lunghezza mentre in matematica per misura si intende un numero reale. Quindi si dovrebbe distinguere tra segmento AB, lunghezza del segmento AB, misura della lunghezza del segmento AB. Si dovrebbe dire ad esempio che la misura in metri della lunghezza di AB (o semplicemente la misura di AB) è 3 e non il segmento AB misura 3 metri.

È consuetudine scrivere (impropriamente) $\overline{AB} = 3\ m$ per indicare che la misura in metri della lunghezza del segmento AB è 3, mentre è scorretto scrivere $AB=3\ m$![21].

Abbiamo detto che una retta può essere ‘percorsa’ in due sensi opposti l’uno all’altro (cioè sulla retta vi sono due ordinamenti dei suoi punti) e fissato uno di questi si dice che si è fissato un verso, cioè la retta viene considerata orientata. Nel linguaggio comune si confonde spesso ‘verso’ con ‘direzione’.

Per direzione si intende la ‘proprietà’ comune a rette parallele, cioè se due rette sono parallele si dice anche che hanno la stessa direzione, ossia una ‘direzione’ è una classe di equivalenza delle rette rispetto alla relazione di parallelismo.

Quindi il concetto di verso è relativo ad ogni singola retta, mentre la direzione coinvolge infinite rette (vedi figure 3 e 4).

In altri termini, ha senso chiedersi se due rette hanno la stessa direzione (o meglio se appartengono alla stessa direzione) e questo significa chiedersi se esse sono parallele, mentre non ha senso (in generale) chiedersi se due rette hanno lo stesso verso.

[20] Più precisamente, la relazione che associa due segmenti se sono congruenti, è una relazione di equivalenza nell’insieme dei segmenti del piano: una lunghezza e’ una classe di equivalenza di tale relazione.

[21] Nella ‘vita reale’ il concetto di segmento viene usato, a volte, a meno di ‘congruenze’ (ad esempio quando si riporta una scala in una piantina o in una carta geografica), a volte a meno di ‘identità’ (ad esempio nelle carte ferroviarie).

Nota. Si osservi che due rette sono sempre congruenti a differenza dei segmenti.

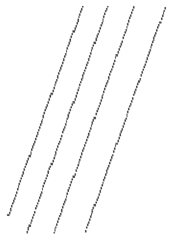


Figura 3

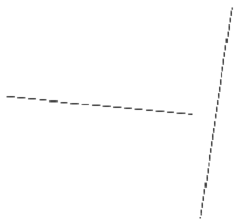


Figura 4

Ritorniamo ora ai segmenti e teniamo presente che il segmento *AB* è congruente (in particolare coincidente) al segmento *BA*.

Consideriamo ora una coppia ordinata di punti (A,B) con $A \neq B$.

- (A,B) individua il segmento di estremi *A* e *B*
- (A,B) individua una direzione, quella della retta *AB*.
- (A,B) individua (fissa) sulla retta *AB* un orientamento (verso), quello secondo il quale *A* precede *B*.

Si usa la notazione $\overrightarrow{AB}$ per indicare la coppia ordinata di punti *A* e *B* e si rappresenta graficamente come segue

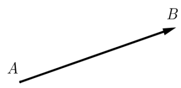


Figura 5

Una coppia ordinata (A,B), che, come detto, si indica anche con $\overrightarrow{AB}$, si dice segmento orientato o vettore applicato di primo estremo (o punto di applicazione) *A* e secondo estremo *B*.

Un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ individua:
- il punto di applicazione (dell'esempio è *A*)
- una direzione (quella della retta *AB*)
- un verso (quello in cui *A* precede *B* sulla retta orientata *AB*)
- il 'modulo' (misura di *AB* rispetto ad una unità fissata)[22].

[22] Nella vita reale i 'segmenti con la punta', come in Figura 5, vengono usati anche con un significato diverso, si pensi ad esempio alle indicazioni stradali; in questi casi quel 'segmento' individua soltanto una direzione e un verso.

Notare che i vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono uguali se le coppie ordinate (A,B) e (C,D) sono uguali, ossia solo se $A \equiv C$ e $B \equiv D$.

Nelle scienze applicate (ad esempio in Fisica) non sempre è necessario conoscere il punto di applicazione, ma servono solo le altre informazioni. Più precisamente diremo che la coppia (A,B) è equipollente alla coppia (C,D) o che il vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ è equipollente al vettore applicato $\overrightarrow{CD}$ se

- la retta *AB* è parallela alla retta *CD* (stessa direzione)
- le rette *AB* e *CD* hanno lo stesso verso, cioè se *ABDC* è un quadrilatero non intrecciato
- il segmento *AB* è congruente al segmento *CD*.

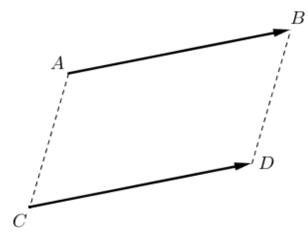


Figura 6

Questa è una relazione di equivalenza nell'insieme dei vettori applicati: ogni classe di equivalenza si chiama 'vettore libero' o semplicemente 'vettore'. Quindi due 'vettori' sono uguali se sono la stessa classe di equivalenza[23].

Dalla definizione si nota che un vettore non è un numero, ma coinvolge anche i concetti di direzione e verso.

Se indichiamo con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ due vettori allora $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ se e soltanto se posto $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{v}_2 = \overrightarrow{A'B'}$, allora $ABB'A'$ è un parallelogramma, mentre come vettori applicati $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ se e solo se $A = A'$ e $B = B'$.

Osservazione. Se si considera l'insieme dei vettori del piano o dello spazio applicati in un fissato punto O, allora si ottiene un insieme di rappresentanti per tutti i vettori (liberi) del piano o dello spazio, cioè nella

[23] Un vettore (come classe di equivalenza) viene rappresentato da un qualunque vettore applicato che fa parte di quella classe di equivalenza. Questo procedimento e' analogo alla rappresentazione di un numero razionale (che e' una classe di equivalenza di frazioni equivalenti) e viene indicato con una delle frazioni (in generale quella irriducibile) che fa parte di tale classe.

classe dei rappresentanti di un vettore $\vec{v}$ ne esiste uno ed uno solo avente origine nel fissato punto O.

Il vettore $\overrightarrow{AB}$ si indica anche con $B-A$.

Il vettore $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\ldots$ si dice vettore nullo e si indica con $\vec{0}$ (è l'unico vettore di cui non si definisce né il verso né la direzione).

Ad ogni vettore $\vec{v}$ si può associare la traslazione che associa ad ogni punto *A* (del piano o dello spazio) il punto *B* in modo che $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ e questo giustifica la scrittura $B-A=\vec{v}$ che diventa anche $B=A+\vec{v}$ [vedi figura 7].

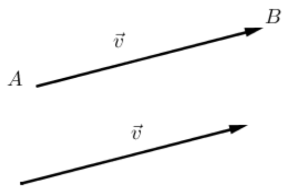


Figura 7

Due vettori si dicono paralleli se hanno la stessa direzione (cioè le rette che li contengono sono parallele).

Due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ hanno lo stesso modulo se, indicati con $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$ due loro rappresentanti, si ha che i segmenti A_1B_1 e A_2B_2 sono congruenti.

Due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ hanno lo stesso verso se sono paralleli e presi due rappresentanti che abbiano il primo estremo in comune, ad esempio $\vec{v}_1=\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\vec{v}_2=\overrightarrow{A_1B_2}$, risulta che B_1, B_2 appartengono alla stessa semiretta di origine A_1 (in caso contrario si dice che hanno verso opposto).

4. Operazioni nell'insieme dei vettori

Introduciamo ora due operazioni molto importanti nelle applicazioni.

4.1 Addizione di vettori

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori non nulli. Fissato il punto *A* (qualsiasi) troviamo i punti *B* e *C* in modo che $\overrightarrow{AB}=\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{BC}=\vec{v}_2$ (vedi figura 8).

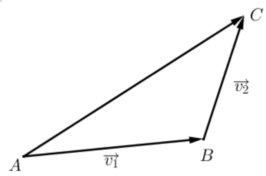


Figura 8

Il vettore $\overrightarrow{AC}$ ottenuto con il metodo “punta-coda”, si dice somma di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e si indica con $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Se $\vec{v}_1 = \vec{0}$, si pone $\vec{0} + \vec{v}_2 = \vec{v}_2$ e analogamente si pone $\vec{v}_1 + \vec{0} = \vec{v}_1$.

È facile verificare che questa è una buona definizione, cioè non dipende dai rappresentanti scelti.

Si noti che la somma di vettori è un vettore, cioè l’addizione è una operazione binaria nell’insieme dei vettori.

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà (per ogni $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vettori)

1) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$

2) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$

3) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (-$\vec{v}$ è il vettore che ha la stessa direzione, stesso modulo e verso opposto a quello di $\vec{v}$)

Osservazione. La somma di vettori si può anche eseguire con la ‘regola del parallelogramma’ (vedi figura 9).

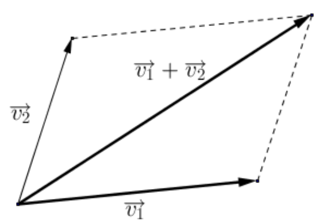


Figura 9

Si noti che il metodo ‘punta-coda’ per la somma di vettori si applica anche se i vettori sono paralleli, mentre la ‘regola del parallelogramma’ richiede che i vettori non siano paralleli.

Osservazione. Il vettore $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ si indica anche con $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ e si dice differenza di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

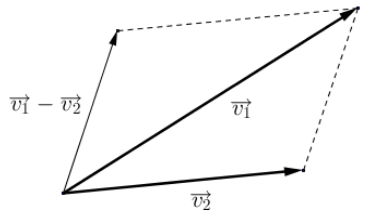


Figura 10

Un esempio ben noto in fisica, è quello relativo alla somma di due forze applicate in uno stesso punto.

4.2 Prodotto di un numero per un vettore

Un'altra importante operazione coinvolge vettori e numeri reali (in tale contesto questi ultimi si dicono anche scalari).

Dato un numero reale $\alpha \neq 0$ e un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, per prodotto dello scalare α per il vettore $\vec{v}$ si intende il vettore che si indica con $\alpha\vec{v}$, definito come segue:
- la direzione di $\alpha\vec{v}$ è la stessa di $\vec{v}$,
- il modulo di $\alpha\vec{v}$ è uguale a $|\alpha|$ per il modulo di $\vec{v}$,
- il verso di $\alpha\vec{v}$ coincide con quello di $\vec{v}$ se α>0 ed è il suo opposto se α<0,
- si pone per definizione $0\vec{v} = \vec{0}$ per ogni vettore $\vec{v}$ e $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ per ogni $\alpha \in R$.

Si può dimostrare che si tratta di una 'buona definizione', ossia se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sono rappresentanti di uno stesso vettore, allora $\alpha\vec{v}_1$ e $\alpha\vec{v}_2$ sono rappresentanti di uno stesso vettore.

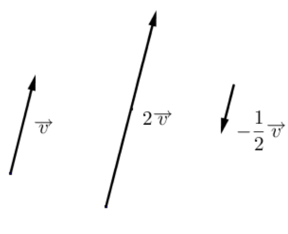


Figura 11

Nelle scienze applicate si parla di grandezze vettoriali se queste sono rappresentabili con vettori, ad esempio le forze, mentre si parla di grandezze scalari se esse sono rappresentabili con numeri, ad esempio le masse. Un classico esempio che coinvolge il prodotto tra uno scalare e un vettore è dato dalla nota relazione $\vec{F} = m\ \vec{a}$ (II principio della dinamica o legge di Newton).

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà (per ogni $\alpha, \beta \in R, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ vettori)

5) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

6) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

7) $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$

8) $1\vec{v} = \vec{v}$.

Si dice anche, impropriamente, che $\alpha\vec{v}$ è 'multiplo' di $\vec{v}$ secondo α.

Si noti che il simbolo '+' è usato sia per la somma di vettori che per la somma di scalari, con significato però completamente diverso; non è necessario usare simboli diversi perché dal contesto è implicito di quale operazione si tratta. Analogamente per il prodotto.

Poiché l'insieme dei vettori con le operazioni introdotte di somma di vettori e di prodotto di uno scalare per un vettore ha le proprietà 1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), si dice che tale insieme è un esempio di spazio vettoriale sul 'campo' ***R*** dei numeri reali**.**

Se si considera l'insieme dei vettori del piano, tale spazio vettoriale si indica con V_2, mentre se si considera l'insieme dei vettori dello spazio si indica con V_3.

Un esempio 'più intuitivo' di spazio vettoriale è costituito dall'insieme dei vettori del piano o dello spazio applicati ad un fissato punto *O* con le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare per un vettore (e questo insieme contiene uno ed un solo rappresentante di ogni vettore libero). Si noti che la somma di due vettori applicati in *O* è ancora un vettore applicato in *O* (se ottenuto con la regola del parallelogramma) e che il prodotto di uno scalare per un vettore applicato in *O* è ancora un vettore applicato in *O* .

Con le operazioni introdotte si possono costruire espressioni del tipo: $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ e più in generale, dati *n* scalari $a_1, a_2, ..., a_n$ e *n* vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ (con $n \geq 1$), $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$ il cui risultato è ancora un vettore (si noti che non si 'mettono' le parentesi perché la somma di vettori gode della proprietà associativa).

Il vettore $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$ si dice combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ con scalari $a_1, a_2, ..., a_n$.

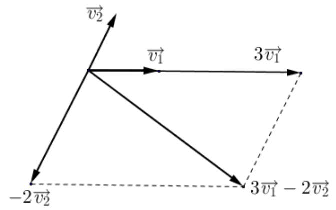


Figura 12

È evidente che $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n = \vec{0}$.

Ma se $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ cosa si può dire di $a_1, a_2, ..., a_n$?

Si possono presentare due casi:

- necessariamente $a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ ...,\ a_n = 0$, vedi ad esempio $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ come in figura 13 dove sono rappresentati due vettori non nulli e non paralleli.

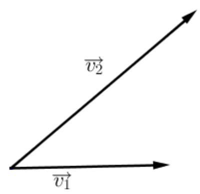


Figura 13

In questo caso, se fosse $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, dovrebbe essere $a_1\vec{v}_1 = -a_2\vec{v}_2$ e perciò $a_1 = 0, a_2 = 0$.

- esiste almeno uno degli a_i che non è uguale a zero. Ad esempio se prendiamo $\vec{v}_1, \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ e un terzo vettore $\vec{v}_3$ è sicuramente

$$2\vec{v}_1 + (-1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}.$$

Nel primo caso si dice che i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti, nel secondo che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Più precisamente: i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ $(n \geq 1)$ si dicono

a) linearmente dipendenti se esistono degli scalari non tutti nulli $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ tali che $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$,

b) linearmente indipendenti se si verifica che $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ solo se $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sono tutti nulli[24].

L'espressione 'linearmente dipendente' deriva dal fatto che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti (*n>1*) se e solo se almeno un vettore si può ottenere come combinazione lineare degli altri. Infatti supponiamo che esistano $a_1, a_2, ..., a_n$ non tutti nulli tali che $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Se ad esempio $a_1 \neq 0$, risulta

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\vec{v}_2 + ... + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right)\vec{v}_n .$$

Viceversa se $\vec{v}_1 = \alpha_2\vec{v}_2 + ... + \alpha_n\vec{v}_n$, allora

$$1 \cdot \vec{v}_1 + (-\alpha_2)\vec{v}_2 + ... + (-\alpha_n)\vec{v}_n = \vec{0} .$$

È evidente che due vettori sono linearmente dipendenti se e soltanto se uno è 'multiplo' dell'altro, mentre tre vettori sono linearmente dipendenti se e soltanto se sono complanari (nel senso che presi tre rappresentanti con il primo estremo in comune, essi appartengono ad uno stesso piano).

È possibile verificare che, fissati due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ non nulli e non paralleli, applicati in *O*, ogni altro vettore $\vec{v}$ del piano individuato da $O, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ applicato in *O* si può ottenere in un unico modo come combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, cioè esistono e sono unici due scalari a_1, a_2 tali che $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$.

Quanto detto corrisponde geometricamente alla possibilità di scomporre in modo unico ogni vettore del piano secondo due direzioni diverse, comunque assegnate, individuate dai vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (figura 14).

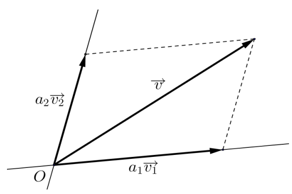


Figura 14

[24] Le definizioni a) e b) di vettori linearmente dipendenti (rispettivamente linearmente indipendenti) richiedono un uso appropriato dei quantificatori 'esiste', 'per ogni' e delle loro negazioni, e questo crea spesso, negli allievi, difficoltà di carattere didattico.

$a_1\vec{v}_1$, $a_2\vec{v}_2$ si dicono le componenti di $\vec{v}$ secondo le direzioni assegnate.

Osservazione. Si noti che un solo vettore non nullo $\vec{v}_1$ non permetterebbe di ottenere come combinazione lineare tutti i vettori del piano (ma solo quelli della retta che lo contiene), mentre con tre vettori non nulli e due dei quali non paralleli, sarebbe possibile ottenere tutti i vettori del piano, ma non si avrebbe l'unicità. Ad esempio dati due vettori non nulli e non paralleli $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, risulta $\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3$, ma anche $\vec{v}_3 = 1\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$.

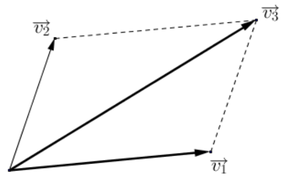


Figura 15

Analogamente a quanto detto per i vettori del piano, fissando tre vettori nello spazio $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, non nulli e non complanari, applicati in O, ogni vettore dello spazio applicato in O si può scomporre in un unico modo secondo le tre direzioni individuate da $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ (vedi figura 16).

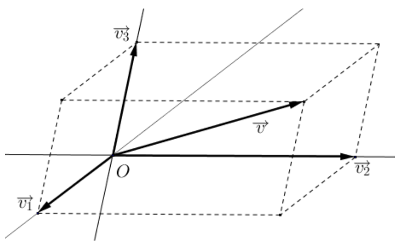


Figura 16

Usualmente si fissano nel piano due vettori $\vec{i}, \vec{j}$ applicati in un punto O, perpendicolari fra di loro e di modulo 1 e perciò ogni vettore $\vec{v}$ si può rappresentare in un unico modo come segue: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ o nello *spazio* $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono vettori a due a due perpendicolari e di modulo 1. Si dice che $(\vec{i}, \vec{j})$ è una coppia di vettori che forma una base ortonormale per lo spazio vettoriale dei vettori del piano e che

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una terna di vettori che forma una base ortonormale per lo spazio vettoriale dei vettori dello spazio. Gli scalari *x,y,z* si dicono componenti di $\vec{v}$ secondo i vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (è più corretto dire che (*x,y,z*) è la terna delle coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ sono le componenti di $\vec{v}$ su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).[25]

Fissiamo ora nello spazio un sistema di riferimento *Oxyz* con *x,y,z* uscenti da *O*, aventi le direzioni di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente e orientati come $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e unità di misura uguale al modulo di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ si dicono versori degli assi (si considerano per comodità applicati in *O*).

Dato il punto *P*(*x,y,z*), risulta proprio $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Si noti che si possono ‘identificare’, in questo modo, punti dello spazio con vettori applicati in *O* e con terne di numeri, cioè $P \equiv \overrightarrow{OP} \equiv (x, y, z) \equiv \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (vedi figura 17).

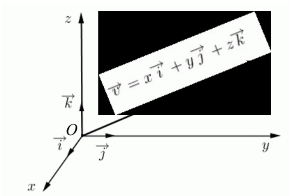


Figura 17

Se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, allora per il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ si ha

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} .$$

Abbiamo detto che per modulo di un vettore $\vec{v}$ si intende la misura della lunghezza del segmento che lo rappresenta (e non dipende dal vettore scelto nella classe di equivalenza). Il modulo (o la norma) di un vettore $\vec{v}$ si indica con $|\vec{v}|$ o $\|\vec{v}\|$. I vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ hanno modulo 1 e perciò si dicono vettori unità o versori.

Per angolo formato da due vettori non nulli $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ si intende l’angolo convesso formato da due semirette uscenti da uno stesso punto e parallele

---

[25] E’ facile verificare che se (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sono rispettivamente le coordinate dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, allora $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ sono le coordinate del vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e se $\alpha \in R$, $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ sono le coordinate di $\alpha \vec{v}_1$.

ai due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e orientate come $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (si scrive $\vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2$). Dalla definizione segue che $\vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \hat{} \vec{v}_1$.

Osservazione. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ è un vettore unità orientato come $\vec{v}$, cioè è un versore parallelo a $\vec{v}$.

Notare che $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$.

Osservazione. Se *P(x,y,z)* allora $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Se $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2 y_2, z_2)$ è

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \, .$$

4.3 Prodotto scalare di vettori

Una operazione importante nelle scienze applicate (vedi ad esempio il calcolo del lavoro di una forza) è quella di prodotto scalare.

Definizione. Per prodotto scalare di due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (del piano o dello spazio) si intende il numero (scalare) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ definito come segue:

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \; \|\vec{v}_2\| \; \cos \vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2$

Osservazione. Se indichiamo con $(\vec{v}_2)_1$ il vettore proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$, possiamo affermare che il valore assoluto di $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ è il prodotto del modulo del primo vettore per il modulo del vettore proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$.

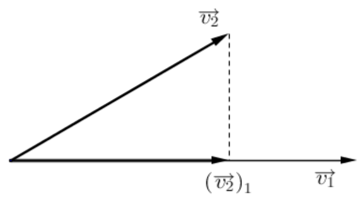


Figura 18

Infatti se si considera il versore di $\vec{v}_1$, cioè $\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$, allora $(\vec{v}_2)_1 = \|\vec{v}_2\| \cos \vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2 \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$, il cui modulo è proprio $\|\vec{v}_2\| \,|\cos \vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2|$ e perciò $|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \,|\cos \vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2|$.

Si può dimostrare che valgono le seguenti proprietà (per ogni $r \in R, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$)

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$

b) $(r\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot (r\vec{v}_2) = r(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

c) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ per ogni vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Si può inoltre dimostrare che se

$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$,

ossia $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$,

allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Questa è una proprietà molto importante, in quanto permette di calcolare il prodotto scalare di due vettori in funzione soltanto delle coordinate di essi (senza quindi 'conoscere' l'angolo da essi formato).

Un'importante applicazione in fisica del prodotto scalare consiste nel calcolo del lavoro compiuto da una forza per uno spostamento $\vec{s}$ mediante la nota formula $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Osservazione. Abbiamo visto che, se $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli se e soltanto se esiste $\alpha \in R$ tale che $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2$. Si ha invece, dalla definizione di prodotto scalare, che $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sono perpendicolari se e soltanto se $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

4.4 Prodotto vettoriale di vettori

Quella che segue è una ulteriore operazione, molto usata nelle scienze applicate (vedi ad esempio il calcolo del momento di una forza rispetto ad un punto). Diamo prima la seguente

Definizione. Una terna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di vettori non nulli dello spazio si dice destrorsa (sinistrorsa) quando applicati in uno stesso punto *O* i tre vettori, un osservatore posto come $\vec{v}_3$ vede ruotare $\vec{v}_1$ per sovrapporsi a $\vec{v}_2$ descrivendo l'angolo convesso $\vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2$ in senso antiorario (orario)

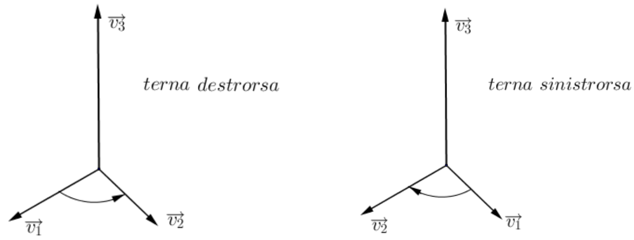


Figura 19

Diamo ora la definizione di prodotto vettoriale.
Definizione. Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori dello spazio applicati in *O*, non nulli e non paralleli. Per prodotto vettoriale di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ si intende il vettore indicato con $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ il cui modulo è dato da $\|\vec{v}_1\| \; \|\vec{v}_2\| \sin \vec{v}_1 \hat{} \vec{v}_2$, la direzione è quella della retta (passante per *O*) perpendicolare al piano individuato dai due vettori ed il verso è tale che la terna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ sia destrorsa.
Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli (in particolare se uno è nullo) si pone $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$.
Osservazione. Dalla definizione segue che se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono vettori non nulli allora $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$ se e soltanto se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli.
Osservazione. Si noti che il modulo di $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ è l'area del parallelogramma $OA_1A_3A_2$ avente come lati consecutivi i vettori $\overrightarrow{OA_1} = \vec{v}_1$ e $\overrightarrow{OA_2} = \vec{v}_2$ (vedi figura 20).

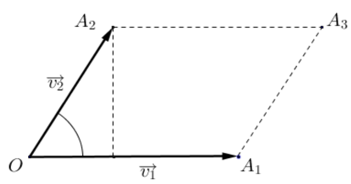


Figura 20

Si può dimostrare che il prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà (per ogni $r \in R$ e per ogni $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ vettori dello spazio):

a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)$
b) $(r\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = r(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \times (r\vec{v}_2)$
c) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v} + \vec{v}_2 \times \vec{v}$
$\vec{v} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v} \times \vec{v}_1 + \vec{v} \times \vec{v}_2$

Osservazione. Di solito si considera la terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ destrorsa e quindi anche il riferimento *Oxyz* è destrorso e perciò

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Il prodotto vettoriale di $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (come il prodotto scalare) si può calcolare in funzione delle coordinate dei due vettori. Precisamente, se
$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e
$\vec{v}_2 = \overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$
allora $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (svolgendo i calcoli e tenendo presente le proprietà del prodotto vettoriale) si può calcolare mediante il determinante formale (o simbolico)

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

Si tenga presente che queste operazioni tra vettori vengono affrontate (di solito) dopo aver introdotto il concetto di matrice e di determinante (almeno per le matrici di ordine due e tre).

È importante notare che il prodotto scalare si può definire sia per vettori di un piano che dello spazio, mentre il prodotto vettoriale richiede di considerare solo vettori dello spazio. Inoltre il prodotto scalare di due vettori è un numero reale (uno scalare), mentre il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore (perpendicolare al piano individuato da quelli dati).

4.5 Prodotto misto di vettori

Applicando il prodotto vettoriale e il prodotto scalare, si può introdurre una ulteriore operazione che agisce su tre vettori.

Precisamente il prodotto misto di tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ (nell'ordine) è lo scalare (numero reale) dato da $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$[26] e tenendo presente le rappresentazioni del prodotto scalare e del prodotto vettoriale in termini delle coordinate dei vettori, si ha che, se $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, allora

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Osservazione. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \neq \vec{0}$, risulta $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 0$ se $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, cioè se $\vec{v}_1$ è parallelo al piano individuato da $\vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Osservazione. Il valore assoluto di $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ è uguale al volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ (vedi figura 21).

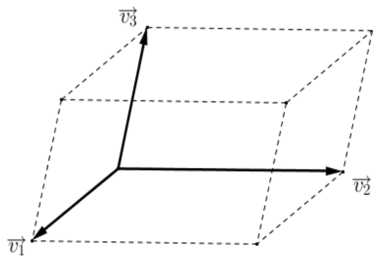


Figura 21

In tutta la trattazione, per semplicità, non abbiamo tenuto distinte le proprietà affini da quelle metriche ed è per questo che abbiamo considerato sempre sistemi di riferimento ortonormali.

5. Esempi di applicazioni del calcolo vettoriale alla geometria

In questo paragrafo proponiamo alcune applicazioni del calcolo vettoriale per ritrovare noti risultati di geometria sintetica e di geometria analitica.

---

[26] Si noti che la scrittura $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ ha senso solo se si 'legge' come $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$.

1) Consideriamo nel piano un quadrilatero convesso *ABCD* e dimostriamo che il quadrilatero *MNPQ*, ottenuto congiungendo i punti medi dei lati del quadrilatero, è un parallelogramma (vedi figura 22).

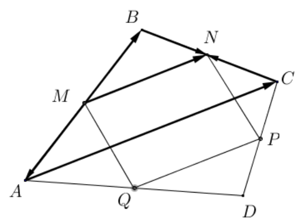


Figura 22

Risulta

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$$

da cui

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BN} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MN}$$

e quindi in definitiva

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$$

e questo ci dice che *AC* e *MN* sono paralleli e la misura di *AC* è il doppio di quella di *MN*. Procedendo adesso nello stesso modo considerando i punti medi *P* e *Q* rispettivamente dei lati *CD* e *AD* del quadrilatero, si ottiene che *PQ* è parallelo ad *AC* e che la misura di *AC* è il doppio di quella di *PQ*. In conclusione il quadrilatero *MNPQ* ha due lati opposti paralleli (perché entrambi paralleli ad *AC*) ed uguali (perché entrambi uguali alla metà di *AC*) ed è quindi un parallelogramma.

2) Ricaviamo ora l'equazione della retta nel piano. Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxy* (*x* e *y* ortogonali e stessa unità di misura sugli assi). Abbiamo visto che si può "identificare" un punto *P* con le sue coordinate (x, y) e con il vettore $\overrightarrow{OP}$.
Una retta *r* nel piano può essere individuata da due suoi punti distinti P_1, P_2 o da un suo punto P_1 e da un vettore $\vec{v} = (\ell, m) \neq (0,0)$ al quale la retta *r* è parallela.
Sia *r* la retta passante per $P_1(x_1, y_1)$ e parallela a $\vec{v} = (\ell, m) \neq (0,0)$. Un punto $P(x, y) \in r$ se e soltanto se $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$ (vedi figura 23).

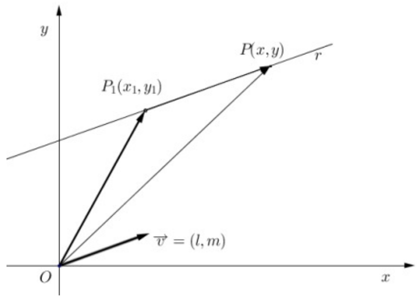


Figura 23

Poiché $\overrightarrow{P_1P} \parallel \vec{v}$[27], esiste $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}$ tale che $\overrightarrow{P_1P} = t\vec{v}$, quindi $P(x,y) \in r$ se e soltanto se $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t\vec{v}$, se e soltanto se $(x,y) = (x_1, y_1) + t(\ell, m)$ se e soltanto se $\begin{cases} x = x_1 + t\ell \\ y = y_1 + tm \end{cases}$ e queste sono le equazioni 'parametriche' della retta *r* (il parametro è *t*).

Esempio. Se $P_1(2,3)$ e $\vec{v} = (5,-4)$ risulta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$. Al variare di *t* si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti di *r*. Il generico punto di *r* è $P(2+5t, 3-4t)$ $(t \in R)$.

Dalle equazioni $\begin{cases} x = x_1 + t\ell \\ y = y_1 + tm \end{cases}$ ricavando *t* da entrambe ed uguagliando le espressioni ottenute si ricava, se $\ell \neq 0, m \neq 0$, $\dfrac{x - x_1}{\ell} = \dfrac{y - y_1}{m}$ e questa è 'una' equazione cartesiana della retta passante per *P* e parallela a $\vec{v}$.

Osservazione. Se $\ell = 0$ l'equazione della retta risulta $x = x_1$ e si ricava direttamente, analogamente se $m = 0$ l'equazione risulta $y = y_1$. Se *r* è la retta passante per P_1, P_2 (*r* non parallela ad alcun asse) allora un vettore $\vec{v}$ parallelo a *r* è $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e perciò l'equazione di *r* si può scrivere nella forma $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

[27] Con il simbolo $\parallel$ indichiamo la relazione di parallelismo e con il simbolo $\perp$ quella di perpendicolarità.

Partendo poi da $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}$, svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione $mx-\ell y+\ell y_1-mx_1=0$, cioè si ottiene un'equazione del tipo $ax+by+c=0$ (con a,b non entrambi nulli).

Si dimostra poi che ogni equazione del tipo $ax+by+c=0$ (con a,b non entrambi nulli) rappresenta una retta e, tenendo presente che (l,m) è un vettore parallelo alla retta, si ha che $r\equiv ax+by+c=0$ è parallela al vettore $\vec{v}(b,-a)$.

3) Sfruttando quest'ultima proprietà si ricava che se $r\equiv ax+by+c=0$ allora r è parallela a $\vec{v}_r(b,-a)$ e se $s\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ allora s è parallela a $\vec{v}_s(b_1,-a_1)$. Ne consegue che

i) $r\parallel s \Leftrightarrow \vec{v}_r\parallel\vec{v}_s \Leftrightarrow \exists\alpha\neq 0:\vec{v}_r=\alpha\vec{v}_s \Leftrightarrow \exists\alpha\neq 0:(b,-a)=\alpha(b_1,-a_1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\alpha\neq 0:\begin{cases} b=\alpha b_1\\ a=\alpha a_1\end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}(a_1,b_1\neq 0)$

In conclusione le rette $r\equiv ax+by+c=0$ e $s\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ sono parallele $\Leftrightarrow \exists\alpha\neq 0:\begin{cases} b=\alpha b_1\\ a=\alpha a_1\end{cases}\Leftrightarrow$ (impropriamente) $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$.

ii) $r\perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r\perp\vec{v}_s \Leftrightarrow \vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0 \Leftrightarrow (b,-a)\cdot(b_1,-a_1)=0\Leftrightarrow aa_1+bb_1=0$

In conclusione le rette $r\equiv ax+by+c=0$ e $s\equiv a_1x+b_1y+c_1=0$ sono perpendicolari $\Leftrightarrow aa_1+bb_1=0$.

Applicando queste formule risulta immediato**:**

a) verificare che l'equazione della retta t passante per $P_0(x_0,y_0)$ e parallela a $r\equiv ax+by+c=0$ è $ax+by-ax_0-by_0=0$, in quanto se $t||r$ allora possiamo scegliere i coefficienti delle incognite coincidenti con quelli di r, quindi $t\equiv ax+by+...=0$. Il termine noto deve poi rendere una identità l'equazione ottenuta sostituendo x e y con x_0 e y_0 rispettivamente, cioè esso dovrà essere $-ax_0-by_0$,

b) verificare che l'equazione della retta t passante per $P_0(x_0,y_0)$ e perpendicolare a $r\equiv ax+by+c=0$ è $t\equiv -bx+ay+bx_0-ay_0=0$, in quanto il vettore $(-b,a)$ è perpendicolare ad (a,b), poiché $(a,b)\cdot(b,-a)=0$, quindi $t\equiv -bx+ay+...=0$. Il termine noto deve poi rendere una identità l'equazione ottenuta sostituendo x e y con x_0 e y_0 rispettivamente, cioè esso dovrà essere $bx_0 - ay_0$.

Osservazione. Se $r \equiv ax + by + c = 0$ e r non è parallela all'asse y, cioè $b \neq 0$, allora si può scrivere $r \equiv y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ da cui $y=kx+q$.

Qual è il significato di k?

Risulta $r \equiv kx - y + q = 0$ perciò $r \parallel \vec{v}(1,k)$ ed è per questo che k viene anche detto coefficiente angolare della retta r. Quindi se $r \equiv y = kx + q$ e $s \equiv y = k'x + q'$, allora

$r \parallel s \Leftrightarrow (1,k) \parallel (1,k')$ e quindi $r \parallel s \Leftrightarrow k = k'$, mentre

$r \perp s \Leftrightarrow (1,k) \perp (1,k') \Leftrightarrow 1 + kk' = 0$ e quindi $r \perp s \Leftrightarrow kk' = -1$.

4) Abbiamo visto che poiché $r \equiv ax + by + c = 0$ è parallela a $\vec{v}(b,-a)$, allora $r \perp \vec{v}(a,b)$, ossia (a,b) rappresenta un vettore perpendicolare a r.

Sfruttando quest'ultima proprietà e tenendo presente che se $\vec{w}$ è un versore allora $|\vec{v} \cdot \vec{w}|$ è il modulo del vettore proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$ e che se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ allora

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)$$

è un versore parallelo e concorde a $\vec{u}$, si può ricavare la formula della distanza punto-retta. Se $P_0(x_0, y_0)$ e $r \equiv ax + by + c = 0$, allora $d(P_0, r) = |\overrightarrow{P_0Q}|$, dove Q è il piede della perpendicolare condotta da P_0 su r (vedi figura 24) .

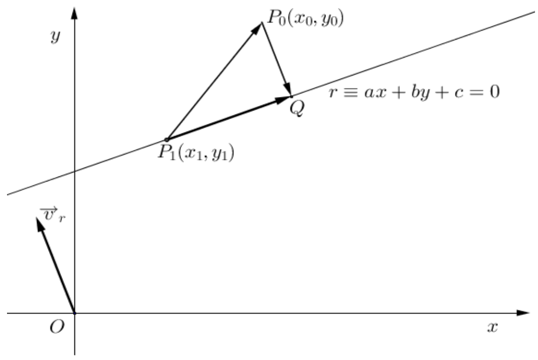


Figura 24

Sappiamo che $r \equiv ax + by + c = 0$ è perpendicolare ad (a,b), quindi $\vec{v}_r = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ è un versore perpendicolare ad *r*.

Segue che $d(P_0, r) = d(P_0, Q) = |\overrightarrow{P_oQ}|$, ma $|\overrightarrow{P_oQ}|$ è uguale al modulo del vettore proiezione di $\overrightarrow{P_1P_o} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ (dove P_1 è un generico punto della retta *r*) su un versore perpendicolare ad *r*, ad esempio $\vec{v}_r$. Quindi

$$d(P_0, r) = \left| (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right| = \left| \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

Ma $P(x_1, y_1) \in r \Leftrightarrow ax_1 + by_1 + c = 0 \Leftrightarrow ax_1 + by_1 = -c$ e sostituendo si ottiene $= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$ e in definitiva

$$d(P_0, r) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5) Utilizzando il prodotto vettoriale è possibile ricavare l'area del triangolo di vertici assegnati $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$. Abbiamo visto che $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$ è l'area del parallelogramma 'costruito' con $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

L'area A del triangolo è la metà di quella del parallelogramma costruito con $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (vedi figura 25).

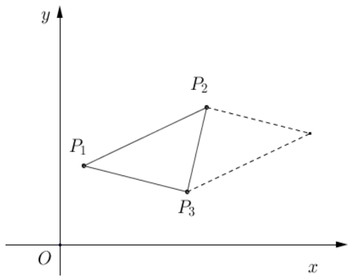


Figura 25

Quindi, immergendo il piano *Oxy* nello spazio *Oxyz* si ha $P_1(x_1, y_1, 0), P_2(x_2, y_2, 0), P_3(x_3, y_3, 0)$ e pertanto

$$A = \frac{1}{2} | \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} | = \frac{1}{2} | (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0) \times (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0) | =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| 0\vec{i} + 0\vec{j} + [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]\vec{k} \right|$$

e quindi risulta

$$A = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| .$$

Qualora si affrontassero anche argomenti di geometria analitica dello spazio (rette, piani, ecc.) - argomento previsto in tutti i licei in base alle Indicazioni nazionali del 2010 - si potrebbero proporre altri argomenti sempre da affrontare con l'uso dei vettori e delle operazioni tra vettori, ad esempio distanza punto-piano, condizione di complanarità di rette, oltre alle condizioni di perpendicolarità e parallelismo retta-retta, piano-piano, retta-piano. Per ulteriori approfondimenti si veda Mazzanti-Roselli (1996) e per alcune proposte didattiche con l'uso degli strumenti informatici si veda Boieri-Tomasi (2009).

6. Conclusioni

In questo articolo abbiamo tentato di proporre una valorizzazione del metodo vettoriale nell'insegnamento della matematica, non relegandolo solo alla fisica, evidenziando il vantaggio di un suo utilizzo - ovviamente non esclusivo - nell'affrontare diversi argomenti di matematica. Siamo tuttavia consapevoli che il metodo vettoriale, pur essendo molto efficace ed elegante, richieda agli studenti maggiori capacità di astrazione rispetto ai metodi che si usano di solito. Pertanto questo metodo andrebbe proposto con molta gradualità e solo dopo aver introdotto alcuni argomenti utilizzando i metodi più usuali. In questo articolo il tema viene proposto in modo 'unitario', ma il docente lo può utilizzare in tempi diversi a seconda dei temi introdotti perché permette di stabilire profonde relazioni e collegamenti tra argomenti di algebra ed applicazioni, non solo in fisica. Particolarmente importante in questo percorso didattico è introdurre anche dei problemi e degli esempi che facciano apprezzare agli studenti la potenza del metodo vettoriale nell'affrontare alcuni problemi di matematica oltre a quelli applicativi.

Bibliografia

Baruk, S. (1998), *Dizionario di Matematica Elementare*, edizione italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, Bologna: Zanichelli.

Boieri, P., Tomasi, L. (2009), *In laboratorio con Cabri 3D, 25 schede di geometria dello spazio*, Torino: Loescher.

Mazzanti, G., Roselli, V. (1996), *Elementi di algebra lineare e geometria analitica*, Bologna: Pitagora.

Lamberti, L., Mereu, L., Nanni, A. (2002), *Lezioni di matematica*, vol. 2, Milano: Etas Libri.

Linati, P. (2011), *L'algoritmo delle occasioni perdute. La matematica nella scuola della seconda metà del Novecento*, Trento: Erickson.

Villani, V. (2006), *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Geometria)*, Bologna: Pitagora.

Zoccante, S. (2007), Geometria vettoriale, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 30 A-B, pp. 763-777.

Introduzione al concetto di probabilità nella scuola secondaria superiore

Paola Vighi(*)

1. Introduzione

Il presente lavoro documenta alcune riflessioni, attività e proposte sull'insegnamento della probabilità, in particolare sull'introduzione al concetto di probabilità, elaborate dall'autore nell'ambito delle lezioni sul tema, svolte presso la SSIS (Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario) di Parma, indirizzo FIM (Fisico-Informatico-Matematico) rivolte a futuri docenti nelle aree A047 (Matematica) e A049 (Matematica e Fisica).

Innanzitutto riflettiamo sulla seguente affermazione:

> Ci sono […] nella storia di ogni docente, settori della conoscenza poco rielaborati, poco sottoposti alla verifica critica provocata dal ripensamento personale o dalla curiosità insistente e tenace di qualche allievo: per i matematici […] una di queste isole poco esplorate porta il nome di *Probabilità* (Branda e Arnaldi Suria, 1998).

Il rapporto degli insegnanti con il tema probabilità è solitamente difficile per diversi motivi, che cerchiamo di illustrare in breve. Normalmente nei piani di studio universitari si può inserire al massimo un corso di probabilità oppure di statistica, come facoltativo; inoltre spesso il corso si basa su aspetti teorici, in particolare sull'impostazione assiomatica di Kolmogorov. Ciò può comportare un mancato approfondimento del contenuto matematico, nonché una totale assenza di riflessione sugli aspetti didattici. Per questi ultimi, l'insegnante non può nemmeno far ricorso alla propria esperienza preuniversitaria in quanto il tema è di introduzione relativamente recente nei programmi scolastici. In effetti, l'esigenza di un

---

(*) Università degli Studi di Parma - Dipartimento di Matematica e Informatica (paola.vighi@unipr.it).

insegnamento della probabilità nella scuola secondaria superiore è stata solo recentemente sollecitata dall'introduzione dell'argomento nei test PISA (tema «Incertezza») e nelle Indicazioni per il Curricolo del 2007 (tema «Dati e previsioni»). Dunque non c'è nemmeno la possibilità di riferirsi alle esperienze scolastiche personali e di riprodurre uno stile di insegnamento conosciuto sui banchi di scuola, seguendo l'atteggiamento dell'«insegnare nel modo in cui è stato loro insegnato» che spesso viene adottato dai docenti.

C'è poi una caratteristica intrinseca al tema, il trattamento delle situazioni di incertezza, che contrasta con la mentalità deterministica che gli insegnanti di matematica applicano usualmente nel proprio lavoro. In altre parole, incontrano difficoltà nel passare da situazioni che si occupano di certezza a situazioni che hanno a che fare con incertezza, caso e pensiero non deterministico.

Dall'indagine conoscitiva svolta da Branda e Arnaldi Suria (1998) emergono aspetti quali l'interesse per l' argomento, ma anche l'insicurezza nell'insegnarlo, che conduce i docenti a dichiarare di lasciarlo come argomento da trattare «se rimane tempo», di aiutarsi con lucidi durante le lezioni per sentirsi più sicuri, di assegnare esercizi solo dopo averli svolti personalmente controllando il risultato sul libro.

2. Quadro teorico di riferimento

Stohl (2005) ha osservato che «il successo di qualunque curriculum relativo alla probabilità per sviluppare il ragionamento probabilistico degli studenti dipende notevolmente dalla comprensione della probabilità da parte degli insegnanti così come da una più profonda comprensione dei problemi come le 'misconcezioni' degli studenti»[28].

Il primo aspetto evidenziato da Stohl, la comprensione della probabilità, è relativo a quello che Shulman (1986) definisce «mathematical content knowledge», che riguarda la conoscenza dei concetti e dei processi relativi alla organizzazione ed alla struttura della matematica, mentre il secondo aspetto, le misconcezioni degli studenti, è relativo al «knowledge of student cognitions» che sempre Shulman (1987) associa alla consapevolezza delle concezioni degli studenti sul concetto. Lo stesso autore parla anche di «pedagogical content knowledge» (Shulman, 1986) che si può descrivere come la conoscenza di strategie, modelli ed esempi oppor-

[28] Nella stesura del presente quadro teorico ci si avvale della panoramica relativa alle ricerche sul tema, presentata da G.A. Jones, C.W.Langrall e E.S. Mooney in Lester (2007).

tuni per presentare il contenuto matematico.

In particolare, per quanto riguarda il 'mathematical content knowledge' dello specifico argomento 'probabilità', Kvatinsky e Even (2002) individuano tre aree critiche:

1. gli insegnanti devono comprendere le caratteristiche essenziali che rendono la probabilità diversa da altri campi della matematica (cioè il suo focus su incertezza e caso);
2. gli insegnanti dovrebbero comprendere gli aspetti della matematica che supportano il pensiero probabilistico e quelli che lo inibiscono;
3. gli insegnanti devono comprendere il potere della probabilità nell'occuparsi di situazioni della vita quotidiana.

In altre parole, i docenti devono per primi 'superare il problema dell'incertezza', affrontare quello dei legami tra matematica e probabilità, essere consapevoli delle potenzialità dell'argomento nelle applicazioni.

Per quanto riguarda il *pedagogical content knowledge,* la ricerca sottolinea l'importanza di creare effettivi ambienti di apprendimento della probabilità, di non trascurare lo stretto legame tra probabilità e statistica, ma soprattutto di usare una ben precisa serie di consegne per sviluppare i concetti di probabilità (Steinbring, 1991).

Infine il *knowledge of student cognitions* sul tema è stato oggetto di numerose ricerche; in particolare, (Fischbein, 1975) insiste sul ruolo dell'intuizione: è importante occuparsi delle intuizioni probabilistiche degli studenti e tenere presente che l'intuizione può portare a risposte errate. Gli insegnanti non solo devono conoscere le intuizioni degli studenti, ma soprattutto in classe devono confrontarle con quelle dei propri studenti (Steinbring, 1991).

3. L'antefatto

Nel programma del corso di Didattica della Matematica I/2 attivato presso la SSIS-Parma erano presenti i seguenti argomenti: Incertezza delle osservazioni e valutazioni di probabilità in senso classico e frequentista; eventi ed operazioni su eventi; additività della probabilità; condizionamento ed indipendenza.

Prima di affrontare il loro insegnamento, mi sono interrogata su quali fossero le conoscenze dei corsisti sul tema, soprattutto ho ritenuto opportuno cercare di comprendere le loro convinzioni sull'opportunità di insegnarlo. Poiché «Le convinzioni degli insegnanti sono una delle cause sia della discrepanza tra i programmi ufficiali e ciò che è effettivamente fatto in classe, sia della difficoltà nell'introdurre innovazioni nell'insegnamento» (Furinghetti, 2011), ho pensato di partire da quelle, presentando ai corsisti una sequenza di domande: hai studiato probabilità? hai insegnato probabilità? quali difficoltà presenta, secondo te, l'insegnamento di questo argomento? Perché il calcolo delle probabilità è entrato a far parte solo recentemente dei programmi scolastici? Il questionario mi ha permesso di indagare sulle cosiddette 'filosofie implicite' che, secondo Speranza (1997, p. 176), «È importante portare alla luce […], per costruire un più razionale quadro di riferimento per la conoscenza».

Nel caso specifico, il quadro che è emerso mi ha condotto a scegliere di approfondire l'introduzione al concetto, in quanto mi sono trovata di fronte a discenti che non avevano mai studiato il tema oppure che, pur avendolo studiato, non lo possedevano nei suoi aspetti basilari. In altre parole, conoscevano contenuti teorici, ma preferivano un approccio procedurale basato sul calcolo combinatorio e sull'uso di frazioni, grafi, diagrammi ad albero e così via, in quanto individuavano una notevole difficoltà, sia personale che per gli studenti, relativamente allo 'scoprire o intuire la probabilità di un evento'.

Ho scelto perciò con i corsisti della SSIS lo stesso approccio adottato con gli studenti universitari in diversi corsi da me tenuti, che ha come primo obiettivo 'imparare a pensare probabilisticamente'. Si tratta di un approccio che ripropone alcuni problemi che ho scelto per un duplice motivo: da una parte essi forniscono una giustificazione (di carattere storico-epistemologico) della resistenza che ancor oggi si nota nell'affrontare il tema, d'altra parte essi consentono un approccio motivante e accattivante, ma soprattutto opportuno e funzionale alla formazione del concetto di probabilità. Pertanto, nell'ottica di Steinbring (1991) ho predisposto una sequenza di quesiti, tutti molto noti e per la maggior parte tratti dalla storia della probabilità, per arrivare a concludere con un esempio relativamente recente, presentato in un gioco a premi televisivo statunitense, il cosiddetto 'dilemma di Monthy Hall'.

4. L'itinerario didattico

Inizialmente mi sono avvalsa del seguente brano ed ho chiesto di commentarlo:

> Nella sua accezione più restrittiva, si tratta di calcolare le probabilità di certi eventi a partire dalla probabilità di altri eventi: in genere di eventi complessi a partire da eventi semplici, per i quali si pensa di poter valutare direttamente

> la probabilità […]. Nella sua accezione più vasta, il calcolo delle probabilità non si limita a studiare le relazioni matematiche, ma si pone preliminarmente il problema di chiarire come dal concetto intuitivo si passa al modello matematico. (Dall'Aglio, 1987).

L'autore mette in evidenza una distinzione fondamentale: un conto è calcolare la probabilità di un evento mediante la definizione classica, esprimendola con frazioni o percentuali, ben altro conto è costruire il concetto di probabilità a partire dall'intuizione, per arrivare poi ad una formalizzazione e ad una teoria. Non è un caso che, quando l'argomento è stato introdotto nei programmi di scuola elementare del 1985/87, si sia parlato di «preparare nel bambino un terreno intuitivo su cui si possa, in una fase successiva, fondare l'analisi razionale delle situazioni di incertezza». L'introduzione del tema nei programmi di scuola media del 1979 aveva infatti avuto ricadute non sempre positive, in quanto nella pratica scolastica l'esecuzione di un problema sulla probabilità era spesso diventata un semplice esercizio sulle frazioni.

Allo scopo di 'porre in situazione' i corsisti SSIS ho predisposto e presentato una sequenza di problemi, chiedendo di risolverli, motivando le proprie soluzioni. Qui di seguito si riportano i problemi, le soluzioni, ma soprattutto si cercherà di descrivere gli atteggiamenti e le convinzioni dei corsisti, che sono stati oggetto di discussione in aula fino ad arrivare ad una rielaborazione e ad una sistemazione dei concetti coinvolti.

a) Il problema dei dadi.

Galileo (1564-1642) affronta il *Problema dei tre dadi*, che gli viene presentato da un amico, in questo modo:

> Con tre dadi si ottiene il 9 in sei modi diversi, così anche per il 10, eppure l'esperienza mi dice che il 10 viene più spesso del 9! (Boffa-Caredda, 1990).

In effetti, il 9 si può ottenere come somma di sei diverse terne di numeri: (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3). Il 10 si può ottenere a sua volta dalle sei terne seguenti: (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). L'amico di Galileo pensava che, essendovi in entrambi i casi sei possibili terne, i due eventi 'la somma dà 9' e 'la somma dà 10' dovessero avere la stessa probabilità, eppure la sua esperienza di incallito giocatore smentiva questo ragionamento. Come mai?

Commenti: Per sua natura il problema si presta ad essere trattato utilizzando la definizione classica di probabilità ed evidenzia l'importanza ed il ruolo del calcolo combinatorio in questo contesto. Trattandosi di un problema molto noto, alcuni corsisti conoscevano già la soluzione, altri l'hanno facilmente individuata collegandola al problema dei 'numeri ripetuti'. Io ho scelto di giustificarla con le parole di Galileo, come in (Boffa-Caredda, 1990, p. 46): «Abbiamo dunque sin qui dichiarato questi tre fondamenti: primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono di 3 numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, le triplicità che nascono da 2 numeri eguali e dal terzo differente, si producono in 3 maniere; terzo, quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti, si formano in 6 maniere. Da questi tre fondamenti agevolmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire in quante scoperte differenti, si possono formare tutti i numeri dei 3 dadi, [...]». Dopo che alcuni corsisti hanno calcolato le probabilità dei due eventi, rispettivamente 25/216 e 27/216, si è concluso che, trattandosi di una differenza «davvero piccola», all'epoca di Galileo (e di Cardano) il gioco d'azzardo doveva essere davvero molto praticato.

Dal punto di vista didattico, si è osservato che il 'problema di Galileo' può essere presentato in classe. Inizialmente si può notare che lanciando tre dadi e sommando i numeri che compaiono sulle loro facce si ottengono numeri compresi fra 3 e 18, che è poco probabile ottenere 3, che 3 e 18 hanno la stessa probabilità di presentarsi e così via. Si possono proporre confronti di probabilità, per passare poi al 'problema dei tre dadi' e, dopo che gli allievi avranno fornito le loro spiegazioni, si può presentare la soluzione trovata da Galileo. Quello che dovrebbe essere evidenziato, al di là del calcolo effettivo della probabilità di ciascun evento, è che la differenza fondamentale sta nel fatto che il 9 si può ottenere come 'tre volte 3', cioè come somma di tre numeri uguali, mentre questo non succede per il 10. Non si parlerà così esplicitamente di probabilità come rapporto, ma ci si limiterà ad osservare che, a parità di casi possibili, l'evento che si presenta in più modi distinti è anche quello più probabile.

b) Il problema della ripartizione della posta.

L'origine del calcolo delle probabilità viene abitualmente associata ad una data, il 1654, anno in cui Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) si scambiarono lettere sul *Problema del cavaliere de Méré* o *della ripartizione della posta*[29]. Il cavaliere de Méré era un gioca-

[29] Oggi non tutti gli storici concordano nell'individuare le origini del calcolo delle probabilità nel gioco d'azzardo e relativi problemi: a stimolarne lo sviluppo sarebbero state piuttosto esigenze di carattere economico. Nel XIV secolo, ad esempio, sorsero in Olanda ed in Italia le prime com-

tore d'azzardo, che si poneva il seguente problema:

> Se una partita viene interrotta prima della fine, come è corretto dividere la posta tra i giocatori? Presentiamo qui di seguito una versione semplificata del quesito. Supponiamo che i giocatori siano due, A e B, che il gioco si basi sul lancio di una moneta e che la posta sia di 64 monete. Il giocatore A vince se esce Testa, il giocatore B vince se esce Croce. Il gioco termina quando uno dei due ha realizzato cinque vittorie. Di fatto, il gioco viene interrotto dopo che A ha vinto 4 volte e B 3 volte. I due giocatori si mettono a discutere sulla ripartizione della posta … Quale potrebbe essere, secondo voi, un'equa ripartizione della posta?

Commenti: il pensiero deterministico porta alcuni corsisti a proporre di suddividere la posta dando 4/7 delle monete ad un giocatore e 3/7 all'altro[30], anche se il fatto che il numero delle monete sia 64, non divisibile per 7, fa venire qualche dubbio[31]. Qui il problema risiede nel basarsi su 'ciò che si è già verificato' piuttosto che 'su ciò che si verificherà', insomma nel tener conto del passato piuttosto che del futuro. Dal punto di vista didattico consigliamo anche in questo caso di esaminare i documenti pervenutici, in particolare di presentare e analizzare le soluzioni, metodologicamente diverse, di Fermat e Pascal, che possiamo così sintetizzare: Fermat risolve il problema usando il cosiddetto metodo delle «combinaisons», il ragionamento di Pascal è invece più di buon senso, anche se fa riferimento alle combinazioni[32], ed è questo: «Sono sicuro di avere 32 pistole, in quanto anche perdendo le ottengo; ma le altre 32 le potrei avere io o le potreste avere voi: il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 pistole a metà e datemi, oltre a ciò, le mie 32 pistole che mi sono assicurate.» (Marchini, 2011). Egli avrà, dunque, 48 pistole e l'altro 16 (la 'pistole' era la moneta dell'epoca).

Di fatto, anche se Pascal e Fermat non diedero una stesura sistematica ai loro risultati, la loro corrispondenza, secondo Boyer (1980, p. 418) «rappresentò l'inizio della moderna teoria della probabilità».

c) Il problema del condannato a morte.

---

pagnie di assicurazione marittima, che stabilivano i 'premi' in base a considerazioni di tipo statistico; tenevano infatti conto della pericolosità del viaggio, del valore della merce trasportata ecc.

[30] Questa è anche la soluzione suggerita da Luca Pacioli.

[31] In effetti, non è un caso che 64 sia un multiplo di 16, che è il numero dei casi possibili.

[32] Un opportuno approfondimento si può basare sulla lettura dell'esame e dello scambio epistolare tra Fermat e Pascal, reperibile nel sito http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/MC10_11/MC10_11Cap02.pdf, p. 48-49.

Ad un condannato a morte il re offre un'ultima possibilità di salvarsi. Gli propone di disporre 4 biglie, 2 bianche e 2 nere, all'interno di due urne, come preferisce, purché nessuna urna resti vuota e nessuna biglia rimanga fuori. Successivamente il re sceglierà un'urna, estrarrà una biglia e, se questa sarà bianca, il condannato sarà graziato, altrimenti sarà definitivamente condannato. Se tu fossi nei panni del condannato, come distribuiresti le biglie?

Commenti: Il problema propone un confronto di probabilità. In ogni caso la vita del condannato rimarrà in pericolo, però può fare in modo di avere più possibilità di estrazione di una biglia bianca. Ci sono quattro possibili scelte: una biglia bianca ed una nera in ogni urna, due bianche in un'urna e due nere nell'altra, due bianche ed una nera in un'urna e una nera nell'altra urna, due nere ed una bianca in un'urna e una bianca nell'altra urna. I primi due casi sono equiprobabili: nel primo è indifferente la scelta dell'urna ed è determinante quella della biglia, nel secondo è indifferente la scelta della biglia ed è determinante quella dell'urna; in entrambi i casi il condannato ha il 50% di probabilità di salvarsi. Il più vantaggioso è l'ultimo caso, infatti nel terzo caso se il re sceglie la seconda urna per il condannato … è finita, nel quarto la scelta della seconda urna dà la grazia, mentre la scelta della prima dà una chance di salvezza su tre. Si conclude che l'ultimo è il caso più favorevole.

Per alcuni corsisti non è immediato riconoscere l'equiprobabilità dei primi due casi, altri la motivano evidenziando che una sola scelta da parte del re è determinante: nel primo caso quella di una biglia mentre la scelta di un'urna è indifferente, nel secondo è determinante la scelta di un'urna, ininfluente quella di una biglia. Altri tendono ad impostare calcoli con le frazioni piuttosto che confrontare probabilità facendo uso del solo ragionamento, per alcuni è difficile comprendere ed accettare la risposta fornita da altri.

d) Il problema dei compleanni.

La formulazione che ho scelto non è quella tradizionale[33], in quanto inizialmente ho preferito proporre ancora un confronto di probabilità.

Si chiede di mettere in ordine, dal meno al più probabile, i seguenti eventi:
a) una persona ben determinata compie gli anni in un ben determinato giorno dell'anno;
b) due persone ben determinate compiono gli anni in un ben determinato giorno dell'anno;

[33] Si veda http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_del_compleanno

c) due persone ben determinate compiono gli anni nello stesso giorno dell'anno.

Commenti: La consegna non è di facile comprensione, occorre spesso illustrarla con esempi, così il 'ben determinato giorno' può essere identificato con quello in cui stiamo facendo lezione e le persone possono essere identificate con alcuni dei presenti. Si concorda sul fatto che l'evento b) è sicuramente meno probabile dell'a), entrambi vengono comunque ritenuti molto poco probabili, infine riesce difficile confrontare il terzo evento con i primi due. In effetti, dobbiamo precisare che il modo in cui è posto il problema può essere fuorviante poichè fa pensare a tre diversi valori di probabilità mentre, di fatto, gli eventi a) e c) sono equiprobabili in quanto scegliere due persone equivale a scegliere una persona ed una data di nascita: qui i corsisti spiegano che «una volta consultata la carta di identità di una delle due persone, basta controllare se la data di nascita dell'altra coincide oppure no con quella scritta sulla carta», richiamano poi il problema precedente ed individuano analogie con i primi due casi. In un secondo tempo chiedo di fornire una valutazione della probabilità del secondo caso e pongo la seguente domanda: «In un gruppo di 23 persone, la probabilità che due di esse compiano gli anni nello stesso giorno sarà minore o maggiore al 50%?». Il senso comune porta a ritenerla di molto inferiore rispetto alla percentuale da me indicata, anche se alcuni ricordano di essersi trovati in gruppi piuttosto numerosi in cui era successo che ci fossero coppie di persone nate nello stesso giorno e mese (non necessariamente nello stesso anno).

Dal punto di vista didattico si possono fare scelte diverse: o proporre di fare un'indagine prendendo, per esempio, come campione tutti gli allievi di una scuola oppure si possono consultare siti Internet sull'argomento. Si può anche approfittare di questo esempio per porre il problema delle diverse definizioni di probabilità: secondo l'impostazione classica la probabilità di nascita in un fissato giorno dell'anno è 1/365, ma i dati statistici ci danno altre informazioni (impostazione frequentista), infine l'esperienza documenta l'influenza delle fasi lunari sui parti che modifica la valutazione (impostazione soggettiva). Questo esempio dà l'opportunità di parlare della concezione soggettiva di probabilità, che è la meno conosciuta anche se è stata introdotta e studiata da un italiano, De Finetti (1906-1985) che ha introdotto il concetto di probabilità come 'grado di fiducia' nel verificarsi di un evento, dipendente dalle informazioni disponibili sull'evento stesso.

e) Il problema delle tre porte[34].
Il problema è presentato tramite la lettura di alcune pagine di un libro:

> Nella sua rubrica del 9 settembre 1990 la vos Savant[35] rispose a un notissimo rompicapo proposto da un lettore. Sei a un gioco a premi, e devi scegliere fra tre porte. Dietro a una c'è un'automobile, mentre dietro alle altre troverai solo delle capre. Tu scegli, diciamo, la porta n. 1, e il presentatore, che sa dov'è l'automobile, ne apre un'altra, dietro a cui c'è una capra. A questo punto, ti dà la possibilità di scegliere tra il restare fedele alla porta n. 1 o il passare all'altra. Che cosa ti conviene fare? (Hoffman, 1999, p.216).

Commenti: Si tratta del cosiddetto dilemma di Monthy Hall[36], soprannome del conduttore di un gioco a premi televisivo, Let's Make a Deal, la cui soluzione è spesso etichettata come «controintuitiva». In effetti, le persone a cui ho sottoposto il quesito, futuri insegnanti oppure studenti, si sono mostrati riluttanti nell'accettarne la soluzione. Questo non stupisce dato che, come documenta Hoffman (1999, p. 216): «Evidentemente, non era tanto scontato. La rubrica era appena apparsa, infatti, che la vos Savant si vide arrivare montagne di lettere di lettori, tra cui molti matematici, che non erano affatto d'accordo. Le possibilità, sostenevano, erano di cinquanta e cinquanta, non di due terzi a favore del cambiare porta. La rubrica del 2 dicembre 1990 riportava alcune delle lettere: «Da matematico di professione, la scarsezza di cognizioni matematiche tra il pubblico mi preoccupa alquanto. La pregherei, per non contribuirvi, di voler ammettere il suo errore. (R. Sachs, PH.D., George Mason University)», «Lei ha sbagliato, e di grosso! Glielo spiego: dopo che il presentatore ha svelato la capra, le possibilità di dare la risposta giusta sono una su due. Che si cambi o meno la propria scelta, rimangono le stesse. C'è già abbastanza ignoranza in questo paese, in fatto di matematica, e non c'è bisogno che il quoziente d'intelligenza più alto del mondo la aumenti ancora. Si vergogni! (S. Smith, Ph.D., University of Florida)».

Ho scelto di riportare diverse frasi dal libro di Hoffman che ho usato come 'mediatore' (Damiano, 1993) durante le mie lezioni. L'immagine usuale di un insegnante di matematica, anche nelle pubblicità televisive e

---

[34] Un problema essenzialmente identico appare col nome di *Problema dei tre prigionieri* nella rubrica *Mathematical Games* di Martin Gardner nel 1959. A sua volta Gardner l'avrebbe tratto dal *Paradosso delle scatole* di Bertrand (*Calcul des Probabilités, 1889).*
http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_delle_tre_carte.

[35] Vos Savant era la curatrice di una rubrica sulla rivista Parade, ed era persona famosa per il suo alto quoziente di intelligenza.

[36] http://it.wikipedia.org/wiki/Problema di_Monty_Hall

in generale nei media, è quella di un docente che ha alle spalle una lavagna piena di calcoli e grafici. È importante invece comunicare che anche gli insegnanti di matematica leggono libri, non necessariamente di matematica, e che, a lezione, anche la lettura di un brano può essere opportuna. A questo proposito, si segnala che in rete, su You Tube si trovano due filmati sul problema delle tre porte: uno è un film[37], l'altro è un cartone animato[38]. Può essere interessante visionarli e commentarli: nel primo, uno studente, interrogato, fornisce velocemente la risposta, che il docente commenta parlando di «risposta basata sulle statistiche», di «cambio di variabile» e di soluzione ottenuta con «la semplice matematica». Evidentemente colui che ha scritto i dialoghi del film vi ha trasferito la sua idea di matematica piuttosto che una spiegazione della risposta fornita dallo studente. Un commento critico a questi aspetti relativi all'immagine della matematica nell'opinione comune può essere opportuno, poi si cercherà di comprendere la risposta fornita dallo studente. Il secondo filmato è basato sull'analisi ed illustrazione dei casi possibili per poi arrivare a convincere della soluzione, che viene argomentata mediante l'uso di percentuali. Significativo il fatto che 'cambiando la porta' ci sia il 66% di probabilità di vincere l'auto, mentre solo il 33% nell'altro caso. E dove è finito il restante 1%?

Il libro da cui ho tratto il problema delle tre porte racconta la storia di Paul Erdős, definito dall'autore «un genio alla ricerca della verità matematica». Può essere significativo leggere come questa persona geniale abbia avuto difficoltà a comprendere e risolvere il problema delle tre porte, finché gli venne proposta una sua simulazione al computer: «Dopo centinaia di prove, la soluzione del cambiare porta risultò vincente due contro uno, ed Erdős ammise che aveva torto. Ma quella simulazione non era più soddisfacente della dimostrazione al computer del Teorema dei quattro colori. […] Non rivelava perché fosse meglio cambiare porta» (Hoffman, 1999, p. 220). Questo aspetto 'rilancia' la dicotomia approccio classico - approccio frequentista, che a mio avviso non possono essere trattati separatamente; pone inoltre interrogativi sul concetto di dimostrazione in matematica.

5. Conclusioni

Speranza (1997, p. 180) evidenzia il ruolo della storia «per la formazione degli insegnanti o per valorizzare l'insegnamento della matematica». In questo contesto tale ruolo si rivela particolarmente significativo in

[37] http://www.youtube.com/watch?v=wOK48hgYCS4
[38] http://www.youtube.com/watch?v=mhlc7peGlGg&feature=related

quanto, la sequenza di problemi scelti, che spazia da Galileo ai giorni nostri, diventa oggetto dei primi passi nel mondo della probabilità per i futuri insegnanti e per gli studenti. I problemi sono stati un'occasione per riflettere sull'uso del buon senso e dell'intuizione, arricchiti di aspetti non deterministici in situazioni di tipo aleatorio. Questo approccio fa emergere l'esigenza del calcolo delle probabilità come 'strumento più sicuro e veloce'. Il passaggio successivo è stato quello di ricorrere al calcolo come conferma dei risultati ottenuti.

Bibliografia

Boffa, M., Caredda, C. (1990), *Probabilità e insegnamento elementare*, Torino: SEI.

Boyer, C.B. (1980), *Storia della matematica*, Milano: Mondadori.

Branda, A., Arnaldi Suria, P. (1998), Paura e probabilità, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 21B (5), pp. 407-418.

Dall'Aglio, G. (1987), *Calcolo delle probabilità*, Bologna: Zanichelli.

Damiano, E. (1993), *L'azione didattica*, Roma: Armando Editore.

Fischbein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dordrecht, Nederlands: Reidel.

Furinghetti, F. (2011), Riflessione e azione nella formazione degli insegnanti: un esempio riguardante l'algebra, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 34 A-B (3), pp. 225-254.

Hoffman, P. (1999), *L'uomo che amava solo i numeri*, Milano: Arnoldo Mondadori Editore.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Mooney E.S. (2007), Research in Probabilty. Responding to Classroom Realities, in Lester F.K. Jr. (2007), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC28271: Information Age Publishing Inc., pp. 909-955.

Kvatinsky, T., Even, R. (2002), Framework for teacher knowledge and understanding of probability, *Proceeding of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM], Hawthorn, VIC, Australia: International Statistic Institute.

Lester, F.K. (2007), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Marchini, C. (2011), *Appunti di Matematiche Complementari 1. A.A. 2010/11*, http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/MC10_11.

Pellegrino, C. (2003), *Lo specchio di Martin. Guida a «Enigmi e Giochi Matematici» e dintorni*, Bologna: Pitagora.

Shulman, L.S. (1986), Those who understand: knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15, pp. 4-14.

Shulman, L.S. (1987), Knowledge and teaching: Foundations of the new reforms, *Harvard Educational Review*, 57, pp. 1-22.

Speranza, F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Bologna: Pitagora.

Steinbring, H. (1991), The theoretical nature of probability in the classroom, in R. Kapadia e M. Borovcnik (a cura di), *Chance encounters: Probability in education*, Dordrecht, Nederlands: Kluwer, pp. 135-168.

Stohl, H. (2005), Probability in teacher education and development, in G.A. Jones (a cura di), *Exploring probability in school: Challenger for teaching and learning*, New York: Springer, pp. 345-366.

Un'esperienza di insegnamento nella SSIS
Il caso della Logica matematica

Carlo Marchini [(*)]

1. Introduzione

Con questo testo illustro, dal mio punto di vista, le ragioni e le finalità di uno specifico contenuto e la sua collocazione all'interno della formazione dell'insegnante. Dalla lettura dei numeri precedenti degli *Annali della didattica e della formazione docente* mi è parso di individuare una tendenza a presentare una motivata e approfondita analisi delle ragioni, pregi e difetti della SSIS, nella sua esistenza, breve ma fondante. Da parte mia ritengo che l'avvento delle lauree magistrali per l'insegnamento e del TFA non debba disperdere quanto di meglio si è realizzato nella Scuola di Specializzazione. L'unico pericolo che vedo è quello anagrafico: molti tra quelli che hanno collaborato a costruire la SSIS, stanno fatalmente avviandosi alla quiescenza e quindi non potranno contribuire alla realizzazione delle nuove strutture, soprattutto se i tempi di attuazione dovessero dilatarsi.

Pertanto, ho deciso di porre all'attenzione del lettore specifici aspetti contenutistici perché non vadano dispersi ed inoltre di fornire l'indirizzo in cui trovare alcuni, purtroppo non tutti, i materiali elaborati per gli studenti dalla sezione Fisica Informatica Matematica di Parma della SSIS:

http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/SSIS.

Per gli scritti che si trovano a tale indirizzo, chiedo anticipatamente la comprensione del lettore per errori talvolta di contenuto, spesso di lingua, perché la produzione dei materiali è stata quasi contemporanea alla loro utilizzazione per svolgere le lezioni in classe.

(*) Università degli Studi di Parma - Dipartimento di Matematica (carlo.marchini@unipr.it).

2. Perché insegnare la Logica matematica nella SSIS?

A questa domanda posso rispondere, sulla base della mia esperienza individuale. Le frequentazioni con alcuni docenti di Parma (Servi), di Ferrara (Magari, poi trasferitosi a Siena) di Firenze (Mangani e Marcja), tra la fine degli studi universitari e i primi passi di studio personale dopo la laurea, mi avevano indirizzato alla Logica matematica, come un ambito per me 'nuovo' e 'innovativo' che dava finalmente risposta a domande personali. Era tra la fine degli anni '60 e gli inizi dei '70 del secolo scorso. Le persone che ho nominato, in quel momento, erano docenti di discipline 'varie', in particolare Algebra e Matematiche complementari, poiché la Logica matematica non era una disciplina rappresentata (in Italia) da professori ordinari. Se non erro, il primo concorso di Logica matematica dopo la seconda guerra mondiale mise in cattedra Lolli, Previale e Servi.

Meriterebbero di essere analizzate le ragioni che hanno fatto 'sparire' la grande ed importante tradizione italiana sul tema del periodo, sviluppatasi tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento (Peano, Pieri, Padova, Burali-Forti, Vailati,...).

Posso dire di avere visto i primi passi della rinascita della Logica matematica, nell'ambito di quello che allora era parte dello GNSAGA (Gruppo Nazionale Strutture Algebriche Geometriche e Applicazioni) con incontri cui avevo partecipato come 'giovane' ascoltando o anche proponendo seminari che davano spazio a questi 'nuovi' argomenti e facendo conoscenze di coetanei che stavano interessandosi a vario titolo nell'argomento.

La precisazione dei tempi storici della mia formazione ha lo scopo di dare una dimensione diacronica a come ho acquisito consapevolezza del ruolo che la Logica matematica poteva avere nell'insegnamento. La sollecitazione ad occuparmene è venuta poi anche dall'inserimento di argomenti di Logica matematica nei programmi (o dalla proposta di programmi) in cui la Logica trovava posto e spazio. Mi riferisco ai cosiddetti progetti Brocca, al Piano nazionale dell'Informatica alle varie versioni dei programmi per quella che era la Scuola Media e ai programmi per la Scuola Elementare del 1985.

Oggi l'esigenza di argomenti della disciplina, tradotta negli attuali documenti ufficiali della scuola, sembra molto ridotta, ma già da quegli anni di predisposizione di riforme ero alle prese con la Logica matematica da due punti di vista: il primo quello scientifico di ricerca nel campo, il secondo quello di come fare a costruire almeno ‘frammenti’ di sequenze didattiche aventi come scopo l’apprendimento della Logica matematica.

Mi ero reso conto di aspetti molto critici (e ancora li constato, non ostante il tempo che è passato):

a)I testi dei programmi e soprattutto i libri di testo aiutavano poco gli insegnanti. Una pubblicazione apparsa a cura del C.N.R. metteva in luce come buona parte degli errori (per non dire ‘orrori’) che apparivano (allora) sui libri di testo, riguardassero la Logica matematica.
L’inserimento in manuali ‘vecchi’, o di nuova pubblicazione, di un primo o ultimo capitolo dedicato alla Logica (matematica) non influenzava il resto, restando così una specie di corpo estraneo all’impianto didattico del testo.

b) La disciplina insegnata in (ben poche) università italiane, spesso anche sotto altri nomi, ad esempio, Filosofia della Scienza, Matematiche Complementari (o Elementari DPVS), Algebra Superiore, aveva uno scopo notevolmente diverso dalle esigenze della formazione professionale dell’insegnante.

c) Il problema non era (e continua a non essere) solo quello di individuare i contenuti, ma di mutare filosofia ed epistemologia sull’argomento. Un esempio per spiegarmi meglio. Le tavole di verità si trovano in molti manuali scolastici ed universitari, come se si trattasse della ‘summa’ della Logica matematica necessaria per affrontare lo studio della Matematica. Le tavole di verità per il calcolo delle proposizioni (precisazione che talvolta non appare esplicitamente nei manuali succitati) hanno avuto una lunga ‘gestazione’ dai primordi greci della scuola di Megara, passando attraverso l’analisi sviluppatane dalla Logica medievale, per giungere in forme varie, fino alla versione ‘strutturale’ che è presentata, in un corso universitario, in poche righe e poche informazioni. Ancora oggi, come ben provano le ricerche di Durand-Guerrier (2003, 2004, 2010) c’è il problema di fare accettare, ad esempio, l’implicazione materiale (detta anche implicazione filoniana) a studenti e docenti di scuola ed università. La comprensione del significato e dell’applicabilità di tale strumento (ed anche di altri strumenti logici) non può essere ridotta all’esclusiva conoscenza delle procedure di calcolo, ma deve inglobare anche la parte storica in ambito filosofico e cognitivo.

d) Un altro aspetto di rilevanza epistemologica è frutto dalla conoscenza che si può sviluppare in un corso universitario di Logica matematica: la definizione di derivazione (formale) facilita l’attenzione ai singoli passaggi dimostrativi poiché essa fornisce il criterio principe di controllo per le dimostrazioni (deduzioni) formali. Si facilità, così, l’acquisizione di

un'attitudine che poi può agevolare l'analisi delle argomentazioni di qualsiasi tipo, per mettere in luce il ruolo e la pregnanza di quegli aspetti che sono assegnati come 'intuitivi' o 'ovvi'. Pertanto l'analisi 'fine' svolge un preciso ruolo di 'certificazione' della conoscenza.
e) I rapporti della Logica matematica con la valutazione. C'è un problema generale nella costruzione dei programmi scolastici: ogni argomento 'innovativo' per la scuola non può essere introdotto solo dal punto di vista dei concetti o delle applicazioni che esso richiama e su cui si 'appoggia'. La sua introduzione dovrebbe essere accompagnata da indicazioni didattiche che comprendano anche indirizzi sulla valutazione. Invece quest'aspetto è demandato ai singoli docenti ed agli autori di libri di testo. Il risultato, almeno per quanto riguarda la Logica matematica nella scuola, è che i capitoli eventualmente presenti, sono accompagnati da un piccolo numero di esercizi e problemi, non tutti rilevanti. L'insegnante con o senza preparazione universitaria in Logica matematica, può non cogliere l'importanza dell'argomento, ma sicuramente ha ben pochi strumenti sui manuali e tradizione alle spalle, per inserirli nelle prove di valutazione. Ben diversa la pratica e la tradizione della valutazione in Aritmetica, Algebra, Geometria, Analisi matematica, ecc.
Personalmente ho scritto articoli su riviste e in libri per illustrare alcuni di questi aspetti (cfr. Bibliografia). L'approfondimento dell'argomento mi ha portato alla sorpresa, per me, di vedere che in numerosi esempi di quesiti, in vari ambiti, anche universitari, le difficoltà degli studenti non riguardavano i contenuti specifici della disciplina, ma all'articolazione dei contenuti stessi per mezzo di (semplici) ragionamenti logici. Quindi, anche se non è facile dare criteri di valutazione in Logica matematica, la Logica matematica entra nella valutazione.
f) Queste riflessioni hanno motivato la scelta della Sezione di Parma per l'Indirizzo FIM della SSIS d'inserire la Logica matematica tra gli argomenti da trattare (per le classi di abilitazione A047 e A049), rifuggendo, possibilmente, dalla rigida schematizzazione che s'incontra sui manuali scolastici e sui testi universitari specifici per l'argomento, ma cercando di mostrare come si debba/possa gestire l'apprendimento della Logica matematica dalle prassi scolastiche più consuete. Ho avuto conferma della validità della scelta quando la Sezione di Modena della SSIS mi ha richiesto di svolgere un breve ciclo di lezioni di Logica matematica anche per la classe di abilitazione A059.
g) C'era anche da tenere conto che non si poteva fare appello a conoscenze di Logica matematica acquisite durante gli studi universitari, sia perché gli specializzandi nelle classi A047, A049 e A059 avevano lauree

di vario tipo e non solo di matematica, ma anche tra quelli laureati in matematica non tutti avevano sostenuto esami di Logica matematica, stante, inoltre, la differenza di obiettivi tra università e insegnamento.

3. I temi fondamentali della Logica matematica per l'insegnamento

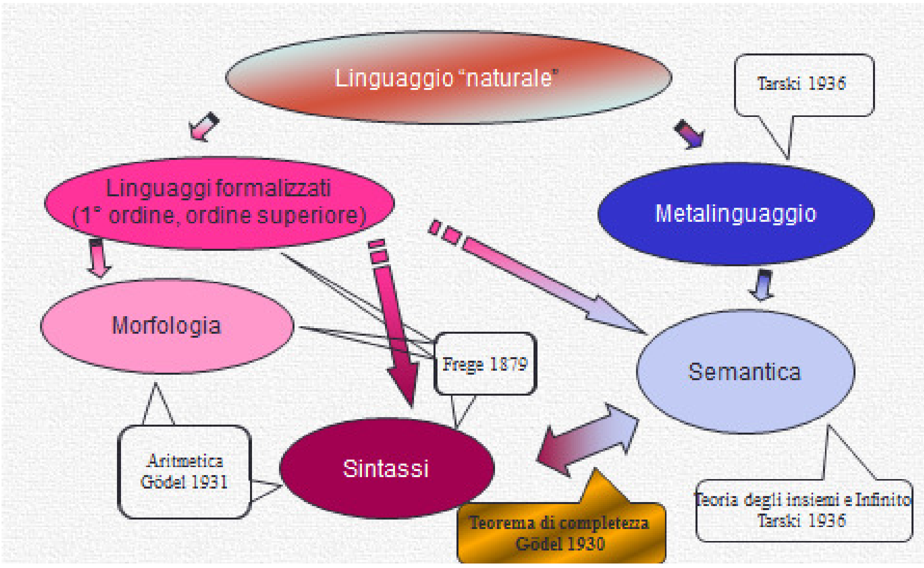
I tempi ristretti in cui svolgere le lezioni SSIS hanno richiesto l'individuazione di argomenti che illustrassero gli aspetti fondamentali o fondanti, lasciando poi al futuro insegnante il compito di approfondirne, articolarne la conoscenza con lo studio personale. Da questa esigenza è nata una scelta ristretta di temi ed una serie di problemi interessanti per il ricercatore che ha dovuto affrontare la Logica matematica da un diverso punto di vista.

3.1 Uno schema riassuntivo

Ho cercato di riassumere in uno schema alcune distinzioni che servono per mettere in luce il ruolo di teoremi importanti.

La Logica è nata come prima analisi del linguaggio e di questo ha portato con sé, per secoli, sia la potenza descrittiva sia le ambiguità e le difficoltà di espressione. Lo studio delle discipline scientifiche ha messo in luce, fin dall'antichità, la necessità di descrivere i concetti in termini precisi e di dare una giustificazione ai ragionamenti che andasse al di là della 'ostensione' o del 'buon senso'. L'opera di Gottlob Frege (1848 – 1925), a partire dal 1879, è stata, in questo senso, fondamentale. Grazie a lui ed alle sue intuizioni, si è 'scarnificato' il linguaggio da usare per la matematica riducendolo ad una sorta di oggetto algebrico con costanti, variabili (sarebbe meglio chiamarle indeterminate), relazioni e funzioni. L'allontanamento del linguaggio (ora) formale da quello naturale, ha richiesto anche la precisazione non ambigua delle regole esplicite per la formazione delle 'parole' del nuovo linguaggio e l'individuazione, ancora una volta precisata, delle regole che sovraintendono la costruzione delle dimostrazioni, con il corredo di assiomi e definizioni.

Si è così creata la sintassi che assieme alla morfologia costituisce una parte di un sistema logico con aspetti finitari (almeno per buona parte delle Logiche del primo ordine). L'analisi compiuta da Kurt Gödel (1906 – 1978), nel 1931, mostra come sia possibile descrivere gli aspetti morfologici e buona parte di quelli sintattici mediante l'aritmetica. Anzi grazie ad una nuova teoria matematica delle funzioni ricorsive, creata allo scopo dallo studioso austriaco, egli ha saputo esprimere in termini di relazioni e proprietà dell'aritmetica formalizzata inaspettati legami anche col processo di deduzione.



Prima di questo risultato per vari versi sorprendente, Gödel è riuscito a dare una risposta ad un problema lungamente discusso da Frege e da David Hilbert (1862-1943), vale a dire quali siano le condizioni di 'verità' per una teoria formale, quesito che trae la sua origine da quello che Aristotele (384-322 a.C.) propone come *Postulato di verità* per una teoria deduttiva. La cosa sarebbe da precisare con grande attenzione.

Pochi anni dopo Alfred Tarski (1902-1983) presenta un concetto di verità, adatto ad una gran parte delle teorie matematiche a partire da un'analisi di uno dei più antichi paradossi (attribuito ad Epimenide, VI sec. a.C.): *il paradosso del mentitore*.

Tarski individua uno snodo fondamentale: la necessità di distinguere tra il linguaggio in cui è scritta una teoria (linguaggio oggetto) e quello in cui s'interpreta il linguaggio (metalinguaggio). Grazie a questa differenziazione Tarski produce un'esplicazione matematica del concetto di verità e lo articola per le formule del linguaggio in distinzioni più sottili come soddisfacibilità in un'interpretazione, verità in un'interpretazione e validità e le loro negazioni.

A questo punto l'impianto generale è pronto; come conseguenza dei teoremi di Gödel del 1931 e di Tarski del 1936 è necessario distinguere nettamente tra dimostrabilità e verità. La distinzione è ancora poco compresa da testi e da docenti.

3.2 Alcune distinzioni

Questo schema e la sua lettura è stato un contributo fondamentale per la didattica della SSIS. In base alla sua analisi ho avuto occasione di illustrare alcune distinzioni tra concetti apparentemente sinonimi, oltre a quella tra verità e dimostrabilità.

Per fare comprendere agli specializzandi la differenza tra l'uso del linguaggio e del metalinguaggio ho usato l'esempio della definizione della potenza (naturale) come solitamente viene espressa sui manuali. Per ogni numero reale a (spesso la specificazione è omessa), si definisce $a^2 = a\times a$; $a^3 = a\times a\times a$, eccetera. Ora è proprio 'scavando' nel termine 'eccetera' che si hanno delle sorprese. Infatti, alcuni manuali 'riassumono' la situazione ponendo, per ogni numero reale a e per ogni numero naturale n, $a^n = a\times\ldots\times a$, n-volte. Seguono poi le proprietà delle potenze rispetto al prodotto ed alla divisione di potenze della stessa base. Da questa scelta vengono le 'dimostrazioni' che $a^0 = 1$ ed altre proprietà. Poniamo ora attenzione al fatto che in $a^n = a\times\ldots\times$, n-volte accade un fatto strano. Esemplifichiamolo con $n = 7$, si ha $a^7 = a\times\ldots\times a$, 7-volte. È evidente che in questa scrittura è presente 7 in due modi diversi: la prima volta si tratta di un numero naturale, oggetto di cui si sta parlando nel linguaggio e nella teoria con cui si esprime l'elevamento a potenza. La seconda volta 7 è divenuto un aggettivo numerale cardinale. Questo cambio di 'natura' mostra che la definizione è data in un linguaggio 'ibrido' un italiano con simboli matematici. Se si vuole evitare tale mescolanza di linguaggio e metalinguaggio, basta dare la definizione ricorsiva di potenza con esponente naturale:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a \times a^n \end{cases}$$

Con questa definizione si aboliscono: la 'dimostrazione' che $a^0 = 1$, l'uso tacito della proprietà associativa, essendo la moltiplicazione un'operazione binaria, il fatto che non ha senso porre (o 'dimostrare') che $a^1 = a$, dato che non si può considerare una moltiplicazione con un solo termine ed infine la problematica uguaglianza $0^0 = 1$, che fa sempre tanto discutere.

Per illustrare la differenza tra sintassi e semantica, concetti non sempre chiaramente espressi nella pratica matematica, esempi ‘centrali’ sono stati il concetto di polinomio e le frazioni di polinomi.

La scuola e l’università definiscono i polinomi in modo diverso. Solitamente sui manuali scolastici si fa prima l’introduzione dei monomi, definiti talvolta in modo assai criticabile, poi i polinomi sono somme di monomi.

Dal punto di vista strutturale ed anche logico, si tratta di una definizione assai discutibile, ma comunque di natura puramente morfologica. Non si esplicitano poi le proprietà delle operazioni tra polinomi, desumendole da quelle della struttura numerica in cui si ‘pescano’ i coefficienti (o le costanti), ma sono evidentemente assiomi e pertanto si resta in ambito sintattico.

In un corso di algebra ‘standard’ dell’università, si definiscono i polinomi (in un’indeterminata) come serie formali finite di elementi di un anello o campo. Per fare questo non c’è neppure bisogno dell’indeterminata, la quale ha lo stesso ruolo della virgola di separazione nelle n-ple ordinate di ‘coefficienti’. In questo caso le operazioni, solitamente, sono definite esplicitamente anche se ‘ricalcano’ o ‘ricopiano’ quelle della struttura da cui si è partiti, per mezzo di assiomi.

Sia ora A un dominio d’integrità unitario e sia x un’indeterminata su A (vale a dire un elemento del tutto estraneo ad A). La costruzione dell’anello dei polinomi $A[x]$ nell’indeterminata x a coefficienti in A è anch’esso un dominio d’integrità, com’è facile dimostrare (teoremi di trasporto). Applicando ad $A[x]$ lo stesso procedimento che permette di passare da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ (localizzazione) si ottiene un campo, indicato con $A(x)$ o con altre scritture. Gli elementi sono le classi di equivalenza dei quozienti di due polinomi (in cui il polinomio divisore non è il polinomio nullo, 0) rispetto all’equivalenza data dal prodotto in croce. In tale ambito si può scrivere $\frac{x^2-x}{2x} = \frac{x-1}{2}$, denotando la relazione di equivalenza col simbolo d’uguaglianza come si fa con le frazioni (numeriche) equivalenti. Solitamente, a questo punto, gli studenti ‘insorgevano’ osservando che si trattava di funzioni diverse perché con dominio diverso. Ciò dava modo di far loro riflettere che per parlare di funzioni, bisogna considerare x non più come indeterminata, ma come variabile in un opportuno dominio d’interpretazione (per antonomasia $\mathbb{R}$). Si ricade così nella semantica.

Un punto delicato in cui morfologia, sintassi e semantica si mescolano, è il cosiddetto principio d’identità dei polinomi che, vari testi presentano come solo morfologico, oppure come morfologico e sintattico, oppure come solo semantico.

Nelle lezioni sono stati numerosi gli esempi tratti dalla pratica o dai manuali scolastici in cui si è resa evidente la distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, e quella tra sintassi e semantica.

Un altro aspetto fondamentale è la distinzione tra intensione ed estensione. La cosa si vede bene in ambito insiemistico, ma ha valenza in un dominio più ampio. È prassi consueta introdurre la rappresentazione per proprietà caratteristica di un insieme con la scrittura $\{x \mid P(x)\}$. Essa offre la possibilità di indicare l'oggetto 'insieme' come una 'estensione', rappresentata dalla formula $P(x)$ che in questo caso è la 'intensione'. L'esempio offre l'opportunità di porre l'attenzione sulle 'variabili mute', concetto che si estende ed applica anche alla presentazione delle funzioni. La consegna classica di determinare il dominio di una funzione (reale di variabile reale) di cui è data un'espressione analitica, la tipica assegnazione $y = f(x)$, pone una domanda sull'estensione ricavabile a partire da un'intensione. Allora nasce il problema di quali siano i criteri di equivalenza delle intensioni e quelli per le estensioni, con il corollario dei principi di equivalenza delle equazioni, disequazioni e di identità dei polinomi.

3.3 Il sistema deduttivo

Come detto in precedenza, il ruolo centrale della sintassi è offrire metodi precisati per realizzare deduzioni (da ipotesi) e dimostrazioni. In logica sono noti molteplici sistemi deduttivi (Marchini, 1996a). I principi ispiratori dei vari sistemi (per il calcolo dei predicati del 1° ordine) non sono sempre riconducibili uno all'altro. Un sistema di tipo hilbertiano, ispirato ad esigenze metateoriche di minimalità, presenta il minor numero possibile di connettivi, assiomi e regole d'inferenza. Con questo sistema risulta molto agevole la dimostrazione del teorema di deduzione e di altri risultati. Altri sistemi (tavole) inglobano parte della semantica nella sintassi per avere immediata dimostrazione del teorema di completezza. Si tratta però di scelte lontane dalla prassi usuale con cui si confezionano le dimostrazioni in un testo scolastico o in un corso universitario non di Logica matematica.

Un poco più vicino agli aspetti della deduzione che s'incontrano nelle aule scolastiche (e universitarie) sono i cosiddetti sistemi con *sequent* la cui importanza teorica è fondamentale riguardo al problema della coerenza dell'aritmetica (Gentzen) e dell'analisi (Takeuti). Derivato da questi ed idoneo, a mio parere, agli scopi didattici è un sistema del tipo detto della ‘deduzione naturale’, dovuto a Prawitz (1971).

Nella presentazione alla SSIS ho proceduto al contrario di quanto qui illustrato, cioè sono partito dai testi scolastici traendo brevi brani da essi ed analizzando con gli specializzandi quali ‘snodi’ logici erano presenti in ciascuno di essi. L’elenco dei testi utilizzati in quest’ analisi è il seguente:

Belli I., Lupo Perricone A., Pagni L., Pallini S. (1988), *Osservare e dedurre*, Torino: S.E.I., pp. 188-189.
Cateni L., Bernardi C., Maracchia S. (1987), *Geometria analitica e complementi di algebra*, Firenze: Le Monnier, pp. 42 e 43.
Cateni L., Fortini R. (1959), *Il pensiero geometrico*, vol. II, Firenze: Le Monnier, p. 19.
Del Giudice V., Morina S. (1989), *Corso di Matematica*, Torino: Petrini, p. 242.
Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. (1994), *Nuovo corso di geometria analitica e di complementi di algebra*, Milano: Ghisetti & Corvi, p. 210.
Gallo E. (1988), *Fare Matematica*, vol. II, Torino: S.E.I. , p. 564.
Lamberti L., Mereu L., Nanni A. (1992), *Matematica Uno elementi di geometria analitica*, Milano: Etas Libri, p. 370.
Palatini A., Reverberi Faggioli V. (senza anno di pubblicazione), *Complementi di Matematica*, Milano: Ghisetti e Corvi, 7^{a} ed., pp. 206 – 207.
Speranza F., Rossi Dell'Acqua A. (1981), *T - Il linguaggio della Matematica*, Bologna: Zanichelli, p. 210.
Speranza F., Rossi Dell'Acqua A. (1988), *Il Linguaggio della Matematica*, Bologna: Zanichelli, 2^{a} ed., p. 996.

Sulla base della permanenza dei libri scolastici (il manuale di Palatini dovrebbe essere stato scritto attorno al 1905) penso che con un poco di buona volontà l’insegnante possa trovare brani analoghi anche oggi sui libri ‘attualizzati’. La scelta dei libri si può dire casuale: ho usato i testi che avevo disponibili al momento. Le date confermano che si tratta, per lo più, dei testi scolastici miei o delle mie figlie. Ho riportato l’elenco per mostrare come analizzando brani di manuali, si colgono alcuni aspetti fondamentali:

1) Nella presentazione scolastica si usa il linguaggio naturale con qualche simbolo matematico, ma si sfrutta l’articolazione del linguaggio utilizzando tutti i connettivi (e non soltanto alcuni di essi, come nei vari sistemi logici che per esigenze metateoriche di ‘minimalità’ limitano i connettivi e i quantificatori e il numero di assiomi e regole al minimo indispensabile).

2) Il procedimento seguito ed esemplificato consiste per lo più nella 'introduzione' e nell'eliminazione dei connettivi e dei quantificatori.
3) Il procedimento di deduzione (dimostrazione) non è 'lineare' come nei sistemi di Hilbert ma è ramificato (grafo ad albero) con un'unica radice (la formula da dimostrare) ed ha per foglie le eventuali ipotesi della deduzione.
4) Vi è l'uso d'ipotesi temporanee che poi vengono eliminate, come avviene in molti casi in cui si fa riferimento a ragionamenti ausiliari.

Apparentemente, quindi, la presentazione appare ridondante giacché sono note regole che permettono di definire i connettivi e i quantificatori in base ad altri connettivi e quantificatori. Così non è perché, (tranne che per la doppia implicazione) la sorpresa è che nei manuali si 'praticano' almeno dimostrazioni di almeno tre diversi tipi di logica: minimale, intuizionista e classica. Ora l'interdefinibilità dei connettivi e dei quantificatori è una prerogativa esclusiva della logica classica. Le tre logiche sono legate (sarebbe da precisare meglio e con possibili 'rovesciamenti' dovuti alle diverse interpretazioni dei connettivi e dei quantificatori) dal fatto che una formula dimostrabile in logica minimale è dimostrabile anche in logica intuizionista e una dimostrabile in logica intuizionista è dimostrabile in logica classica. Da un punto di vista estensionale, gli insiemi dei teoremi delle tre logiche costituiscono una catena d'inclusioni proprie: $T_\mu \subset T_\iota \subset T_c$. Ciò significa che esistono formule dimostrabili classicamente, ma non intuizionisticamente, e altre dimostrabili nel sistema intuizionista e non in quello minimale.

Nella presentazione di Prawitz la 'chiave' che permette di passare da Logica minimale a Logica intuizionista è la legge logica *ex absurdo quodlibet* dovuta a Giovanni di Cornovaglia, più noto come Pseudo-Scoto (XIII sec.). Invece, per passare da Logica intuizionista a Logica classica è necessaria una forma di dimostrazione per assurdo, che si può riassumere nella 'regola' per cui due negazioni affermano.

Per completezza d'informazione si possono presentare qui gli assiomi e le regole d'inferenza (da me rielaborati, ma sostanzialmente dovuti a Prawitz)

$$(\text{i.}\wedge)\ \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \qquad\qquad (\text{e.}\wedge)\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ ;\ \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

(i.∨) $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,;\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

(e.∨) $\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vartheta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vartheta\end{matrix}}{\vartheta}$

(i.→) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}$

(e.→) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$

(i.↔) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\,;\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

(e.↔) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\,;\,\dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}$

Può sorprendere che in queste regole non compaia il connettivo di negazione. In questo sistema si preferisce introdurre il simbolo di falsità $\perp$, da ritenersi una lettera proposizionale oppure una fissata contraddizione. Mediante esso si definisce la negazione come un caso particolare d'implicazione, in cui $(\neg\varphi)$ sta per $(\varphi \to \perp)$.

Così facendo, le regole d'introduzione ed eliminazione della negazione si possono vedere come casi particolari delle regole d'introduzione ed eliminazione dell'implicazione. Per meglio chiarire si pone

(i.¬) $\dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \perp\end{matrix}}{\neg\varphi}\,;$

(e.¬) $\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\,.$

È immediato costatare che tali regole derivano direttamente da quelle dell'implicazione, utilizzando la definizione di negazione. La prima delle due è un tipo di dimostrazione per assurdo. Con queste regole si conclude la presentazione della logica proposizionale minimale.

Per passare al calcolo dei predicati, bisogna definire accuratamente tutta la parte morfologica (termini formule, enunciati) nel nuovo linguaggio che prevede indeterminate e quantificatori, ed eventualmente l'uguaglianza, in aggiunta ai connettivi con i quali si era costruito il calcolo proposizionale. Si forniscono ulteriori precisazioni morfologiche, che qui si tralasciano, ed infine le regole d'introduzione ed eliminazione.

(i.∀) $\dfrac{\varphi(x)}{\forall x(\varphi(x))}$; (e.∀) $\dfrac{\forall z(\varphi(z))}{\varphi(t)}$

(i.∃) $\dfrac{\varphi(t)}{\exists x(\varphi(x))}$; (e.∃) $\dfrac{\exists y(\varphi(y)) \qquad \begin{matrix}[\varphi(c)] \\ \psi\end{matrix}}{\psi}$

Si annettono due ulteriori regole che caratterizzano la logica utilizzata, intuizionista o classica, come sarà specificato in seguito.

Si rimanda ai testi presenti all'indirizzo:

http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/Didattica.html (in cui troverà Corsi di Logica SSIS suddivisi in Indice e quattro lezioni) la precisazione delle varie clausole che sono necessarie per il buon funzionamento delle regole ed inoltre al 'significato' e la modalità di applicazione delle parentesi quadre.

Il lettore armato dei testi che ho indicato ed altri, nonché di buona volontà, scoprirà che le regole (e.$\wedge$) e (i.$\vee$) sono accompagnate spesso dalla dizione 'a maggior ragione'. La regola (e.$\vee$) è la regola che è usata nella dimostrazione per casi. La regola (i. $\rightarrow$) è connessa col teorema di deduzione, mentre la regola (e. $\rightarrow$) è il *Modus ponens* (una delle poche regole di deduzione citate sui manuali scolastici). La regola (i. $\forall$) traduce la dizione 'data la genericità di x', mentre la regola (e.$\forall$) traduce la dizione 'dal fatto che per tutti… si ha, in particolare…'. La regola (e.$\exists$) generalizza la dimostrazione per casi.

Si possono aggiungere le regole per l'uguaglianza, anzi in questo caso si ha un (l'unico) assioma del calcolo dei predicati con uguaglianza, cioè una 'frazione' con numeratore vuoto.

(rifl.) $\dfrac{}{x = x}$; (simm.) $\dfrac{x = y}{y = x}$; (trans.) $\dfrac{x = y \quad y = z}{x = z}$;

(sost.) $\dfrac{x = y \quad \varphi(x)}{\varphi(y)}$

Con questi assiomi si può provare

$$\forall x(U(x) \rightarrow M(x)),\ \forall x(G(x) \rightarrow U(x)) \vdash_{\mu} \forall x(G(x) \rightarrow M(x)),$$

formalizzazione del sillogismo della prima figura di tipo *Barbara*.

Si ha anche $\vdash_{\mu} \exists x(\neg\varphi(x)) \rightarrow \neg\forall x(\varphi(x))$, mentre la formula $\neg\forall x(\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\neg\varphi(x))$ non è dimostrabile nel calcolo dei predicati minimale, ma solo in quello classico.

Come detto sopra si 'rafforza' il sistema minimale con altre due regole, quelle dette del «falso intuizionista» e del «falso classico»:

$$(\bot_\iota)\ \frac{\bot}{\varphi}; \qquad\qquad (\bot_c)\ \frac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}.$$

La prima è la regola dello Pseudo Scoto, connessa alla dimostrazione per assurdo; la seconda (che rafforza la prima) è un ulteriore tipo di dimostrazione per assurdo che si può anche scrivere come $\neg\neg\varphi \vdash_c \varphi$, vale a dire che due negazioni affermano. Si noti che $\varphi \vdash_\mu \neg\neg\varphi$ (o anche $\vdash_\mu(\varphi \to \neg\neg\varphi)$), ma lo scambio di posto attorno al segno di derivazione tra le due formule della doppia negazione richiede la logica classica (e anche per $\vdash_c (\neg\neg\varphi \to \varphi)$). Si ha poi $\vdash_\iota ((\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi))$, ma $\vdash_c ((\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi))$.

La pratica con questo tipo di calcolo mostra immediatamente che le dimostrazioni minimali sono più facili che quelle intuizioniste che, a loro volta sono più facili di quelle classiche.

L'insegnante ha così uno strumento per analizzare una consegna facendo una valutazione a priori delle difficoltà. Si ha, quindi, un possibile metodo di valutazione.

Con questo non s'intende affermare che si debbano svolgere in classe dimostrazioni formali, solo auspicare che l'insegnante analizzi le argomentazioni riportate sul manuale col sistema logico rendendosi conto del grado di difficoltà di apprendimento che il testo comporta.

4. Un altro strumento per la valutazione: le sostituzioni

Il tema delle sostituzioni è sempre stato al centro delle mie considerazioni, perché vedo in esso un oggetto didattico che fa parte di quello che si può definire *curriculum implicito.* Si pensi alla risoluzione dei sistemi algebrici. Tra i metodi possibili, c'è il metodo di sostituzione che è presentato senza spiegare la natura e le caratteristiche della sostituzione. Si tratta di uno dei casi previsti da Sfard (2008) laddove osserva «Why are we able to use specialized keywords without ever being exposed to their explicit definitions?».

Le sostituzioni (nel caso dei sistemi algebrici) potrebbero essere giustificate come proprietà dell'uguaglianza, ma in ambito logico sono indispensabili come ‘operazioni’ morfologiche sui termini e sulle formule anche nel caso di teorie in cui l’uguaglianza non ci sia.

Con un’analisi, neppure troppo approfondita si possono riconoscere esempi di sostituzioni anche nell’apprendimento della lingua già ai primi anni di scuola primaria, se non addirittura nella scuola dell’infanzia.

La scarsa consuetudine con questo strumento, potrebbe farlo ritenere semplice ed intuitivo. Forse è così, e la letteratura didattica non si è molto occupata di ciò. Il percorso proposto agli studenti della SSIS è stato quello di mostrare come si utilizzano le sostituzioni in modo corretto (sostituzioni come procedura matematica), di come si analizzano le difficoltà intrinseche delle sostituzioni (sostituzioni come oggetto matematico) ed infine quali strategie utilizzare per il loro insegnamento (didattica delle sostituzioni).

Un paio di esempi per convincere il lettore. Tra le proprietà formali (o strutturali) dell’addizione c’è la proprietà associativa, ad esempio $((3 + 5) + 4) = (3 + (5 + 4))$. Tale proprietà è fondamentale per svolgere i calcoli più complessi, anche se l’algoritmo dell’addizione in colonna tende a nasconderla. L’uguaglianza è giustificabile col calcolo separato dei due membri: $((3 + 5) + 4) = (8 + 4) = 12$ e $3 + (5 + 4) = 3 + 9 = 12$. Già qui si utilizza la sostituzione. Usando il sistema deduttivo di Prawitz si ottiene un semplice teorema aritmetico ottenuto partendo dai teoremi aritmetici $(3+5) = 8$ e $(8 + 4) = 12$:

$$\text{(sost)}\ \frac{(3 + 5) = 8 \qquad (8 + 4) = 12}{((3 + 5) + 4) = 12}$$

In relazione con tale proprietà su alcuni si testi si trova la ‘proprietà dissociativa’. Dal punto di vista strutturale, tale proprietà non ha una natura formale, ma dal punto di vista del calcolo e da quello cognitivo può essere utile. Sia ancora $(7 + 5) = 12$. Data la semplicità del computo, quanto si mostra in seguito può essere considerato superfluo. Ma così non è: soprattutto quando si devono fare calcoli a mente, la strategia che si esibisce potrebbe essere utile. Si ha $(7 + 8) = ((5 + 2) + 8) = (5 + (2 + 8)) = (5 + 10) = 15$. Questo procedimento è chiamato ‘proprietà dissociativa’. Esso ha senso ed utilità sotto le seguenti ipotesi: è più facile sommare $(2 + 8)$ che $(7 + 8)$ perché la prima addizione dà una cifra ‘tonda’ o ‘completa la decina’; a questo punto basta aggiungere 5 tra le unità ed il gioco è fatto. Ovviamente ciò prevede che si sappia scomporre 7 come $(5 + 2)$. Pertanto, si deve padroneggiare la tavola pitagorica dell’addizione; avere memorizzato come si raggiunge 10 e poi scomporre adeguatamente 7. C’è ancora in gioco l’uguaglianza $7 = (5 + 2)$, ma stavolta questa non è giustificabile esclusivamente in virtù del testo assegnato, senza fare ricorso a conoscenze precedenti. Gray e Tall (1994) vedono in questo 'artificio' un esempio di flessibilità e di *procept*, cioè di un processo che è divenuto concetto in sé. Dal punto delle sostituzioni, nel primo caso si deve applicare una sostituzione diretta; nel secondo una sostituzione inversa e tale secondo tipo di procedura è più difficile del primo.

Un altro esempio che capita di incontrare nelle aule della scuola secondaria di secondo grado: è più semplice risolvere l'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$ oppure $2^{4x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$? Di fatto, si tratta della stessa equazione, ma nel secondo caso con un 'travestimento' che è legato alle sostituzioni e che è la parte difficile per lo studente che lo deve 'svelare'.

Per il lettore che volesse di completare le informazioni che qui sono solo accennate, si rimanda a:

http://www.math.unipr.it/~rivista/MARCHINI/Didattica.html.

5. Conclusione

Dalle relazioni finali della SSIS di Parma ho potuto costatare che buona parte di quanto era stato insegnato sull'argomento Logica matematica era entrato nel patrimonio degli specializzandi. Ciò forse perché la materia non era stata trattata solo fine a se stessa, ma in ogni occasione a lezione ed al momento degli esami, era tornata alla ribalta, a volte come richieste di chiarimenti, a volte come impostazione del discorso. Alcune relazioni finali, poi, erano state incentrate proprio sull'insegnamento di argomenti logici nella scuola.

Oggi che l'esperienza SSIS è conclusa, a Parma si è cercato, per due soli cicli, di 'rivitalizzarla' parzialmente con un curriculum specifico della laurea magistrale in matematica. Gli studenti che hanno seguito tale curriculum sono convinti dell'importanza formativa e chiarificatrice che la conoscenza logica apporta alla comunicazione della matematica. Mi auguro che nella attivazione della laurea magistrale per l'insegnamento e del TFA si tenga conto di questa esperienza e si colga l'importanza formativa della Logica matematica. Per quanto riguarda il momento attuale, la realizzazione regionale di tale auspicio sembra poco probabile.

Bibliografia

Durand-Guerrier, V. (2003), Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 53, pp. 5-34.

Durand-Guerrier, V. (2004), Logic and mathematical reasoning from a didactical point of view a model-theoretic approach, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Guerrier_cerme3.pdf

Durand-Guerrier, V. (2010), Logique et raisonnement mathématique Aspects epistémologiques et didactiques sur l'implication (Partie 1 e 2), www.unilim.fr/irem/fileadmin/documents/conferences/2009-2010/Durand-Guerrier-21-04-2010-partie1.pdf (partie2.pdf)

Ferrari, P.L., Marchini, C. (1996), Teaching and Learning Logic, in N.A. Malara, M. Menghini e M. Reggiani (a cura di), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*, Roma: C.N.R., pp. 86-99.

Frege, G. (1879), *Begriffschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache das reinen Denken*, Halle a/S.

Gödel, K. (1930), Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik un Physik*, 37, pp. 349-360.

Gödel, K. (1931), Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, pp. 173-198,
(https://metalab.at/wiki/images/0/0b/Goedel.pdf)

Gray, E., Tall, D. (1994), Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), pp. 116-141.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (1997), *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica: un'occasione di ricerca didattica*, Galatina (LE): Editrice Salentina.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (2003), Linguaggio dell'insegnamento e linguaggio dell'apprendimento: due mondi a confronto in ambito matematico, *Convegno Nazionale 'L'insegnamento della matematica nel quadro delle riforme'*, pp. 46-51.

Iacomella, A., Letizia, A., Marchini, C. (2004), *Il comunicare in Matematica Formalizzazione: come, quando, perché nella pratica didattica*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma n. 377, pp. 1-65.

Letizia, A., Marchini, C., Iacomella, A. (1999), Logic for assessing or assessment, in F. Jaquet (a cura di), *Logic*, Actes CIEAEM 50, Neuchatel – CH: IRDP, pp. 319-329

Marchini, C. (1990), Le sostituzioni e la didattica della Matematica, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, A., pp. 145-153.

Marchini, C. (1990), Le sostituzioni e le relazioni, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, pp. 732-744.

Marchini, C. (1993), La sintassi del calcolo dei predicati desunta da procedimenti dimostrativi in uso nei manuali scolastici, in A. Bernardi, S. Cerrato e P. Universo (a cura di), *La Comunicazione Scientifica - Media e Metodi 3: La Matematica tra didattica e cultura*, Trieste, Laboratorio dell'Immaginario Scientifico, pp. 100-123.

Marchini, C. (1993), Logica e Teoria degli Insiemi, Parte I, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, pp. 1061-1076.

Marchini, C. (1996a), Schemi di deduzione, in L. Ciarrapico e D. Mundici (a cura di), *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma: Direzione generale dell'Istruzione Classica, pp. 107-132.

Marchini, C. (1996b), La deduzione: esperienze didattiche, in L. Ciarrapico e D. Mundici (a cura di), *L'insegnamento della Logica Ministero della pubblica istruzione*, Roma: Direzione generale Istruzione Classica, pp. 159-175.

Marchini, C. (2002), Instruments to detect variables in primary school, in J. Novotna (a cura di), *Proceedings CERME 2*, Prague: Charles Univ. Fac. of Educ., vol 1, pp. 47-57.

Marchini, C., Kaslova, M. (2003), Substitutions and variables in primary school. A comparative study on pre-conceptions, in J. Novotna (a cura di), *Proceedings SEMT '03*, Prague: Charles Univ. Fac. of Educ, pp. 113-117.

Prawitz, D. (1971), Ideas and results in Proof Theory, in J. Fenstad (a cura di), *Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium*, Amsterdam: North-Holland, pp. 235-307.

Sfard, A. (2008), *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*, New York: Cambridge University Press.

Tarski, A. (1936), Der Wahrheitsbegriff in den formalisiert Sprachen, *Studia philosophica*, 1, pp. 261-405.

La formazione degli insegnanti di matematica e scienze in modalità e-learning: un'esperienza europea

Giuliana Gnani(*), Angela Balestra(**)

1. La formazione degli insegnanti di matematica e scienze

Le ricerche sui metodi di insegnamento-apprendimento e sulla formazione degli insegnanti di matematica e scienze permettono di evidenziare il quadro complessivo dei bisogni formativi, che risultano collegati non solo alla padronanza da parte degli insegnanti dei concetti e dei procedimenti propri della disciplina insegnata. L'attività rivolta alle pratiche di insegnamento presuppone infatti in modo rilevante il coinvolgimento di altri saperi di ambiti diversi.

Vengono proposti e studiati anche gli effetti di strumenti di formazione che utilizzano diverse modalità di gestione e integrazione tra formazione scientifica, formazione didattica e pedagogica e realizzazione di ambienti di apprendimento. Si tratta di elaborare e sperimentare strumenti di formazione per rispondere ai bisogni rilevati per lo sviluppo sia delle competenze disciplinari degli insegnanti sia delle metodologie e delle strategie professionali necessarie per un collegamento e una ricaduta di queste competenze nelle pratiche di insegnamento (Meheut, 2006; Lustig, 2009; Borgato, 2009; Balestra, 2009; Gnani, 2009).

In particolare dagli anni Settanta un settore di scienze dell'educazione risulta rivolto alla sperimentazione e alla valutazione dell'applicazione dell'e-learning nell'ambito della formazione (Adelsberger, Collis, Pawlowski, 2002). Questi studi hanno consentito di analizzare le dinamiche della comunicazione, le pratiche didattiche e organizzative della modalità di e-learning integrando tra loro le conoscenze utili alla comprensione dei processi di insegnamento-apprendimento di vari ambiti scientifici e l'insegnamento tramite ICT (Information and Communication Technology) in ambito formativo.

(*) Università degli Studi di Ferrara (giuliana.gnani@unife.it).
(**) Istituto Comprensivo 'T. Bonati', Bondeno (FE) (abalestra@libero.it).

Si crea allora una comunità di pratica all'interno di una classe virtuale con l'intento di creare un adeguato e significativo ambiente di apprendimento[39].

Sono noti importanti e approfonditi risultati di ricerche per l'insegnamento delle scienze e della matematica che possono contribuire alla progettazione e realizzazione di corsi di formazione di insegnanti di matematica e scienze.

Gli studi sulle difficoltà di apprendimento evidenziano l'importanza di una fase iniziale di indagine sui concetti e sulle modalità di ragionamento del senso comune, ma anche sulle motivazioni e sull'interesse negli alunni per gli studi scientifici in funzione dell' età. L'insegnante che riflette e opera tenendo in considerazione i dati fondamentali emersi dall'indagine iniziale, può attivare in modo efficace e significativo la scelta di contenuti, di obiettivi e di pratiche didattiche adeguate (Lijnse, 1994; Leach-Scott, 2002; Kattmann, 1996; Duit, 2003).

Alcune ricerche (Davis, 2003) hanno riguardato più in generale l'aspetto dei rapporti dialettici tra *curriculum* e le concezioni degli insegnanti, constatando come il cambiamento dei curricula abbia un modesto impatto sui metodi di insegnamento dei docenti. Per tale ragione si propone un modello costruttivista di formazione degli insegnanti, che coniughi le conoscenze, le concezioni e le competenze degli insegnanti, per consentire ad essi di riflettere sui metodi dell'apprendimento/insegnamento, sui contenuti di insegnamento e offrire loro la possibilità di formazione e di sviluppo professionale in ambiti dove la pratica in classe, le relazioni tra insegnanti e allievi e i risultati della ricerca in didattica possano interagire in modo significativo.

Particolare sviluppo ha avuto la discussione sull'uso dell'approccio costruttivista integrato per l'insegnamento-apprendimento della matematica e delle scienze volto al superamento delle difficoltà di apprendimento in ambito scolastico: a tal proposito alcune ricerche (Berlin et Al., 1991) vedono nella inadeguata preparazione dei docenti e nella difficoltà di avere a disposizione materiale didattico per le scienze da utilizzare nell'insegnamento dei concetti matematici, tra le cause di maggiore opposizione all'insegnamento integrato delle discipline scientifiche.

Inoltre la ricerca in didattica sulle difficoltà dell'apprendimento scolastico, negli ultimi anni, si è rivolta in particolare allo studio per la proget-

---

[39] Un ambiente di apprendimento nell'ottica costruttivistica può essere definito «un luogo in cui coloro che apprendono possono lavorare aiutandosi reciprocamente, avvalendosi di una varietà di strumenti e risorse informative in attività di apprendimento guidato o di problem solving» (Wilson, 1996, pp.3)

tazione e la sperimentazione di 'sequenze di insegnamento e apprendimento' (Teaching learning sequences, TLS), che si articolano su specifiche tematiche scientifiche partendo dalle concezioni spontanee degli alunni e valorizzando i processi di insegnamento-apprendimento (Meheut-Psillos, 2004; Meheut, 2005): nell'ambito di queste e altre ricerche si è evidenziata l'importanza della figura del docente anche con l'elaborazione di progetti e attività di formazione (iniziale o continua) degli insegnanti. In particolare Andersson et Al. (2005) credono che ricercatori ed insegnanti debbano collaborare e coordinare le loro attività per progettare, sperimentare e validare sequenze didattiche.

Saint-Georges (2001) interviene sulla necessità che gli insegnanti prendano consapevolezza del tipo di interazione che effettivamente utilizzano nella loro pratica scolastica per la definizione del ruolo assunto distinguendo tra didattica trasmissiva e didattica collaborativa.

Vengono approfonditi anche gli studi sull'introduzione delle ICT nella pratica didattica. In particolare ricordiamo Jonassen (1994, 1999) per il suo contributo agli studi di ambienti di apprendimento di matematica e scienze con l'uso delle tecnologie di taglio costruttivista, che evidenziano l'intento di dare enfasi alla costruzione della conoscenza e non alla sua riproduzione, attraverso la presentazione di compiti autentici e di ricchi ambienti di apprendimento partendo dal mondo reale, favorendo lo sviluppo di pratiche riflessive e la costruzione di conoscenze dipendenti dal contesto e dal contenuto.

2. Il progetto ISSUE: una esperienza europea

2.1 Breve descrizione del progetto ISSUE

Il progetto ISSUE (Integrated Subject Science Understanding in Europe), sviluppato nell'arco del triennio 2005-2007, fa parte del programma Socrates azione Comenius 2.1 (Training of School Education Staff).

E' stato finanziato dalla Commissione Europea DG Istruzione e Cultura (Education and Culture) e ha visto coinvolte diverse istituzioni: Università di Varsavia (Polonia), Università di Pitesti (Romania), Istituti per la formazione degli insegnanti di Wuppertal (Germania) e Benidorm (Spagna) e Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara.

Con questo progetto si è inteso promuovere l'uso del metodo integrato nell'insegnamento-apprendimento della matematica e delle scienze attraverso un approccio che ha il suo riferimento teorico in risultati di ricerche internazionali nella didattica delle scienze. Il progetto si è sviluppato con il confronto fra esperienze di ricerca-azione di altri Paesi europei, per terminare con la elaborazione e sperimentazione di percorsi integrati di matematica e scienze.

2.2 Il corso di formazione in modalità e-learning

Nell'ambito del progetto ISSUE è stato organizzato il corso on line Teaching-Learning Sequences for Integrated Learning of Science Issues per la formazione degli insegnanti, rivolto ai laureati in discipline scientifiche, in possesso della abilitazione all'insegnamento di matematica e scienze nella scuola secondaria di primo grado.

Al corso, a numero chiuso, hanno avuto accesso i docenti in formazione dei paesi europei coinvolti nel progetto. Il dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara ha partecipato con quattro studenti, abilitati all'insegnamento di matematica e scienze nella Scuola secondaria di primo grado (classe A059).

Il corso aveva lo scopo di sviluppare competenze attraverso l'acquisizione di conoscenze teoriche e di progettazione di segmenti di apprendimento secondo il modello TLS (Andersson-Bach, 2005) , unità di lavoro che si snodano a partire dalla individuazione degli ostacoli che rendono difficoltoso il processo di apprendimento e proseguono con proposte di lavoro che valorizzano l'integrazione delle discipline.

Solo il ricorso a un ambiente virtuale ha reso possibile la condivisione di materiali, di idee e la collaborazione fra tutti i protagonisti del corso, studenti, docenti tutor e ricercatori dei diversi Paesi.

Il corso ha utilizzato la piattaforma 'Moodle' acronimo di Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (Ambiente di Apprendimento Dinamico Modulare Orientato agli Oggetti). Si tratta in pratica di una classe virtuale in cui gli studenti ricevono materiali di studio, scambiano riflessioni, espongono dubbi, condividono proposte di lavoro. E' un ambiente in cui la conoscenza non è più solo un processo individuale ma viene costruita attraverso un lavoro cooperativo che si realizza prevalentemente in rete rendendo possibile il superamento delle grandi distanze. L'organizzazione di questo ambiente prevede infatti uno spazio in cui si possono prelevare i materiali didattici, inseriti dal team internazionale costituito dai coordinatori delle varie sedi, oltre a diverse sezioni rivolte ad attivare discussioni.

La scelta della piattaforma Moodle è stata dettata da motivazioni prevalentemente di carattere tecnico:

- è open source,
- è abbastanza semplice da usare e da amministrare,
- permette la condivisione di materiali digitali da parte dei docenti dei diversi Paesi coinvolti nel progetto,
- favorisce l'interazione fra docenti permettendo discussioni asincrone attraverso l'uso di un forum e sincrone con l'uso della chat, integrata da un sistema di messaggistica istantanea.

Gli studenti hanno avuto la possibilità di optare per un corso della durata di 80 ore (corso A) e un altro più impegnativo di 400 ore (corso B). Entrambi si sono svolti in lingua inglese e hanno avuto la durata di circa quattro mesi. Per l'Italia hanno partecipato tre docenti in servizio a tempo determinato per il corso A e un docente per il corso B. La funzione di tutor è stata svolta da un docente universitario e da un docente di scuola secondaria di primo grado .

La gestione dello spazio virtuale del corso era di competenza del partner di Benidorm (Spagna) che lo ha organizzato in modo semplice e funzionale.

Entrambi i corsi sono suddivisi in quattro moduli tematici, e si differenziano per l'impegno richiesto nello studio e nella produzione del lavoro finale.

Il Primo Modulo è riservato alla consultazione della *Student's guide* che aiuta a orientarsi nel portale e nella organizzazione del corso, descrivendo in modo dettagliato i contenuti, i tempi di realizzazione e le modalità di valutazione. In questa prima fase, ogni studente si presenta, inserendo informazioni personali relative a interessi, attività lavorative e aspettative verso questa esperienza.

Il Secondo Modulo prevede lo studio di questioni teoriche e la condivisione, attraverso la partecipazione al forum, di dubbi e riflessioni scaturiti dalla lettura dei documenti.

I contenuti degli articoli riguardano:
- gli aspetti teorici del metodo integrato e il tema dell'integrazione nel curricolo con particolare attenzione alla Scienza come disciplina e al suo rapporto con le altre [40]
- il confronto fra diverse teorie di apprendimento e strategie di insegnamento soffermandosi in particolare sul *conceptual change* e il costruttivismo sociale[41],

[40] Venville et Al. (2000)
[41] Driver et Al. (1994)

- lo studio delle basi teoriche e dei modelli a cui la progettazione delle TLS si ispira[42],
- il ruolo del linguaggio e dell'argomentazione nell'apprendimento delle Scienze[43],
- il valore della valutazione formativa nell'apprendimento[44].

All'inizio di ogni settimana viene richiesto agli studenti di analizzare un articolo e di rispondere alle domande predisposte dal tutor coordinatore del corso. Ulteriore compito consiste nel partecipare al forum inviando una proposta di discussione sotto forma di domanda e almeno due interventi in discussioni già avviate.

I tutor nazionali, docenti universitari e insegnanti in servizio, attraverso le rispettive competenze, accademiche e didattiche, sollecitano, integrano e coordinano gli interventi per garantire che il dibattito si sviluppi in modo costruttivo. Il tutor nazionale facilita la fruizione dei materiali, valida gli interventi prima della pubblicazione e suggerisce proposte di approfondimento.

Con un ambiente così strutturato tutti gli studenti sono sempre a conoscenza dei temi posti al centro dell'attenzione e possono partecipare a tutte le attività anche se non sempre e necessariamente in modo attivo. Ogni studente è responsabile del suo processo formativo e contribuisce, attraverso i suoi interventi e le sue riflessioni postate nel forum, ad arricchire l'apprendimento di tutti.

Nel Terzo Modulo è richiesto ai partecipanti di mettere in pratica le conoscenze teoriche acquisite nei moduli precedenti. Vengono messi a disposizione i percorsi di Scienze integrate elaborati nel progetto ISSUE che riflettono le differenze in termini di modelli culturali e di insegnamento dei vari Paesi. Ogni percorso è accompagnato da una *Guida per l'insegnante* che spiega i contenuti, i metodi, la rilevanza del tema nel curricolo nazionale, gli obiettivi del percorso didattico in rapporto alle esperienze ed ai concetti quotidiani degli alunni. La *Guida* contiene anche una ricca bibliografia riferita alla didattica, in particolare della matematica e delle scienze.

I partecipanti al corso A, in questa fase, sono invitati a elaborare in forma scritta una delle seguenti proposte:

---

[42] Andersson et Al. (2005)
[43] Osborne et Al. (2004)
[44] Black et Al. (2006)

- elaborare un pre-test utile a far emergere le conoscenze degli studenti relativamente a un tema interdisciplinare; successivamente, sulla base delle risposte, costruire un test che indaghi sugli errori sistematici o sulle conoscenze non corrette ma di uso comune. E' necessario che lo studente precisi quale intervento sia opportuno progettare in futuro per migliorare la comprensione dei concetti indagati nel pre-test,
- testare una parte di una TLS approfondendo l'aspetto della valutazione formativa, precisando cioè come è possibile aiutare gli studenti a riflettere sulle difficoltà di apprendimento, migliorando così l'efficacia dell'insegnamento,
- approfondire l'aspetto della valutazione in una TLS scelta fra quelle elaborate dai partner europei,
- leggere con attenzione una TLS e valutare criticamente il progetto alla luce di quanto appreso nel Modulo (2).

La problematica dell'integrazione costituisce il tema specifico del corso, concetto che include il superamento del punto di vista necessariamente parziale con cui ogni disciplina interpreta la realtà. Non viene negata la specificità delle discipline, definita dal sistema di concetti, teorie, metodologie e dal proprio sviluppo storico, ma non basta un semplice accostamento di diverse prospettive a garantire una vera integrazione. Ciò che si cerca è un quadro complessivo entro cui collocare le correlazioni fra strutture cognitive, emozionali e sociali e metodologie di insegnamento. Due studentesse hanno scelto 'l'ambiente' come sfondo in cui inserire le loro proposte, ritrovando in esso piena coerenza con quanto analizzato nei moduli precedenti.

L'ambiente infatti, naturale e antropico è per sua definizione interdisciplinare, inoltre

- consente un continuo passaggio dal particolare al generale, dalla rappresentazione concreta al modello e viceversa,
- facilita il ricorso alle discipline per studiare tematiche complesse che necessitano di una integrazione dei saperi,
- permette di approfondire il delicato passaggio dalla conoscenza di uso comune a quella scientifica prestando attenzione non solo alle differenze, ma soprattutto alle connessioni perché in questo modo le conoscenze diventano oggetto di personale analisi.

I percorsi elaborati[45] si snodano attraverso un ampio coinvolgimento diretto dello studente a cui viene richiesto un ruolo di protagonista anche in problematiche che coinvolgono il mondo fuori dalla scuola (Venville et Al., 2002).

Questo approccio consente di valorizzare l'identità personale in rapporto all'ambiente, in attesa che lo studente si trovi nelle condizioni di riuscire a gettare un ponte fra il contesto locale e quello globale. Nell'elaborato di una delle studentesse si sottolinea infatti

> Il giorno in cui un alunno proverà per il pianeta in cui vive, le stesse preoccupazioni e attenzioni che sente per il suo giardino, si potrà dire che quel percorso didattico abbia raggiunto i suoi obiettivi.

Un'altra studentessa ha scelto di costruire un'attività sul sistema binario, che andava ad arricchire, attraverso il contributo della matematica, il percorso *Alla ricerca di indizi* ideato dai partner di Wuppertal (Germania). Alle «stazioni di apprendimento», mirate all'acquisizione di conoscenze e procedure di fisica e chimica, la studentessa ha aggiunto una attività matematica necessaria per la risoluzione di un'indagine poliziesca in cui gli alunni devono dimostrare di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite nel circuito di apprendimento.

Ben più impegnativo è stata l'ideazione del percorso proposto dalla studentessa che ha seguito il corso B sul tema *Luce e colori*.

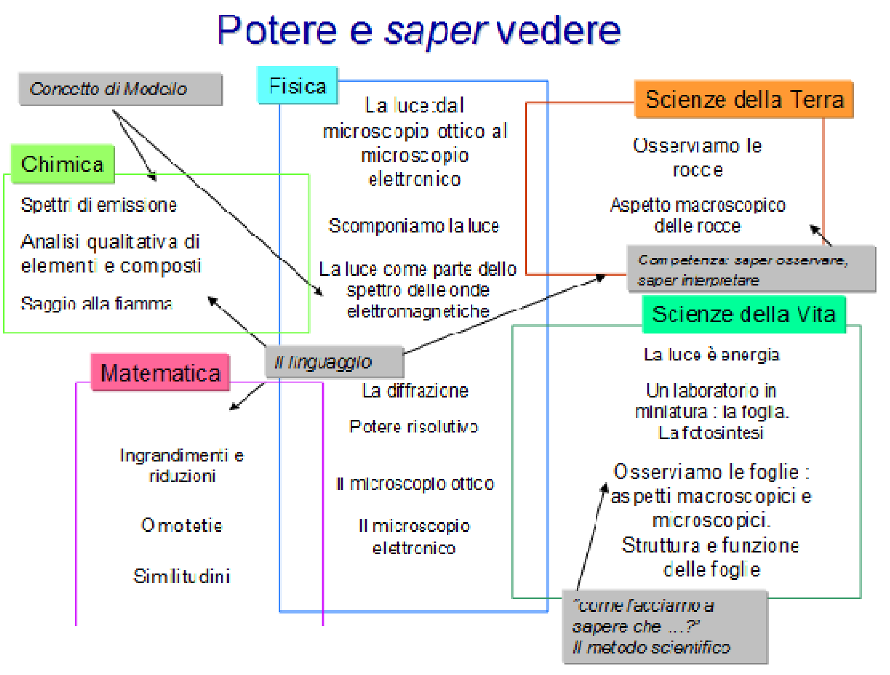
L'obiettivo principale di questa TLS, in una visione olistica del sapere, è di guidare gli studenti a cogliere il valore che risiede nell'affermazione «io vedo» rendendoli consapevoli che il «saper vedere» è strettamente connesso con l'analisi e lo studio di fenomeni chimici, fisici, biologici.

Stimolare la curiosità, valorizzare l'intuizione, sollecitare gli studenti a interrogarsi su fatti e fenomeni, a formulare congetture, a verificare ipotesi, per indagare con strumenti, diversi dai loro occhi, saranno le azioni che gli insegnanti dovranno attivare per mantenere vivo l'interesse e avviarli al metodo scientifico.

Lo schema di seguito riportato evidenzia le connessioni fra concetti, strumenti e processi cognitivi che attraversano le diverse discipline.

---

[45] *Un mare di scienza* di C. Bastianelli e *Uroboro: la natura ciclica delle cose* di M.Penazzi.



La sequenza di insegnamento-apprendimento (TLS) è progettata seguendo le indicazioni suggerite da Venville[46].

L'insegnante deve saper

- porre «grandi domande» che abbiano un alto valore formativo, proporre compiti significativi, collegati ai problemi personali degli alunni i legati al contesto sociale in cui vivono,
- selezionare contenuti con forti e rigorose interrelazioni per consentire allo studente di concepire la realtà con una visione unitaria,
- concentrarsi su pochi, essenziali e chiari obiettivi,
- lavorare in collaborazione con altri docenti della classe per pianificare i gli interventi che si realizzando in tempi necessariamente flessibili,
- guidare gli studenti ad applicare le conoscenze in situazioni concrete e soprattutto a sviluppare la capacità di trasferire abilità e conoscenze in situazioni nuove,
- facilitare l'impegno degli alunni, applicando le conoscenze in un contesto reale, superando in tal modo i confini dell'aula scolastica e coinvolgendo i protagonisti della comunità in cui la scuola è inserita.

[46] Vedi nota 5.

Il progetto sviluppa e approfondisce anche l'aspetto della valutazione. Con questo termine ci si riferisce soprattutto alla valutazione formativa che si fonda su continue osservazioni dei processi di apprendimento e richiedono all'insegnante di riprogettare un percorso formativo in caso di risultati ritenuti inadeguati alle aspettative.

La valutazione formativa si basa sui modelli costruttivisti dell'apprendimento e assegna all'insegnante un ruolo fondamentale per comprendere come gli studenti apprendono e quali ostacoli rallentano la comprensione. Qualora la valutazione degli apprendimenti si riveli efficace, lo studente si sente maggiormente compreso ed è dimostrato che migliora anche la motivazione e l'impegno[47].

Gli stessi autori affermano che secondo la loro ricerca (Black-Wiliam, 1998) l'eccessivo ricorso a test di verifica incoraggia gli insegnanti a promuovere un apprendimento prevalentemente meccanico, vengono enfatizzati i risultati negativi e c'è il rischio che gli studenti rivolgano maggiore attenzione alla valutazione a scapito dell'apprendimento.

I lavori prodotti dagli studenti di entrambi i corsi sono stati valutati dai tutor nazionali e dal tutor coordinatore che ne ha apprezzato l'originalità, l'interesse, la fattiva partecipazione alle attività sincrone e asincrone, l'approfondimento dei temi discussi in letteratura e il buon inglese.

Ogni partecipante ha ricevuto un diploma dal Dipartimento della Pubblica Istruzione-Università di Göteborg (Svezia) in cui sono descritte le competenze sviluppate nel corso on line:
- conoscenza dei curricoli relativi a discipline scientifiche nell'ottica interdisciplinare,
- conoscenza di teorie dell'apprendimento integrato e strategie di progettazione,
- apprendimento di diverse modalità di progettazione, validazione e revisione di una TLS.

Una studentessa della Germania ha scelto di sperimentare e valutare criticamente, sulla base della propria esperienza e della letteratura analizzata nella prima parte del corso, una TLS *Cristalli e simmetrie* che fa parte del più ampio progetto ideato dal Team italiano che ha per tema *Le simmetrie*.

Ha prodotto un diario di bordo in cui è descritta ogni fase dell'esperienza, il materiale utilizzato, le difficoltà emerse e le modifiche apportate per meglio rispondere ai bisogni del contesto. Ha messo a fuoco i fattori che maggiormente contribuiscono a migliorare la comprensione dei

[47] Black et Al. (1998)

concetti e ha proposto integrazioni nell'ottica di un insegnamento integrato delle scienze e orientato a rendere ciascun studente protagonista nella costruzione dell'apprendimento.

I tutor italiani hanno valutato positivamente la relazione finale in cui sono descritte le difficoltà emerse e le proposte di integrazione.

3. Conclusioni

A conclusione delle attività rilevanti, coinvolgenti per l' intenso lavoro e impegno, proponiamo alcune riflessioni sui punti di forza ma anche sui punti deboli del progetto ISSUE. Fra questi ultimi sicuramente il problema della lingua è risultato un elemento che ha ostacolato la comunicazione sincrona, mentre per quella asincrona si è potuto contare sulla collaborazione di una traduttrice.

Tra i punti di maggiore interesse ricordiamo la collaborazione significativa tra ricercatori universitari e docenti in servizio presso la scuola secondaria di primo grado. Il progetto ISSUE ha proposto un modello di formazione che ha consentito ai docenti di confrontarsi con il mondo della ricerca didattica internazionale impossessandosi di strumenti interpretativi e spunti di riflessione. Il docente, al termine di questo percorso, si trova nelle condizioni di calare la metodologia della ricerca nella scuola, radicarla nella propria classe e determinare cambiamenti significativi, frutto non solo di intuizioni e riflessioni personali ma fondati altresì su argomentazioni teoriche.

Le competenze e le finalità proprie della scuola e dell'università in questo progetto si sono integrate attraverso lo scambio di competenze e punti di vista. Il materiale prodotto, in particolare i numerosi percorsi multidisciplinari progettati e realizzati nelle classi durante la lunga esperienza della SSIS e del progetto ISSUE, sono visibili sul portale dell'USR Emilia Romagna.

L'aspetto più significativo è proprio questo, il consolidamento del rapporto fra il Dipartimento di matematica dell'Università di Ferrara e il mondo della Scuola, che si è concretizzato nella realizzazione di progetti che sono seguiti a questo, dal progetto Emma, al progetto ISS, al progetto Mat@abel.

Altrettanto positivo è stato, per i partecipanti, aprirsi al confronto con realtà internazionali con cui raramente si ha l'opportunità di interagire. La conoscenza dei rispettivi curricoli, delle diverse modalità organizzative e degli strumenti di valutazione ha arricchito la professionalità di ciascuno. Nel progetto l'apporto del gruppo italiano è stato determinante in quanto negli altri Paesi l'insegnamento delle Scienze è separato da quello della Matematica. Mentre l'integrazione delle Scienze Sperimentali è di norma prevista o vivamente raccomandata in tutti i Paesi, solo in Italia l'insegnamento della matematica e delle scienze è assegnato a uno stesso docente favorendone così in modo coerente l'integrazione. Nelle nostre scuole la motivazione all'apprendimento della matematica può scaturire dalla osservazione della natura e delle sue forme, dalla scoperta delle leggi che regolano fenomeni chimici, fisici e il mondo vivente. E' stata questa visione della matematica che ha intensificato il dibattito e arricchito il confronto, contribuendo a far risaltare l'apporto di questa disciplina nei diversi ambiti.

Bibliografia

Adelsberger, H., Collis, B., Pawlowski J.M. (a cura di) (2002), *Handbook on information technologies for education and training*, Berlin: Springer.

Andersson, B., Bach, F. (2005), On designing and evaluating teaching sequences taking geometrical optics as an example, *Science Education*, 89 (2), pp. 196-218.

Balestra, A. (2009), L'Acquario in classe: un'esperienza di duplice integrazione, in Atti del Convegno *New Trends in Science and Technology Education*, Modena, 21-23 Aprile 2009, vol. 2, pp. 297-299.

Black P., Harrison C., Lee C., Marshall B., William, D. (2006), *Assessment for learning. Putting into practice*, Chapter 4: *Putting into practice*, Berkshire, England: Open university press.

Black P., William D. (1998), Inside the black box: Raising standards through classroom assessment, *Phi Delta Kappan*, 80 (2), pp. 139-148.

Berlin, D. F., White, A. L. (1994), The Berlin-White Integrated Science and Mathematics Model, *School Science and Mathematics*, 94, pp. 2-4.

Borgato M.T. (2009), L'insegnamento integrato della matematica e delle scienze: percorsi interdisciplinari e transdisciplinari del progetto ISSUE, in Atti del Convegno *New Trends in Science and Technology Education*, Modena, 21-23 Aprile 2009, vol. 2, pp. 25-40.

Borgato M. T. , Gnani G., Balestra A.(2012), *Symmetries. Teacher's guide for an integrated teaching learning sequence of mathematics and science*, Bologna: Clueb.

Davis K. S. (2003), Change is hard': What science teachers are telling us about reform and teacher learning of innovative practices, *Science Education*, 87 (1), pp. 3-30.

Driver R., Asoko K., Leach J., Scott P. (1994), Constructing Scientific Knowledge in the Classroom, *Educational Researcher*, October 4, pp. 5-12.

Duit R. (2003), Conceptual change: a powerful framework for improving science teaching and learning, *International Journal of Science Educatio*, 25 (6), pp. 671-688.

Gnani G. (2009), Dalla formazione iniziale alla formazione permanente degli insegnanti di Matematica e Scienze: esperienze e materiali on line, in Atti del Convegno *New Trends in Science and Technology Education*, Modena, 21-23 Aprile 2009, vol. 2, pp. 207-213.

Jonassen, D.H. (1994), Thinking Technology, Toward a Constructivistic Design Model, *Educational Technology*, 34, April, pp. 34-37.

Jonassen, D.H. (1999), Designing constructivistic learning environments, in C.M. Reigeluth (a cura di), *Instructional design theories and models*, vol. 2, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kattman, U**.**, Duit, R., Gropengieber, H., Komorek, M. (1996), *Educational Reconstruction – bringing together of Scientific Clarification and Students' Conceptions*, Paper presented at the Annual Meeting of the National Association of Research in Science Teaching (NARST), St. Louis, April 1996.

Leach, J., Scott, P. (2002), Designing and evaluating science teaching sequences: An approach drawing upon the concept of learning demand and a social constructivist perspective on learning, *Studies in Science Education*, 38, pp. 115-142.

Lijnse, P. (1994), Didactical structures as outcome of research on teaching-learning sequences?, *International Journal of Science Education*, 26 (5), pp. 537-554.

Lustig, F. (2009), Experiences and results from the european project integrated subject science understanding in Europe, in Atti del Convegno *New Trends in Science and Technology Education*, Modena, 21-23 Aprile 2009, vol. 2, pp. 7-24.

Meheut M. (2005), Teaching-learning sequences tools for learning and/or research, in K. Boersma et Al. (a cura di), *Research and the Quality of Science Education*, Dordrecht, NL Springer, pp. 195-208.

Meheut, M. (2006), Ricerche nella didattica e nella formazione degli insegnanti di scienze, in *L'insegnamento delle scienze nelle scuole in Europa-Politiche e ricerche*, Rete Euridice, Direzione generale Istruzione e Cultura.

Meheut, M., Psillos, D.(2004), Teaching-learning sequences: aims and tools for science education research, *International Journal of science Education*, 26 (5), pp. 515-535.

Osborne, J., Erduran, S., Simon, S. (2004), Enchancing the Quality of Argumentation in School Science, *Journal of Research in Science Teaching*, 41 (10), pp. 994-1020.

Saint-Georges, M.(2001), L'analyse des dialogues de classe: un outil pour une formation didactique des professeurs de sciences, *ASTER*, 32, pp. 91-122.

Tiberghien, A. (2000), Designing teaching situations in the secondary school, in R. Millar, J. Leach e J. Osborne (a cura di), *Improving science educa-*

tion. The contribution of research, Buckingham: Open University press, pp. 27-47.

Venville, G.J., Wallace, J., Rennie, L.J., Malone, J.A. (2000), *Curriculum Integration: Eroding the High Ground of Science as School Subject?*, Science and Mathematics Education Centre, Perth, WA Australia: Curin University of Technology.

Wilson, B.G. (a cura di) (1996), *Constructivist learning environments. Case studies in instructional design*, Englewood Cliff, NY: Educational technology publications.

Il progetto regionale EM.MA. a Ferrara:un'esperienza di riflessione sulla didattica e di formazione dei docenti in una prospettiva di continuità verticale

Daniela Gambi(*), Isabella Stevani (*), Anna Pelizzari (**)

1. Premessa

Le rilevazioni sui livelli di apprendimento in matematica dei quindicenni (Pisa 2006), la prova nazionale INVALSI effettuata nell'ambito degli esami di licenza media (Legge 176/2007) e le numerose indagini svolte a livello regionale, hanno messo in evidenza una chiara criticità nelle competenze degli allievi della regione Emilia Romagna, confermata anche dall'ampia presenza di debiti formativi nella scuola secondaria di secondo grado.

Questi risultati durante l'anno scolastico 2008/2009, hanno spinto l'Ufficio Scolastico Regionale (USR ER) a promuovere 'EM.MA.: emergenza matematica', un progetto di ricerca-azione rivolto ai docenti di matematica del primo ciclo di istruzione. L'obiettivo di tale progetto era sensibilizzare il personale docente interessato mediante una presa di coscienza generalizzata del problema e l'instaurarsi di un confronto sulle strategie didattiche opportune: rivisitazione delle metodologie di insegnamento, analisi delle modalità di valutazione, eventuali iniziative di recupero, messa a punto di curricoli disciplinari in verticale.

Nel corso del primo anno di attuazione del progetto, Ferrara ha coinvolto anche i docenti di matematica della scuola secondaria di secondo grado, sia per perseguire pienamente le finalità del progetto stesso sia per realizzare una serie di attività di analisi, ricerca e sperimentazione didattica in continuità verticale, allo scopo di attribuire un reale significato al nuovo obbligo scolastico.

Per far sì che il progetto fosse un'occasione di formazione per tutti i docenti di matematica delle scuole di ogni ordine e grado,

(*) Liceo Ariosto di Ferrara (danygam@libero.it) (stevisa@libero.it).
(**) Scuola Primaria di Ostellato (FE) (annapelizzari@libero.it).

l'organizzazione di EM.MA. è stata abbastanza complessa, con la costituzione di un organigramma ben definito. A livello regionale (U.S.R.) è stato istituito uno staff di pilotaggio, e, in ogni provincia, un presidio matematico coordinato direttamente dall'Ufficio Scolastico Territoriale, che doveva occuparsi di promuovere le iniziative di formazione e autoformazione territoriali. In particolare a Ferrara questo presidio coincideva con l'Istituto Scolastico 'Liceo Ariosto', individuato precedentemente quale sede del progetto ministeriale M@t.abel. Lo staff di progetto di Ferrara era costituito da quattro formatori-tutor senior, scelti tra i docenti della scuola primaria e secondaria di primo grado e da due tutor M@t.abel, allo scopo di mantenere un collegamento tra i progetti e non disperdere le risorse umane[48]. Infine ogni singola Istituzione Scolastica della provincia ha creato un proprio piccolo staff composto da docenti di matematica riconosciuti come tutor junior. Compito dei tutor senior era organizzare e realizzare i seminari formativi rivolti ai tutor junior che a loro volta, d'intesa con il rispettivo Dirigente Scolastico, erano incaricati di coinvolgere i relativi dipartimenti organizzando incontri di informazione, confronto e ricerca sulla didattica della matematica. L'Ufficio Scolastico Territoriale per facilitare i tutor senior nella gestione degli interventi di coordinamento dei tutor junior, ha suddiviso le Istituzioni Scolastiche del territorio in tre reti: Alto Ferrarese, capofila la Direzione Didattica di Renazzo; Ferrara centro, capofila la scuola secondaria di primo grado 'De Pisis' e il Basso Ferrarese, capofila la Direzione Didattica di Ostellato.

2. Organizzazione

Il percorso formativo nell'ambito del progetto EM.MA.a Ferrara, ha acquisito una struttura e una articolazione sempre più complesse dall'anno 2008 fino al 2011, a partire dal coinvolgimento delle scuole primarie e secondarie di primo grado. L'elemento che ha differenziato il progetto a Ferrara rispetto a quelli delle altre province della Regione è consistito nella richiesta di un contributo partecipativo anche ai docenti del biennio di secondo grado, referenti nelle rispettive scuole dei curricoli del nuovo obbligo scolastico (nuovi assi culturali).

Già nel corso della prima annualità del progetto, le attività di confronto, analisi e riflessione sono passate dalla modalità 'in verticale', con la partecipazione cioè di insegnanti dei diversi ordini di scuola, ad una rica-

[48] Tutor Senior: Angela Balestra, Roberta Farina, Daniela Gambi, Antonella Mori, Anna Pelizzari, Isabella Stevani

duta ‘in orizzontale’ in ciascun plesso scolastico della provincia, per favorire un crescente coinvolgimento da parte delle varie comunità di docenti.

In dettaglio, nel corso dell’a.s. 2008/2009, il percorso è iniziato con un seminario regionale a Bologna il 15 Dicembre 2008, durante il quale sono stati illustrati i principali obiettivi e le modalità di articolazione del progetto. Successivamente il gruppo provinciale di coordinamento di EM.MA. ha organizzato il primo seminario provinciale, svoltosi il 20 febbraio 2009 presso il presidio M@t.abel, in cui il progetto è stato presentato ai docenti referenti di EM.MA. (tutor junior) individuati nelle singole Istituzioni Scolastiche della provincia. Si è avviata in tal sede una riflessione sulla didattica della matematica, a partire da un’analisi della situazione nella scuola dell’obbligo, per passare ad un excursus sugli esiti delle valutazioni nazionali e internazionali e della Quarta Prova scritta dell’Esame di Stato conclusiva del Primo Ciclo d’Istruzione. Nella parte conclusiva del seminario è stata declinata ai docenti la proposta formativa di EM.MA.: l’avvio, a partire da tali esiti, di una riflessione didattica più ampia, che potesse coinvolgere i docenti di matematica, dalla primaria al biennio di secondo grado, sulle problematiche dell’apprendimento e su possibili strategie migliorative, da elaborare attraverso un confronto organico e permanente tra docenti di ordini di scuola diversi. Per attuare il progetto con efficacia e capillarità, come sopra esposto, il territorio ferrarese è stato suddiviso in tre aree (Alto Ferrarese, Ferrara centro, Basso Ferrarese) in ognuna delle quali sono stati organizzati i cosiddetti ‘incontri di rete’.

In questi primi seminari ‘locali’, è iniziato un confronto con raggruppamenti di realtà scolastiche con specifici bisogni formativi per cercare di avviare una ricerca sulle problematiche didattiche più stringenti tra ordini di scuola differenti, dopo anni di lavoro ‘a compartimenti stagni’, mirando all’approfondimento del legame di interconnessione primaria – secondaria. La sensibilizzazione ad un approccio cooperativo tra gradi di istruzione diversi, operanti nello stesso territorio, si è articolata in due incontri di rete a distanza di quasi due mesi l’uno dall’altro, il 27 marzo e il 13 maggio 2009. Organizzati in gruppi eterogenei per ordine scolastico, i docenti tutor junior hanno intrapreso un percorso di riflessione sulle pratiche didattiche in relazione al processo di apprendimento e agli esiti delle prove di valutazione nazionali, sotto la guida e il coordinamento dei senior presenti: ciascuna Rete Territoriale aveva come focus nuclei tematici differenti tra quelli indicati nel Quadro di Riferimento del SNV (Numeri, Relazioni e funzioni; Misura, Dati e previsioni; Spazio e figure). In tal modo il gruppo di pilotaggio provinciale ha potuto sviluppare attività di lavoro su tutti e quattro i nuclei di contenuto, oggetto delle prove Invalsi. I gruppi di lavoro costituiti, a partire dall'analisi di quesiti Invalsi della Quarta Prova scritta dell'Esame di Stato conclusiva del Primo Ciclo d'Istruzione e delle prove periodiche assegnate nella scuola primaria hanno esaminato la struttura degli items più significativi, cercando di far emergere dal dibattito, a tratti molto acceso e animato, i principali ostacoli cognitivi, di porre l'attenzione sugli aspetti positivi e negativi delle prassi didattiche in uso e di far scaturire proposte di costruzione di curricoli in verticale e possibilità di impostare strategie didattiche e approcci metodologici nuovi.

Le riflessioni prodotte in seno agli incontri di rete sono state infine condivise con tutti i tutor delle scuole della provincia in occasione del seminario conclusivo della prima fase del progetto, tenutosi il 29 maggio 2009. Nel primo anno di esperienza, il filo conduttore della ricerca è stato quello di evidenziare la centralità di una presa di coscienza collettiva, riguardo alla necessità ed esigenza di integrare in verticale le competenze e il background professionale dei singoli docenti. Lo scopo era quello di condividere con i colleghi il significato di 'apprendimento della matematica' come acquisizione di un sapere organico, graduato e consapevole da parte degli studenti e di rimarcare la valenza socio-culturale fondamentale della matematica nella formazione dei giovani come futuri cittadini.

La seconda fase di EM.MA., durante tutto l'arco dell'anno scolastico successivo, ha comportato un complesso e diversificato iter formativo all'interno delle singole Istituzioni Scolastiche. I colleghi delle scuole primarie, secondarie di primo grado e, in alcune realtà, anche del biennio della secondaria di secondo grado, hanno intrapreso un percorso di riflessione sugli stessi nuclei precedentemente scelti, nel proprio contesto di lavoro, coordinati dai tutor junior formati l'anno precedente. La ricaduta delle attività del primo anno non è risultata omogenea sul territorio, anche per l'avvicendamento di colleghi nuovi nel ruolo di tutor junior per motivi diversi (rinunce per mobilità, in particolare). I tutor senior sono intervenuti per l'avvio delle attività di formazione solo in fase iniziale: nel seminario di apertura tenutosi il 25 novembre 2009, le referenti provinciali hanno illustrato le tappe del percorso progettuale, da concludere entro il maggio 2010, hanno tracciato un bilancio del lavoro svolto l'anno precedente e hanno messo in evidenza l'inizio di attività di raccordo con il gruppo di coordinamento del progetto di Nuovo Obbligo Scolastico (N.O.S.) e del progetto P.Q.M. (Progetto Qualità e Merito, attuato nella secondaria di I grado). Il 14 gennaio ha avuto luogo un incontro di aggiornamento, comune ai gruppi EM.M.A., N.O.S. e P.Q.M. sulla valutazione delle competenze.

Il seminario del novembre 2009 ha visto la ricostituzione di gruppi di lavoro dei tutor junior, suddivisi per reti territoriali, per discutere le modalità di predisposizione delle attività proposte nelle singole scuole. Gli incontri di norma previsti sono stati due (in alcuni casi tre) e ogni gruppo di tutor junior ha elaborato un report dell'attività svolta. Sia a marzo sia a giugno sono stati organizzati due momenti di confronto a livello provinciale ("focus groups" coordinati da una tutor senior per ogni dieci junior, senza funzione di osservazione) per sviscerare le difficoltà nell'attuazione di EM.MA. nelle scuole. I "focus groups" hanno permesso così di monitorare in itinere lo sviluppo dei momenti di riflessione e le tipologie di approccio ai temi proposti, scelte dalle scuole in stretta correlazione con i contesti operativi e le esigenze formative in essi rilevate dai tutor junior. Il 20 maggio si è chiusa la seconda annualità del percorso di EM.MA. con la restituzione all'intero collettivo di lavoro dell'analisi dei report delle attività delle scuole. Il ruolo principe è stato quindi giocato, questa volta, dalle diverse comunità di docenti, i quali, mediante la voce dei propri tutor junior, hanno illustrato i lavori sviluppati, evidenziando aspetti positivi e critici dell'attuazione del progetto nelle scuole. Il dibattito è stato vivace ed ha messo in luce una diffusa esigenza di individuare modi, forme e tempi nuovi per non lasciar cadere un dialogo, pur faticoso e complesso, tra docenti all'interno delle scuole e in verticale. Nel corso dell'incontro di chiusura, le tutor senior hanno annunciato ai colleghi presenti che il progetto EM.MA., giunto alla sua conclusione in tutte le altre province della regione, a Ferrara sarebbe invece proseguito con una terza fase, denominata 'EM.MA.2'. La scelta di continuare il progetto nasceva anche dalle richieste di ulteriori approfondimenti in merito agli argomenti sviscerati e agli aspetti metodologici ad essi legati, per arrivare a costruire curricoli in verticale, da intendersi come esperienze complessive dello studente a scuola e costituite da conoscenze, abilità e 'senso'. 'Senso' in particolare, per riscoprire una matematica strumento di lettura e interpretazione della realtà, come linguaggio e come modo di pensare, operare ed attuare delle scelte. Operativamente, il progetto nell'anno scolastico 2010-2011 si è articolato tra i due seminari provinciali, di apertura il 29/11/2010 e di chiusura, il 21/03/2011. All'incontro iniziale ha preso parte anche la referente provinciale del Nucleo Disabilità. Nel corso dell'anno si sono svolti non solo incontri tra i tutor junior e i docenti disciplinari nelle varie Istituzioni Scolastiche in verticale, ma anche due seminari di aggiornamento, aperti a tutti, sulla didattica della matematica:

l'uno sulla struttura delle prove Invalsi, l'altro riguardante il tema dell'argomentazione nella risoluzione dei problemi. Il filo conduttore dell'esperienza progettuale nella terza ed ultima annualità è stato infatti lo studio del processo dell'argomentazione, scelto dalle organizzatrici per il suo alto valore educativo e perché, come emerso dai lavori delle varie reti, ritenuto uno degli aspetti maggiormente critici per l'insegnamento/apprendimento della matematica. Le proposte di approfondimento si sono quindi imperniate sull'argomentazione intesa come processo trasversale, implicato nella comprensione e risoluzione di problemi, nella individuazione della rappresentazione ottimale delle soluzioni e nel monitoraggio e verifica delle stesse. I lavori di riflessione nelle scuole hanno avuto come duplice obiettivo, da un lato, l'analisi di quesiti delle prove di valutazione esterna nazionale e internazionale, incentrati sulla capacità argomentativa e, dall'altro, la progettazione di curricoli in verticale per stimolare e gradualmente potenziare negli studenti la capacità di argomentare i propri ragionamenti.

3. Modalità di lavoro: il confronto, la cultura del dato, l'aggiornamento permanente

L'impostazione metodologica dell' intero iter di sviluppo di EM.MA. si è basata sulla scelta, da parte del gruppo di coordinamento, di valorizzare innanzitutto il confronto tra docenti: riuniti principalmente in gruppi eterogenei per livello di scuola, i colleghi sono stati invitati a condividere le esperienze e le difficoltà dei diversi 'modi di fare scuola', delle strategie didattiche, del 'contratto didattico' stabilito con gli alunni e di esempi di buone prassi attuate con l'obiettivo di matematizzare la realtà. L'attività comune è stata improntata all'individuazione dei saperi disciplinari essenziali e alla valutazione degli strumenti didattici, al fine di ideare problemi a più soluzioni, ricercare nuove strategie didattiche efficaci, costruire prove di verifica in uscita e in entrata nel passaggio da un livello scolastico ad un altro e costruire percorsi il più possibile condivisi, in verticale e in orizzontale, al fine di 'migliorare l'immagine' della matematica e di potenziarne l'aspetto strumentale.

Un secondo elemento sul quale si è fondato il percorso progettuale è rappresentato certamente dalla 'cultura del dato" intesa come individuazione delle analogie e differenze tra le prove curricolari e d'Istituto e prove nazionali, come analisi di dati oggettivi (risultati delle prove Invalsi della scuola primaria e secondaria di 1° grado) da cui partire per rilevare i maggiori ostacoli sul piano cognitivo, e infine come valutazione vera e propria dei testi delle prove esterne in relazione alla verifica degli esiti di insegnamento/apprendimento.

Il progetto EM.Ma è stato infine pensato nello spirito, e forse con l’ambizione, di proporre un modello di aggiornamento permanente per i docenti di matematica, che potesse andare oltre l’esperienza di un triennio. Il gruppo delle tutor senior si propone di avviare la costituzione di un gruppo di ricerca-azione eterogeneo per livello di scuola, costruttivo, dinamico e propositivo, per condividere con i colleghi un modus operandi incentrato su un’attenta analisi disciplinare in verticale, con passaggi continui dalla teoria alla prassi didattica e con particolare attenzione all’aspetto relazionale e al coinvolgimento attivo dello studente nell’apprendimento della matematica.

4. Il ruolo e l’importanza del sistema di valutazione esterna: come usare i risultati

4.1 Valutazione esterna: chi, quando, come

Quando si parla di valutazione esterna si può fare riferimento, da un lato, a prove internazionali quali, ad esempio, IEA TIMSS , rilevazioni periodiche degli apprendimenti in Matematica e Scienze degli studenti al quarto, ottavo e dodicesimo anno di scolarità; OCSE-PISA , rilevazioni a cadenza triennale degli apprendimenti in Matematica, Lettura e Scienze dei quindicenni scolarizzati dei principali Paesi industrializzati e, dall'altro, a prove nazionali, quali le prove INValSI somministrate annualmente a diversi livelli scolastici in forma facoltativa e non.

La rilevazione nazionale condotta dall’INValSI consiste in verifiche periodiche e sistematiche sulle ‘conoscenze e abilità’ degli studenti, relativamente agli apprendimenti di base - italiano, matematica e scienze - nelle classi seconde e quarte della scuola primaria, nella prima classe della scuola secondaria di 1° grado e nelle seconde classi della scuola secondaria di 2° grado.

Con l’entrata in vigore della L. 53/2003 e l’approvazione del decreto 19 /11/2004 n. 286 (Istituzione del SNV (Servizio Nazionale di Valutazione)) si è passati, a decorrere dall’anno scolastico 2004/05, dalla fase sperimentale di Progetti Pilota, a base volontaria, alla rilevazione nazionale degli apprendimenti, obbligatoria per tutte le scuole, attraverso la Quarta Prova scritta dell’Esame di Stato conclusivo del Primo Ciclo di Istruzione. Con la più recente normativa (Direttiva annuale a.s. 2010/2011 (n°67), Nota ministeriale MIUR su SNV 2010-11 del

30.12.2010 (pubblicata 11.1.2011), Nota ministeriale 20 04 2011 prot. 2792 (pubblicata 20.4.2011) si è estesa l'obbligatorietà della somministrazione censuaria alle classi seconde del secondo grado.

4.2 Valutazione INValSI: il contesto di riferimento

Per comprendere il ruolo e l'importanza delle prove Invalsi nella didattica 'quotidiana' dell'insegnante, occorre studiare il contesto di riferimento da cui prende le mosse questo tipo di valutazione. Occorre cioè analizzare il Quadro di Riferimento (QdR), in cui vengono presentate le idee chiave che guidano la progettazione delle prove, comprendere che le prove sono finalizzate all'analisi del raggiungimento di 'competenza in matematica', a differenza delle prove Ocse-Pisa che tendono a valutare le 'competenze matematiche' del futuro cittadino, conoscere gli intendimenti del sistema di valutazione, quale matematica viene valutata e quali ambiti di valutazione vengono considerati. A tale scopo può risultare molto utile, ad esempio, la lettura di un fascicolo della Quarta Prova nella sua interezza ed in particolare le Note per l'insegnante, in cui per alcuni quesiti viene fornita una indicazione di cosa è possibile rilevare dalle risposte dei ragazzi, viene condotta una analisi di alcuni errori più frequenti e viene fatto riferimento puntuale agli obiettivi di apprendimento, fissati dalle disposizioni di legge. E' evidente quindi che queste prove non vogliono essere solo una misurazione dei livelli di apprendimento dei nostri studenti, fine a se stessa, ma hanno lo scopo di aiutare l'insegnante ad utilizzare al meglio la prova nazionale come strumento per la valutazione dei propri allievi e per la loro crescita formativa.

Le finalità di questo sistema si possono così riassumere:

- monitorare l'efficacia del sistema scolastico attraverso i risultati ottenuti in termini di livello di apprendimenti degli studenti, all'interno di un quadro di riferimento condiviso;
- operare un confronto di dati, utile ai docenti per riflettere sulle abilità e conoscenze degli alunni, sulle scelte didattiche, sul curriculum svolto;
- allineare progressivamente a standard nazionali tali da poter raggiungere livelli crescenti di qualità, con mirate azioni di stimolo e sostegno.

Ci si chiede quale matematica stia alla base delle scelte INValSI, se sia la stessa condivisa dagli esperti nazionali e internazionali, e se coincida con quella insegnata nella prassi didattica diffusa. Si legge che si intendono valutare l'apprendimento di conoscenze e metodi relativi ad una concezione di matematica intesa come:

- atteggiamento e strumento per la conoscenza ossia come modo di vedere, leggere e interpretare la realtà;
- linguaggio per descrivere, definire, spiegare, argomentare, dimostrare;
- modo di pensare, modo di operare che influenza scelte e previsioni.

Dall'analisi delle prove emerge infatti una matematica povera di automatismi e di addestramento algoritmico, mentre è prevalentemente sottesa una conoscenza libera da stereotipi o da memorizzazioni acritiche. Si intende valutare cioè il possesso di una idea di matematica ancorata ad un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze a livello semplice e non banale. Non una pura applicazione di regole e formule, ma una matematica che si esprima con un linguaggio preciso. Una matematica insomma che sia fattore di crescita per la persona, che sia strumento di conoscenza della realtà, che sia linguaggio preciso, univoco, obiettivo, indispensabile per descrivere tale realtà, senza eccedere in astrazione e formalismo, ma limitandosi ad un formalismo comprensibile e apprezzabile ai diversi livelli di età in cui ci si colloca. Si cerca quindi una mediazione fra i vari aspetti dell'apprendimento della matematica: algoritmico, concettuale, di strategie, di comunicazione e di gestione delle rappresentazioni.

4.3 Valutazione interna ed esterna: i diversi ruoli, le problematiche emerse e le possibili soluzioni

Quando si parla di valutazione, in generale, e in matematica, in particolare, tutti concordano nel dire che è una questione molto complessa, non riconducibile a schemi.

I diversi processi valutativi messi in atto dall'insegnante accompagnano la vita di classe, istante per istante, ne sono parte integrante e seguono quotidianamente i progressi e le conquiste degli allievi. Come emerge da alcuni articoli scaturiti dalla ricerca in didattica della matematica, si può pensare che l'insegnante, quando valuta gli apprendimenti dei propri allievi, abbia principalmente le seguenti finalità:
- misurare l'efficacia della propria azione didattica in modo da poter trarre giudizi sulle funzionalità delle scelte metodologiche attuate;
- misurare l'opportunità della scelta di un dato segmento curricolare, in modo da valutare l'efficacia della sua trasposizione didattica;
- misurare lo stato cognitivo di ogni singolo allievo, traendo così indicazioni sul passaggio dal 'sapere insegnato' al 'sapere appreso' e dunque sulla congruenza tra 'curricolo auspicato' e 'curricolo effettivo'.

Ciascuno di questi punti è problematico, ma c'è un fatto sul quale tutti i ricercatori concordano e cioè che, al di là del tipo di valutazione che si mette in atto, sia sempre e comunque necessaria l'implicazione personale dello studente nella costruzione della propria conoscenza e nell'acquisizione di 'competenza matematica'. La verifica di un apprendimento, pertanto, è significativa solo se si colloca in una situazione in cui questa implicazione è avvenuta. Altrimenti tale verifica potrà al più valutare il minore o maggior divario tra le risposte auspicate e le risposte ottenute e non la effettiva qualità dell'apprendimento (necessaria per l'impostazione delle eventuali azioni didattiche di recupero). La valutazione effettuata dall'insegnante di classe anche se è attuata mettendo in atto tutti gli accorgimenti possibili per renderla efficace possiede comunque alcuni limiti oggettivi quali, ad esempio, quelli dovuti al fatto che l'utilizzo di metodologie attese implicano comportamenti attesi degli allievi o che l'utilizzo di un linguaggio condiviso spesso influenza le risposte e le interpretazioni degli studenti e quindi il test può non essere completamente attendibile.

Rispetto alla valutazione dell'insegnante di classe una valutazione esterna, oltre all'eventuale raggiungimento degli obiettivi che si pone ogni sistema di valutazione, può offrire qualcosa di più. Un confronto dei propri risultati con quelli su scala nazionale può far acquisire una maggiore consapevolezza di sé, essere di stimolo per gli studenti e gli insegnanti e favorire quindi un miglioramento dell'insegnamento-apprendimento ed una tendenza della scuola verso l'eccellenza. La conoscenza dei livelli dell'apprendimento su scala nazionale può spingere i decisori politici verso l'identificazione delle priorità del nostro sistema scolastico.

Al contempo, però, questa valutazione, a differenza di quella interna, può comportare per gli studenti un maggiore stress emotivo e anche smarrimento, perché lo studente non riconosce le metodologie usuali, incapacità di gestire situazioni non abituali, difficoltà di comprensione di un linguaggio non usuale, non riconoscimento degli obiettivi della valutazione, non riconoscimento del senso delle richieste, incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e le richieste. Esistono inoltre limiti evidenti di questa prova, legati al fatto che non potrà mai essere una valutazione del percorso evolutivo del singolo alunno, ossia del processo di formazione e crescita dell'individuo per la quale sono necessari tempi lunghi e una attenta osservazione dell'insegnante.

4.4 Il Progetto EM.MA.: un esempio di come leggere e utilizzare i risultati delle prove INValSI e non solo, al fine di ricercare nuove strategie didattiche

Il lavoro condotto nell'ambito del progetto EM.MA ha preso le mosse dall'esperienza maturata in Emilia-Romagna, ha fatto tesoro delle indicazioni e dei tanti materiali messi a disposizione dai formatori regionali e ha sollecitato lo svolgimento di attività in cui sono state messe in atto strategie condivise e risultate vincenti in quella occasione. Il progetto ha quindi contribuito a sensibilizzare i docenti sulla necessità di valorizzare il ruolo delle valutazioni esterne nazionali, al fine di migliorare i livelli di apprendimento degli studenti e di riflettere sulla didattica disciplinare e sulla esigenza di rinnovare modalità, strategie didattiche, impostazione dei contenuti oggetto di studio nei diversi segmenti scolastici coinvolti. In Emilia Romagna si sono attuati specifici incontri per le scuole mirati ad approfondire gli aspetti salienti della 'cultura della valutazione': in essi si è esplicitato lo scopo di tali rilevazioni e dei risultati attesi, si è condotta un'analisi critica dei dati e si è dato un ampio spazio a momenti di confronto e riflessione sulle prove stesse, con discussioni anche animate sui punti di forza ma anche in merito alle perplessità dei docenti sugli aspetti indubbiamente da migliorare sul piano della progettazione, della somministrazione e delle ricadute sulla didattica curricolare delle prove.

In tutti i gruppi di lavoro delle Reti provinciali nel corso della prima annualità di EM.MA. si è partiti dalla lettura di una Quarta Prova, presa a campione, e dall'analisi dei quesiti, afferenti al Nucleo tematico scelto dalla Rete, che hanno avuto i migliori e i peggiori risultati nella propria scuola, nelle scuole dell'Emilia Romagna e in quelle del resto d'Italia. Questa analisi condotta tramite la lettura delle *Note per l'insegnante*, contenute nel fascicolo della Quarta Prova, e l'utilizzo di un *Modello di scheda* di analisi ha permesso di comprendere gli obiettivi e le competenze richieste e di ipotizzare le motivazioni delle risposte fornite dagli studenti e riflettere sulla propria didattica.

Parallelamente all'analisi per *item*, i docenti hanno condotto un'analisi in dettaglio dei dati della propria scuola, in riferimento ai dati nazionali e quindi hanno proceduto all'elaborazione di un *Rapporto di scuola*. Questa utile operazione ha permesso di imparare a leggere analiticamente i dati della propria classe, a rielaborarli e a confrontarli in gruppi disciplinari con i dati di altre classi (per capire se i risultati di una classe si dovevano attribuire a determinate scelte didattiche personali o a condizioni di partenza o a scelte curricolari dell'intera scuola).

L'analisi a livello provinciale degli item, in riferimento ai contenuti e ai processi sottesi, ha permesso di individuare gli ambiti tematici in cui gli studenti hanno conseguito i risultati migliori o peggiori, definire proprietà e obiettivi valutativi degli ambiti individuati, formulare ipotesi e far emergere le cause più profonde degli esiti, leggere quesiti e risultati di uno stesso ambito in verticale (primaria, secondaria di primo grado e secondaria di secondo grado) per ricavare utili indicazioni sulle difficoltà di apprendimento più diffuse fra gli studenti a vari livelli.

Nel contempo la lettura in parallelo di quesiti ed esiti relativi alle tre discipline (italiano, matematica e scienze) ha permesso di evidenziare le interconnessioni fra le abilità possedute in ciascuna di esse e la possibilità di utilizzo di una abilità da un contesto ad un altro. Da una parte sono emerse le aree di maggiore difficoltà in ciascuna disciplina a livello di conoscenze o di abilità scarsamente acquisite ma è stato possibile anche constatare il ruolo essenziale che alcune competenze trasversali, quali ad esempio quella linguistica, assumono per la comprensione e l'apprendimento disciplinare in particolare nel passaggio non banale dal linguaggio naturale al linguaggio specifico. La constatazione di come la capacità di leggere ed interpretare un testo rientri di fatto, a pieno titolo, fra le abilità valutabili anche in matematica ha portato a chiedersi come si possa elaborare un percorso trasversale finalizzato al potenziamento di tale competenza e quali nuovi indirizzi sostenibili possa assumere l'interdisciplinarietà.

La discussione e il confronto sulla prova d'esame e su tutte le questioni didattiche connesse (abilità e competenze di fine ciclo, argomenti, modalità apprendimento-insegnamento) hanno restituito agli insegnanti importanti informazioni sulla efficacia delle scelte didattiche messe in atto ed hanno fornito loro suggerimenti utili per migliorare il proprio progetto didattico. Dall'analisi congiunta delle varie prove con gli esiti generalmente ottenuti, si è potuto constatare come effettivamente emergano interessanti elementi di riflessione sulle metodologie più idonee, sui percorsi più efficaci, sugli ambiti disciplinari da sviluppare o potenziare, o anche sull'immagine e l'interpretazione della disciplina stessa offerti agli alunni. L'analisi, condotta nei gruppi di lavoro, di materiali di riferimento quali quelli elaborati nell'ambito del progetto M@t.abel o di altre risorse sulla valutazione, sugli ostacoli cognitivi e sulle 'buone pratiche', ha costituito anche un'ottima occasione di arricchimento professionale e di stimolo per diversi insegnanti, che ultimamente affrontano con un misto di rassegnazione e, forse, senso di inadeguatezza, le difficoltà e gli insuccessi dell'insegnare ai giovani che crescono in una società sempre più complessa quale quella del Terzo Millennio. Il confronto su cosa si vuole che gli studenti sappiano e sappiano fare, ad ogni livello - dai gruppi di classi parallele di una stessa scuola al sistema scolastico nazionale - ha fornito indicazioni su cosa fare e come fare . La riproposizione alle classi delle prove di anni precedenti, con lo scopo di discutere e farsi spiegare il motivo delle varie scelte, ha fatto comprendere che anche l'esito positivo di una prova può nascondere errori concettuali gravi e quindi ha permesso di cogliere l'importanza di lavorare con gli studenti in particolare sull'argomentazione, in modo da attivare processi metacognitivi fondamentali per il miglioramento degli apprendimenti.

L'attività di formazione nell'ambito di EM.MA. si è svolta sotto l'auspicio di una crescente partecipazione degli insegnanti, con il chiaro intento di motivarli a far propri approfondimenti e riflessioni sulle prove di rilevazione esterna degli apprendimenti e a considerare le stesse come elemento di accompagnamento costante, utile ad innescare, alimentare e sostenere, nella quotidianità della scuola, processi autovalutativi di riflessione, di analisi e di maturazione di possibili cambiamenti di rotta, per un rilancio annuale delle progettazioni disciplinari e della globale articolazione dei POF[49] dei vari Istituti.

Il ritorno all'INValSI di tutte le osservazioni scaturite dal lavoro di riflessione dei docenti sulle prove, nell'ambito del Progetto EM.MA., ha avuto infine l'obiettivo di far arrivare agli estensori delle prove indicazioni sulla 'bontà' dei quesiti proposti, perché potessero avere un riscontro ma soprattutto ha permesso, anche nel nostro sistema scolastico, di avviare un processo di costruzione e diffusione di quella 'cultura della valutazione' cui si è fatto riferimento in precedenza ma con obiettivi, mezzi e tempi il più possibile condivisi da tutti gli attori del sistema scolastico.

Tutti gli elementi considerati ci hanno quindi permesso di vedere e far vedere come l'interpretazione corretta dei risultati di un'indagine di valutazione esterna fornisca importanti informazioni che l'insegnante può, da un lato, utilizzare all'interno di una più generale valutazione dello studente, che tenga conto di tutte le componenti dell'apprendimento e della crescita del ragazzo, predisponendo valutazioni interne più complete e quindi più affidabili e, dall'altro, progettare e condurre in aula in modo più efficace l'azione didattica per migliorare in modo significativo l'insegnamento della matematica. Il tutto in un'ottica secondo cui le attività legate alle prove non diventino oggetto di 'addestramento' che con-

[49] Piano dell'Offerta Formativa

dizioni o muti il percorso di apprendimento progettato dal docente ma si integrino armonicamente con le sue libere scelte didattiche, gestite nell'ambito dell'offerta formativa condivisa con l'Istituzione Scolastica in cui essi operano.

5. Cosa è emerso: aspetti positivi e problematici

La lunga e articolata serie di eventi legati al percorso progettuale è stata periodicamente monitorata e ha condotto il gruppo organizzatore a ricalibrare in itinere le modalità di sviluppo delle proposte messe in campo, integrate e modificate in taluni casi, per andare incontro il più possibile alle richieste dei colleghi. Si è cercato in tal modo di incidere maggiormente sui diversi contesti scolastici, mirando ad una partecipazione dei docenti più attiva e consapevole, perché motivata da uno strumento formativo da loro ritenuto efficace per migliorare l'agire didattico.

Volgendo lo sguardo al lavoro svolto nell'arco di un triennio nella nostra provincia, i tutor senior hanno potuto individuare diversi punti di forza dell'esperienza vissuta, ai quali tuttavia hanno fatto da contralto taluni elementi critici, che ne hanno in parte condizionato l'efficacia.

Tra gli aspetti positivi è sicuramente da evidenziare la disponibilità autentica all'ascolto reciproco da parte dei docenti coinvolti. Il percorso progettuale è stato ritenuto dai partecipanti una importante occasione di confronto fra colleghi di ordine diverso , al fine di:
- migliorare la conoscenza delle reciproche realtà scolastiche, per smorzare la 'diffidenza' nei confronti dei colleghi che insegnano in un ordine scolastico diverso;
- individuare gli elementi di continuità esistenti tra livelli scolastici differenti sul piano linguistico, contenutistico e metodologico;
- riflettere sulle metodologie in uso e sui contenuti proposti dai due ordini di scuola;
- individuare e condividere le difficoltà nella pratica didattica;
- analizzare insieme i risultati delle prove Invalsi, ciascuno secondo la propria 'visuale didattica'.

Già dalla prima fase attuativa del progetto EM.MA. è emersa in modo diffuso la volontà di costruire un curricolo in verticale ed è stata in generale apprezzata anche l'opportunità di costruire insieme prove di verifica a partire da un nucleo tematico condiviso, in modo da poter poi confrontare i risultati individuando le eventuali misconcezioni.

Cosa avrebbe potuto funzionare meglio? Di certo i tempi di attuazione. Il periodo di svolgimento degli eventi (seminari e incontri di Rete in particolare) è risultato molto sfasato rispetto alla pianificazione delle attività scolastiche ordinarie dei singoli plessi. Sarebbe infatti stato necessario un avvio della programmazione ad inizio d'anno scolastico, per una adeguata ricaduta nella prassi didattica, mentre i lavori più impegnativi si sono concentrati preliminarmente nella seconda parte dell'anno. Per quanto concerne i contenuti oggetto della ricerca-azione, l'analisi delle abilità richieste per lo svolgimento delle prove Invalsi ha messo in risalto una mancata coerenza delle stesse con le attività ordinarie che i docenti hanno raccontato di svolgere nelle proprie classi: le prove risultano, infatti, generalmente strutturate in modo diverso da ciò che si propone di solito, anche nei libri di testo. La gran parte dei gruppi di lavoro ha inoltre osservato il fatto che le prove INVALSI non risultano sempre congruenti con gli obiettivi curricolari e anche il linguaggio utilizzato non è spesso di facile comprensione per gli studenti. Nel corso degli incontri, infine, è stato segnalato un malessere diffuso riguardo ai libri di testo in uso, ritenuti da molti inadeguati in riferimento alle esigenze del curricolo e alla costruzione di competenze essenziali per la formazione dello studente.

Proprio per diffondere la cultura del confronto nella comunità dei docenti, anche in chiave interdisciplinare, e per impostare una ricerca davvero fruttuosa ed estesa ad un crescente numero di operatori nel campo della didattica della matematica, sarebbe stato necessario avere a disposizione tempi più lunghi per EM.MA, ciò avrebbe permesso di approfondire meglio l'analisi di luci ed ombre delle prassi didattiche attuali. Un progetto di riflessione-formazione così interessante ed ambizioso avrebbe potuto ricercare risposte maggiormente mirate alle esigenze sempre più complesse delle varie realtà scolastiche coinvolte e rendere partecipi attivamente molti dirigenti e docenti in più nel corso del tempo.

6. Difficoltà incontrate sul piano organizzativo e didattico

Nel corso dell'esperienza sono emerse alcune difficoltà che si possono ascrivere essenzialmente a due piani: organizzativo e didattico.

Sul piano organizzativo:

1) impossibilità di pianificare incontri ad inizio d'anno in Istituti comprensivi di recente costituzione;
2) difficoltà di conciliare gli incontri pianificati nel Progetto con i numerosi impegni precedentemente calendarizzati nelle diverse Istituzioni scolastiche;
3) necessità di tempi fisiologici indispensabili per la costruzione di dinamiche relazionali implicite ed esplicite finalizzate alla costruzione di un

gruppo operativo e produttivo di docenti appartenenti a ordini scolastici diversi;
4) problemi sorti in alcuni contesti a causa di una non adeguata disponibilità dei docenti, dovuta essenzialmente al mancato riconoscimento di tipo economico delle ore dedicate agli incontri EM.MA..

Sul piano didattico:
1) conoscenza parziale dei curricoli dei diversi ordini di scuola;
2) visione della matematica prevalentemente 'meccanica' e strumentale;
3) non sempre serena meta-riflessione e adeguata disposizione alla flessibilità, per un eccessivo riferimento al contesto didattico;
4) difficoltà di riconoscimento di concetti noti in situazioni problematiche 'nuove'.

Da una approfondita analisi delle difficoltà riscontrate e da una conseguente riflessione sul loro possibile superamento, avvenute nel corso dei seminari provinciali di fine anno, è emersa una richiesta diffusa di continuare a lavorare nello spirito e nel solco del progetto, nella prospettiva di progettare un'attività di formazione dei docenti, intesa come ricerca-azione, in collaborazione con Associazioni disciplinari e l'Università.

7. Riflessioni conclusive

Riguardo agli aspetti metodologici è emersa la necessità di:
a. soffermarsi in diverse occasioni con ottiche differenti su alcuni nodi essenziali della matematica per poter consolidare le abilità degli studenti, evitando il mero nozionismo o la memorizzazione di procedure senza l'interiorizzazione dei concetti;
b. lasciare agli alunni tempi più distesi per l'apprendimento;
c. evidenziare errori riconducibili in particolare a carenze nelle competenze che richiedono capacità di astrazione e di applicazione di processi/ragionamenti logici;
d. avviare un lavoro verticale fra i vari ordini di scuola.

In riferimento agli aspetti relazionali all'interno dei gruppi è risultato che:
a. l'esperienza è stata stimolante e coinvolgente al fine di costruire curricoli verticali;
b. il lavoro dei singoli gruppi è stato produttivo per gli spunti di discussione forniti in relazione alle metodologie dei due ordini di scuola;
c. sono prioritarie l'importanza e la necessità di:
- comunicare e confrontarsi a viso aperto;
- costituire una sorta di gruppo di studio-ricerca continuo e sistematico;

- alternare incontri fra docenti dello stesso ordine e di ordini scolastici diversi:
- far rientrare, a pieno titolo, nel progetto gli insegnanti della scuola dell'infanzia;
- prevedere incontri di formazione sugli aspetti contenutistici e metodologici;

d. il lavoro all'interno delle singole Istituzioni scolastiche dovrebbe essere necessariamente coordinato da almeno due tutor junior per un'equa distribuzione dei carichi e delle responsabilità e un utile confronto.

Sulle azioni da intraprendere per migliorare la qualità dell'insegnamento si ritiene prioritario partire da:

a. una riflessione e confronto sugli ostacoli cognitivi evidenziati e sulle prassi didattiche, anche prendendo spunto dalle attività M@t.abel, fruibili e molto utili per chi, ad esempio, è all'inizio della carriera professionale;
b. un'analisi dei materiali utilizzati nei corsi di formazione M@t.abel, proposte per la costruzione di curricoli in verticale;
c. una riflessione su come l'insegnante possa 'fare matematica', ad esempio ponendo domande significative, aperte a più soluzioni, che coinvolgano direttamente gli allievi nella costruzione del loro sapere, argomentando i processi risolutivi proposti;
d. un'acquisizione da parte dell'insegnante di una maggiore consapevolezza nel saper operare scelte, calibrare tempi, studiare modalità, per costruire una proposta didattica coerente dal punto di vista del curricolo e adeguata al contesto in cui si trova ad operare.

Sulle richieste di formazione a partire dai bisogni più volte espressi dai docenti coinvolti è emersa la necessità di:

a. creare un nucleo di docenti, dalla scuola primaria alla secondaria superiore, impegnati in una ricerca-azione, che funga da formazione permanente su nuclei tematici e processi, finalizzata all'acquisizione di competenze matematiche in un'ottica verticale;
b. coinvolgere il Dipartimento di Matematica dell'Università come riferimento privilegiato in merito alla formazione disciplinare;
c. avvalersi del supporto di formatori esperti nell'ambito della didattica della matematica.

Bibliografia e sitografia

D'Amore B. (1999a), *Elementi di didattica della matematica*, Bologna: Pitagora [IX ediz. 2005].

D'Amore, B., Godino, J.D., Arrigo, G., Fandiño Pinilla, M.I. (2003), *Competenze in matematica*, Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M.I. (2002), *Curricolo e valutazione in matematica*, Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (1999b), Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22A (3), pp. 247-276.

Fandiño Pinilla, M.I. (2005), La valutazione in matematica e le prove INValSI, *La matematica e la sua didattica*, 3, pp. 359-371.

Zan, R. (1998), *Problemi e convinzioni*, Bologna: Pitagora.

Benini, A.M., Gianferrari, L.(2005), *Valutare per migliorarsi*, Napoli: Tecnodid.

Benini, A.M. (a cura di) (2011), *Le competenze dei quindicenni in Emilia-Romagna: i risultati OCSE-PISA 2009*, Napoli: Tecnodid.

Duval, R. (1996), Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva, *La matematica e la sua didattica*, 2, pp. 130-152.

Garuti, R. (2006), Analisi dei quesiti INValSI 2004/2005, *Innovazione Educativa*, allegato al n.3/4 del 2006, Napoli: Tecnodid.

Orlandoni, A. (2005), Matematica, Scienze e PP3, *Innovazione Educativa*, allegato al n.5/6 del 2005, Napoli: Tecnodid.

OECD (2004), *PISA 2003. Valutazione dei quindicenni*, Roma: Armando Editore.

http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2003/matematica2003.html
www.INValSI.it
www.matematicainsieme.it
http://www.irreer.org

Gli inizi dell'istruzione tecnica a Ferrara
Il ruolo della matematica

Elisa Patergnani*

1. La formazione dei tecnici a Ferrara prima della Legge Casati

L'origine dell'istruzione tecnica pubblica a Ferrara si può far risalire indicativamente al 1675, quando il Legato della Città e del Ducato di Ferrara, Sigismondo Chigi (1649-1678), istituì nel Collegio dei Gesuiti una lettura di matematica per la formazione dei Giudici e Notai d'Argine, ossia dei periti addetti alla salvaguardia del territorio ferrarese minacciato dalle acque del Po e del Reno. Si riconobbe, infatti, che per un'adeguata formazione di esperti nella materia idraulica occorreva anche uno studio teorico della matematica, e in particolare della geometria euclidea. L'istituzione di questa lettura privata avvenne in concomitanza con l'arrivo a Ferrara del matematico padre gesuita Francesco Lana de Terzi (1631-1687), al quale fu affidata anche la lettura di matematica dello Studio. La frequenza alla lettura privata diventò necessaria per l'accesso ai concorsi per i Notai d'Argine[50].

Per la formazione degli ingegneri-architetti e degli artisti fu anche importante l'Accademia di Disegno, istituita nel 1736 sotto il governo dell'Almo Studio, che organizzò una scuola per disegnatori d'architettura e prospettiva. Essa non era comunque ancora una scuola che assicurava corsi formativi regolari ed ordinati; era una Accademia nata secondo il modello dell'Accademia Clementina di Bologna (1710)[51]. Il promotore fu Ercole Antonio Bevilacqua, Giudice dei Savi e Riformatore perpetuo, che, nella Congregazione dell'Almo Studio tenutasi nella residenza del Magistrato il 1 dicembre 1736, propose, in accordo con l'altro Riformatore perpetuo Don Guido Bentivoglio, di introdurre un'Accademia del Disegno, del Nudo e di Architettura nel Palazzo delle Scuole. L'invito fu

* Università degli Studi di Ferrara - Dipartimento di Matematica (elisa.patergnani@unife.it).
50 Fiocca-Pepe (1986), pp. 129-130; Fiocca (1991), pp. 367-369.
51 Farneti-Scassellati (1997), pp. 7-26.

accolto dal Legato Agapito Mosca, che promise il suo appoggio anche per il mantenimento dell'Accademia stessa. Giovannandrea Barotti si occupò della stesura dello statuto. Essa fu subito posta sotto il governo dell'Almo Studio e l'8 febbraio 1737 fu inaugurata ufficialmente. Ebbe sede fin dall'inizio in alcune stanze al piano terra di Palazzo Paradiso. Era divisa in due Scuole: l'una di Figura dove si insegnava la pittura e la scultura, l'altra destinata ai Disegnatori d'Architettura e di Prospettiva. Con la nuova Costituzione emanata da Clemente XIV il 7 aprile 1771 e con i relativi statuti, si stabilì che l'Accademia fosse sottoposta all'autorità e al governo del Collegio dei Riformatori, ai quali fu affidato il compito di stendere un nuovo regolamento. Il 17 dicembre 1773 al posto dell'Accademia vennero aperte due scuole: una scuola di Architettura Civile e Militare, e una Scuola di Pittura. Nonostante il vecchio istituto fosse stato sostituito con veri e propri corsi universitari, la vecchia denominazione di «Accademia del Disegno» continuò ad essere ampiamente usata[52].

Il 23 giugno 1796 i soldati di Napoleone entrarono in Ferrara. Nel 1799 ai francesi si sostituirono gli austriaci, ma nel 1801 Ferrara fu di nuovo sotto il controllo di Napoleone e il 19 gennaio la città entrò a far parte della Repubblica Cisalpina, trasformata poi in Repubblica Italiana[53].

Il Corpo legislativo della Repubblica Italiana il 4 settembre 1802 approvò, a scrutinio segreto, un progetto di Legge relativo alla pubblica istruzione contenente il riordinamento delle Università, delle Accademie, delle scuole speciali, dei Licei, dei Ginnasi, delle scuole elementari, delle Biblioteche, dei Musei e degli Istituti Scientifici compresi nel territorio della Repubblica. Con esso la pubblica istruzione fu suddivisa in elementare, media e superiore e furono soppresse le Università di Ferrara e Modena e mantenute solo quelle di Pavia e Bologna. Oltre a due accademie di Belle Arti (Milano e Bologna), furono istituite quattro scuole speciali: metallurgica (Dipartimento del Mella o dell'Agogna), di idrostatica (Basso Po), di scultura (Carrara), di veterinaria (Modena).

Ferrara, capoluogo del Dipartimento del Basso Po, istituì, come previsto dalla suddetta legge, un liceo dipartimentale che venne aperto ufficialmente il 16 aprile del 1804. La sede scelta fu Palazzo Paradiso, sede dell'antica Università e quindi già fornita di locali adatti all'istruzione. Le cattedre previste furono: Eloquenza italiana e latina, Analisi delle ide-

[52] Fiocchi (1983-84), pp. 233-237.

[53] Alcuni riferimenti sulla storia di Ferrara nell'800: Cittadella (1868); Roveri-Fiorentini (1892); Chiappini (1994); http://www.ottocentoferrarese.it.

e, Filosofia morale e Diritto di natura, Elementi di geometria ed algebra, Fisica generale e sperimentale, Principi di disegno architettonico e Figura, Agraria, Chimica e Botanica, Istituzioni civili ed Arte notarile, Anatomia ed Ostetricia, Istituzioni chirurgiche e Clinica chirurgica, Clinica medica.

Il professore scelto per ricoprire la cattedra di Elementi di geometria ed algebra fu Gaetano Genta, già professore di architettura civile e militare dall'anno accademico 1793-94 all'a.a. 1797-98 e di geometria pratica dall'a.a. 1798-99. Egli, nato a Ferrara il 3 febbraio 1750, dopo aver studiato latino dai maestri elementari terminò brillantemente i suoi studi presso le scuole dei Gesuiti, apprendendo specialmente le scienze filosofiche e matematiche. Genta, presidente della municipalità nel Governo della Repubblica Cisalpina e sotto il regime italico, con il ripristino dell'Università vi ritornò a insegnare lavorando a fianco del matematico Teodoro Bonati, con cui strinse una profonda amicizia e collaborò a molti progetti, tra i quali quello di bonifica delle paludi Pontine. Sostituì l'architetto ferrarese Antonio Foschini (1741-1813) nella progettazione del'Ospedale degli Infermi di Comacchio, e progettò l'arco di via della Ghiara (1786) e alcuni fabbricati fuori Ferrara, specialmente a Castel Maggiore (BO). Autore pure di canzoni, anacreontiche e sonetti, scrisse anche la prosa recitata in occasione del trasporto delle ceneri dell'Ariosto. Morì a Ferrara l'11 gennaio del 1837[54].

Per quanto riguarda, invece, la cattedra di Fisica generale e particolare, essa fu affidata al fisico Gian Battista Moratelli.

A ricoprire la cattedra di Figura fu chiamato il bolognese Giuseppe Santi (1786-1855)[55], già professore all'Università, e quella di Principi di disegno architettonico fu affidata ad Antonio Foschini, illustre allievo dell'Accademia del Disegno[56].

Tra le materie di studio fu inserita anche l'Agraria, insegnamento necessario in una zona prevalentemente agricola quale era il ferrarese, la cui cattedra venne affidata ad Antonio Campana (1751-1831)[57], reggente dell'Istituto dal 1804 fino all'apertura del convitto del liceo, avvenuta il 20 ottobre 1808[58].

---

[54] Informazioni relative a Gaetano Genta si possono trovare in: Ratta (1850); Roveri-Fiorentini (1892) p. 36.

[55] Notizie riguardanti Giuseppe Santi sono riportate da: Scutellari (1893) , pp. 21-61.

[56] Antonio Foschini: voce del *Dizionario Biografico degli Italiani* a cura di Fabrizio Fiocchi.

[57] Su Antonio Campana si veda: Deliries (1832); Nigrisoli (1861); Roveri-Fiorentini (1892), pp. 24-25.

[58] La sede scelta per il convitto fu l'ex convento delle Missioni in via Voltapaletto.

Trovandosi in un territorio compreso tra il Reno e il Po, Ferrara, come già inizialmente si è detto, era soggetta a continue inondazioni. Riconosciute le esigenze di questa città e del suo territorio, il Governo vi istituì allora una scuola di idrostatica, che aprì le sue porte a pochi mesi di distanza dal liceo dipartimentale.

Nella nuova scuola erano previste due cattedre: una di Idraulica e una di Idrometria. Il titolare della cattedra di idraulica fu il matematico Teodoro Bonati, ma vi insegnò anche il suo ex allievo Luigi Gozzi. Per iscriversi non era richiesto alcun titolo di studio, bisognava però conoscere la geometria e l'algebra cartesiana. Il corso, di durata annuale, iniziò nel novembre del 1804. Al termine del corso, la scuola non rilasciava nessuna specifica qualifica, però era considerato equivalente a uno degli anni di pratica necessari per l'esercizio delle professioni di ingegnere ed architetto. Per quanto riguarda la cattedra di Idrometria, da studi precedenti (Fiocca-Pepe, 1986, p.142; Fiocca, 1991, p.377) non risultano testimonianze che permettano di stabilire se questo insegnamento sia stato effettivamente impartito nella Scuola di Idrostatica.

Di rilievo risulta essere l'iniziativa del prof. Giuseppe Saroli[59], promotore della scuola di Disegno e Ornato avviata nel 1811, chiusa a seguito della Restaurazione e quindi riaperta nel 1819. Secondo il suo *Regolamento* manoscritto del 1820:

> 1. L'oggetto della Scuola di Ornato essendo quello d'istruire i giovani Artieri in tutto ciò che di bello si possa applicare all'uso ed all'ornamento pubblico, e privato: così saranno diretti gli Scolari gradatamente nelle Lezioni di Contorno, e di Acquarello nello studio del Rilievo e del colorire, e nelle spiegazioni della Prospettiva, essendo questa la base fondamentale di tutta l'arte del Disegno, e principalmente pei dipintori di decorazioni di stanze, e di Teatro.
> 2. Li giorni destinati per la Scuola corrisponderanno a quelli stabiliti nel Diario della Università di Ferrara, e l'orario per comodo degli Artisti viene fissato come segue: nei mesi di Novembre a tutto Marzo, dall'ave Maria sino al tocco dell'ore due di sera: nei mesi di Aprile a tutto Luglio, dal mezzo giorno sino alle ore due pomeridiane[60].

---

[59] Giuseppe Saroli (1779-1873), pittore di origine ticinese giunto a Ferrara attorno al 1811, Cfr. Scardino (1995). Su Saroli si veda anche Scutellari (1883), pp. 39-40. Scutellari promosse l'apertura di scuole di disegno, figura, scultura, pittura e nudo a Ferrara durante il suo incarico di assessore comunale alle Belle Arti, cfr. Scutellari (1869).

[60] *Regolamento per le Scuole di Veterinaria e di Ornato della Comunità di Ferrara (1820)*, Archivio Storico Comunale di Ferrara (d'ora in poi ASCFe), Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole di belle arti, busta 6: Regolamenti, fascicolo 1.

Tornato il Legato Pontificio (15 luglio 1815), la scuola del Bonati fu chiusa e nell'anno accademico 1815-16 riaprì l'Università. Con la Restaurazione Ferrara diventò, come Bologna, Ravenna e Forlì, una legazione dello Stato della Chiesa amministrata da un cardinale.

Nell'attesa di un riordino generale della pubblica istruzione, che si concretizzò con la Bolla *Quod Divina Sapientia* del 1824, il restaurato Governo pontificio, influenzato dalle idee innovatrici portate dal regime napoleonico, istituì nel 1817 due scuole speciali per ingegneri, una a Roma e l'altra a Ferrara. Quest'ultima venne effettivamente aperta nell'anno accademico 1817-18, però fu chiusa dopo soli due anni in seguito alle disposizioni del 25 dicembre 1819 relative al Corpo degli ingegneri Pontifici; quella di Roma, invece, continuò la sua attività, ma nel 1826 venne assorbita dall'Università, perdendo così il suo carattere di scuola di specializzazione[61].

Il primo settembre del 1821, in attesa di un piano generale e stabile di studi, fu emanato un *Regolamento da osservarsi nella Pontificia Università di Ferrara dai periti agrimensori*, il quale fissò «il corpo dei studj a quelli, che intend[evano] di apprendere, e di esercitare l'agrimensura». Il corso era gestito dalla Classe matematica che organizzava gli esami e decideva se gli studenti meritavano di passare alle scuole maggiori. Il corso di studi era triennale:

Anno Primo: Analisi delle Idee, Elementi d'algebra
Anno Secondo: Elementi di Algebra e Geometria, Fisica Chimica, Economia rurale e Botanica
Anno Terzo: Fisico Matematica, Introduzione al calcolo sublimo, Economica rurale e Botanica.

Chi attestava di aver frequentato per due anni «assiduamente i principj del Disegno Architettonico nella Università» otteneva la Licenza. Finito il triennio, la Classe matematica rilasciava il Certificato di abilitazione all'esame finale[62].

La bolla *Quod divina sapientia* (28 agosto 1824) di Pio VII ristrutturò, seguendo il modello napoleonico, tutto il sistema dell'istruzione nello Stato pontificio a partire dalle Università, che vennero divise in primarie (Bologna, Roma) e secondarie (Ferrara, Perugia, Camerino, Macerata e

[61] Fiocca-Pepe (1986), pp. 143-151.
[62] Recentemente l'Archivio storico dell'Università degli studi di Ferrara è stato riordinato. In base a questa nuova riorganizzazione il *Regolamento* suddetto ha la seguente collocazione: 22.3 Atti dell'Università (1816-1824), cartella G.

Fermo)[63]. L'Università di Ferrara, presieduta come tutte le Università secondarie da un vescovo, era composta da quattro Facoltà: Teologia, Giurisprudenza, Medicina e Matematica.

Attorno agli anni trenta dell'Ottocento fu concesso ai laureati della facoltà filosofico-matematica di Ferrara, di ottenere anche qui l'abilitazione all'esercizio delle professioni di ingegnere e di architetto. Nel 1838 la Sacra Congregazione degli Studi concesse l'autorizzazione a ripristinare nella Pontificia Università di Ferrara una Scuola speciale di idraulica, la cui riapertura fu ufficialmente annunciata il 20 settembre del 1840. Questa scuola, che inizialmente riscosse grande successo e non solo a livello locale, fu soppressa però nel 1859 a causa di un progressivo calo delle iscrizioni e all'instaurazione di un regime di funzionamento ridotto. I suoi corsi vennero successivamente inseriti nell'ambito della facoltà filosofico-matematica.

A Ferrara fu anche istituita nel 1835 una Camera Mercantile. Giuseppe Mayr, rappresentante della Camera e consigliere comunale, fu uno dei promotori dell'apertura di una Scuola di agricoltura comunale, che la commissione incaricata nel 1841 della stesura del *Regolamento*[64] decise di chiamare Scuola teorico-pratica territoriale di agraria[65].

Il Gonfaloniere ne proclamò l'apertura il 18 gennaio 1843 e l'istituto fu inaugurato il 6 febbraio presso il Palazzo Diamanti, allora sede dell'Ateneo civico. Francesco Luigi Botter (1818-1878) fu nominato direttore e professore di questa scuola [66]. Botter, laureatosi a Padova nel 1840, fu nominato supplente alla cattedra di matematica e assistente alla cattedra di agraria e storia naturale, tenuta dal professor Luigi Configliachi. Dopo alcuni anni trascorsi nella città patavina, si trasferì a Ferrara, dove nel 1841 vinse appunto il concorso per la cattedra d'agraria teorico-pratica[67]. La sua nomina, tuttavia, era stata osteggiata per ben tre volte dalla Sacra Congregazione agli Studi poiché lo riteneva un soggetto non idoneo «per la ragione che Egli non [era] uno statista»[68]. Alla fine il prof. Botter rimase a insegnare e a dirigere la scuola fino al 1857.

[63] Visconti (1950), pp. 169-187; Pepe (1987), pp. 612-614.

[64] Regolamento (1843), una copia in ASCFe, Repertorio secolo XIX: Agricoltura, busta 1, fascicolo: Nuova scuola di agraria.

[65] Mantovani - Santini (2009).

[66] Botter (1847; 1849).

[67] Francesco Luigi Botter: voce del *Dizionario Biografico degli Italiani* a cura di Carlo Poni.

[68] Schiarimenti (1850), p. 8., una copia in ASCFe, Repertorio secolo XIX: Agricoltura, busta 1, fascicolo: Nuova scuola di agraria. Il Podere sperimentale e l'Orto agrario, annessi all'Istituto, erano spesso oggetto di critiche: si sosteneva che, nonostante il Comune avesse affrontato parecchie spese per fornire il Podere e l'Orto di macchine e strumenti nuovi, non si erano ancora riscontrate soddisfacenti sperimentazioni che avessero giovato alle coltivazioni della città. Il Botter,

Secondo il *Regolamento* del 1841 la Scuola di Agraria, istituita e mantenuta a spese del Comune, aveva per oggetto «l'insegnamento dei principj teoretici della scienza agricola, e delle pratiche operazioni che la riguardano». Il Professore, che aveva il dovere d'insegnare in due corsi distinti la teoria e la pratica, era anche il Direttore del Campo-sperimentale e Direttore e Conservatore del Gabinetto annessi alla scuola. Il corso Teorico-pratico era di due anni.

Il teorico comprendeva comprend[eva] questi oggetti:
A.Struttura, e funzioni principali dei vegetabili diversi soggetti alla coltivazione.
B.Influenza sui medesimi dell'aria, dell'acqua, degl'imponderabili, e delle altre sostanze semplici, o composte, che contribuiscono al ben essere, o al deperimento dei vegetabili.
C.Qualità, ed esposizione del terreno ad essi conveniente.
D.Metodi per la coltivazione dei terreni: degl'istrumenti, che si richiedono a tal uopo, e degli avvicendamenti.
E.Istruzione intorno al piantare, ripiantare, seminare, moltiplicare, fare innesti ecc.
F.Esporre quanto può interessare intorno ai concimi, sia per aumentare la quantità approfittando in particolar modo di quelli, che somministra il regno vegetabile, sia per istabilire il vero metodo, e l'epoca di amministrarli.
G.I principii per governare, allevare, migliorare le razze: ingrassare, e conservare gli animali.
H.I precetti generali per costruire le fabbriche inservienti all'agricoltura con solidità, comodità, salubrità, ed economia.

Il corso Pratico comprend[eva] questi altri oggetti:
A.Maneggio degli strumenti rurali, e pratiche da seguirsi nella coltivazione delle diverse piante, arbusti, arboscelli, alberi da bosco, da lusso, da frutto.
B.Trattamento degli animali domestici, e mezzi per distruggere i nocivi.
C.Pratiche per la conservazione dei diversi prodotti della terra, per la fabbricazione del vino, del burro, e delle diverse specie di formaggi; per l'estrazione degli olii dalle piante, e frutta oleose, per quella del miele, per la macerazione delle piante filaticcie, come canape e lino, e per le altre operazioni, che si esigono, onde ridurle in tiglio.
D.I dettagli, che riguardano la costruzione, e distribuzione interna delle fabbriche di campagna, o di abitazione, o per la dimora delle specie diverse de-

---

nel 1849, pubblicò su *L'incoraggiamento* la *Cronachetta* in cui difendeva il suo Istituto. A questa seguì una confutazione anonima, che fu ulteriormente approfondita con la pubblicazione degli *Schiarimenti*, scritta dallo stesso autore, Giovanni Battista Borromei, che in questa occasione si firmò.

gli animali domestici, o per custodire biade, legumi, grani ecc.; o per servire a cantine, aje ecc[69].

Inoltre, erano anche previsti insegnamenti sussidiari di Fisica, Chimica, Botanica, Veterinaria e Architettura, tutti forniti da professori dell'Università di Ferrara, eccetto veterinaria che veniva impartita del professore della Scuola Comunale di Zooiatria.

In base al nuovo *Regolamento generale sulle scuole comunali di Ferrara*, pubblicato nel 1856, l'apertura, la chiusura ed i giorni di lezione dell'Istituto agrario erano determinati dal Calendario dell'Università. Il corso agronomico era di due anni per gli scolari che avevano seguito gli studi preparatori nell'Università, o che provavano, attraverso un esame, ad essere abbastanza istruiti negli elementi di Fisica, Chimica, Geometria e Matematica; per gli altri, purché edotti almeno nella Grammatica Italiana, era di tre anni (uno di studi preparatori e due di Agraria).

Gli studi preparatori comprendevano i rudimenti di Fisica, Chimica, Geometria e Matematica elementare applicata all'agricoltura, e gli elementi di Botanica Agraria. Le lezioni del corso biennale vertevano: nel primo anno sull'economia rurale, e l'agraria inorganica (trattati dei terreni, dei concimi, dei lavori, e degli strumenti), nel secondo sull'agraria organica vegetale (coltivazioni generali e speciali dei terreni aratori, dei prati, degli orti, degli alberi) e dell'agraria organica-animale (governo dei bestiami, dei bachi da seta, delle api, e delle industrie agrarie) [70].

2. La formazione tecnica a Ferrara dopo la Legge Casati

Il 21 giugno 1859 gli austriaci abbandonarono Ferrara e terminò anche il governo temporale dei papi. Il 30 novembre 1859 il Dittatore delle Province Modenesi e Parmensi e Governatore delle Romagne, Luigi Carlo Farini (1812-1866), unì i Governi separati di Modena, Parma e delle Romagne in un solo Governo, successivamente denominato *Governo delle Regie Provincie dell'Emilia* (reintitolazione avvenuta con Decreto del 24 dicembre 1859).

Sulla base del ramo tecnico organizzato dalla legge Casati, il 21 gennaio 1860 fu emanato il decreto sulla istituzione ed ordinamento del Corso primario tecnico in quelle Province:

---

[69] Regolamento (1843), pp.6-7.

[70] Regolamento (1856), pp. 13-19, una copia in ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole di belle arti, busta 6: Regolamenti , fascicolo 8.

Il Governatore delle R. Provincie dell'Emilia
Considerando esser debito d'ogni Governo civile il curare e favorire l'istruzione popolare con tutti quei mezzi dei quali può disporre; - Considerando che l'insegnamento tecnico è del massimo vantaggio all'istruzione popolare, come quello che comprende l'agronomo, l'industriale, il commerciale, il nautico; ed è quindi diretto alla coltura delle classi meno agiate della società, e a formare onesti ed intelligenti artigiani, abili commercianti, provvidi ed istrutti padri di famiglia; - Considerando che le regie Provincie dell'Emilia mancano al tutto di queste benefiche istituzioni;
Decreta:
Art. 1. Nel bilancio preventivo delle spese del corrente anno è stanziata una somma di L. 50,000 per sussidio ai Comuni i quali istituiscono Scuole tecniche.
Art.2. L'insegnamento tecnico è ordinato in due corsi: *inferiore* e *superiore*.
Art. 3. L'insegnamento del corso inferiore è determinato dal Programma che si unisce al presente Decreto. Un separato Programma determinerà quello del corso superiore.
Art. 4. Il Ministro dell'istruzione pubblica, fatto il debito calcolo delle condizioni e dei bisogni particolari dei paesi in cui siano per istituirsi tali Scuole, proporrà il quantitativo dell'annuo sussidio da assegnarsi al Comune che ne fece domanda.
Art.5. Per il corso superiore non sarà concesso sussidio se non in quelle città nelle quali sia stato per Decreto governativo riconosciuta la necessità di fondare un Istituto tecnico.
Art. 6. In qualsiasi i sussidii non potranno non essere maggiori della metà della spesa necessaria al mantenimento totale delle Scuole da aprirsi nel Comune, al quale vengono i sussidii stessi concessi.
Art.7. I ministri della pubblica Istruzione e delle Finanze ciascuno nella parte che lo riguarda, sono incaricati della esecuzione del presente Decreto, il quale sarà pubblicato nelle forme volute dalla legge.
Dato in Modena, il 21 gennaio 1860[71].

L'*Ordinamento* e i *Programmi* che ne seguirono prevedevano che la matematica fosse insegnata solo nei primi due anni[72]:

I. - *Aritmetica e Computisteria*
Anno 1.
Aritmetica inferiore.
Definizione e spiegazione dei segni +, -, x, :, =, > <;
Numerazione parlata – scritta.

[71] Codice (1870), pp. 615-616.
[72] Ordinamento (1860), pp. 19-24, una copia in ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 26: Scuola tecnica.

Nozioni sulle operazioni dell'Aritmetica.
Prime quattro operazioni, e prove rispettive
Sugli intieri
Sui decimali
Sulle frazioni ordinarie
Sui numeri complessi.
Riduzioni e trasformazioni delle frazioni.
Spiegazione del sistema decimale.
Anno 2.
Aritmetica superiore
Nomenclatura dei pesi e misure del sistema decimale metrico.
Applicazione delle operazioni aritmetiche alla riduzione delle antiche monete, pesi, e misure, alle monete, pesi e misure metriche e viceversa.
Principii, e teoremi sull'uso dell'equazione.
Definizione e proprietà generali delle proposizioni.
Regola del 3 semplice e composta.
Regola d'interesse e sconto semplice.
Regola di Società.
Anno 3.
Scrittura semplice
Nozioni preliminari di amministrazione e di contabilità o tenuta di registri.
Definizione del Patrimonio, e dell'Inventario di una sostanza.
Definizione delle Rendite e delle Spese.
Definizione del Rendiconto.
Definizione di un Giornale d'amministrazione.
Formazione di un Rendiconto sulla base di un Inventario di un Giornale mediante la classificazione delle Rendite e delle Spese.
Modello del Giornale di Scrittura semplice.
Modello del Libro maestro.
Formazione di un Rendiconto mediante il Giornale del Libro maestro.
Libro di Cassa. Libro di Magazzino.
Idea di un Preventivo, o Conto di previsione.

II. - *Geometria*
Anno 1.
PIANA – Dimensioni dei corpi – Superficie – Linee – Punto – Varie specie di linee – Rette parallele, orizzontali, verticali, perpendicolari, oblique – Cerchio – Angolo – Figure rettilinee – Poligoni – Triangoli – Quadrilateri – Parallelogrammi – Rettangoli – Quadrati – Figure concentriche, ed eccentriche – Poligoni inscritti e circoscritti. Poligoni simili – Poligoni equivalenti, ed eguali – Elisse – Ovale – Misura delle aree o Quadratura delle superficie piane.
SOLIDA – Generalità intorno ai Poliedri – Prismi – Parallelepipedi - Cubo – Piramidi – Cilindro retto – Cono retto – Sfera – Poliedri simili – Poliedri re-

golari – Misura delle superficie dei solidi – Misura della solidità, o Cubatura dei solidi.

III. - *Algebra Elementare*
Anno 2.
Definizione – Prime quattro operazioni sulle quantità algebriche o frazionarie, monomie o polinomie – Potenze dei monomii interi e frazionarii, ed estrazione delle loro radici – Potenze dei numeri interi e fratti – Potenze dei polinomi – Estrazione della radice seconda da un Polinomio, che sia quadrato perfetto – Estrazione della radice seconda esatta od approssimata de'numeri interi, frazionarii o decimali – Risoluzione delle equazioni determinate di 1.° grado ad una e più incognite – Risoluzione delle equazioni di 2.° grado ad una incognita – Teoria de'logaritmi, e loro applicazione alla risoluzione di alcune equazioni esponenziali – Spiegazione, ed uso delle tavole logaritmiche – Proposizioni e Progressioni per differenza e per quoziente costante – Dottrina degli Interessi.

IV. - *Calligrafia – Ortografia – Disegno*
Anno 1.
Insegnamento della Calligrafia secondo quel metodo che il Maestro crederà più opportuno acciò gli allievi acquistino l'abitudine di un carattere ben formato, chiaro e di rapida scrittura.
Dopo gli esercizii sopra esemplari contenenti motti ed accozzamenti di lettere senza senso, perché in sulle prime fa d'uopo di non distrarre la mente dell'allievo dall'attenzione che deve porre all'esecuzione materiale del suo compito; il Maestro avvertirà di fornire esemplari, i quali racchiudano sentenze morali, brevissimi racconti, tratti d'ingegno, acciò l'allievo non si stanchi di soverchio di un lavoro troppo meccanico.
Il maestro continua ad esercitare i giovani nella formazione di un bel carattere, e alterna le lezione di calligrafia con altre contenenti le regole principali del retto scrivere ossia dell'ortografia. In fine dell'Anno i suoi allievi dovranno essere capaci di stendere pulitamente un qualsivoglia scritto, in cui alla bellezza del carattere non facciano sconvenevole contrapposto gli errori ortografici.
Anno 3.
Seguitano esercizii di calligrafia per abituare l'allievo alle forma delle scritte commerciale e della corrispondenza per gli affari proprii e le cose di famiglia. Le lezioni di Calligrafia alternano con quelle di disegno lineare, di cui s'insegneranno i principii a norma delle traccie qui sotto indicate.

Disegno lineare a mano libera ed a vista
1.Della linea retta – Elementi geometrici che si hanno dalle linee rette e dalla loro combinazione – Divisione delle linee rette e delle figure rettilinee – Applicazione elementarissime della linea retta e delle figure rettilinee – 2. Delle

linee curve, e principalmente della linea circolare. – Elementi geometrici del circolo, o che traggono principalmente la loro forma dal circolo – Divisione di una circonferenza in tre, in quattro, in cinque, in otto, ecc. parti uguali. – Circoli concentrici ecc. – Disegno a mano libera di curve usuali – 3.Delle combinazioni di linee rette e di linee curve. Modanatura, applicazioni diverse – Il Professore procurerà inoltre di educare l'occhio e la mano degli allievi nel disegnare a vista solidi geometrici o di forma qualunque.
Disegno lineare grafico – Descrizione ed uso dei principali strumenti da disegno – Soluzione dei problemi elementari atti a promuovere lo studio e la rappresentazione geometrica degli Elementi geometrici non che a richiamare alla memoria l'esatta loro nomenclatura. Nella soluzione di questi problemi terranno il primo luogo i seguenti: Condurre linee perpendicolari a rette date – Condurre linee parallele a rette date – Condurre linee ad angolo - Dividere una retta in parti uguali – Tracciare triangoli, quadrilateri e poligoni diversi e dietro condizioni determinate – Costruire scale semplici e ticoniche – Copiare figure o ridurle da una scala ad un'altra – Dividere la circonferenza d'un circolo in un numero dato di parti eguali – Condurre tangenti ad un circolo – Costruire circoli tangenti ad un circolo dato - Condurre tangenti comuni a due circoli dati – Per tre punti dati non posti in linea retta condurre un arco di circolo, e dato un circolo od un suo arco trovare il centro – Inscrivere in un circolo un poligono regolare di qualsivoglia numero di lati, e simili.
Costruzione di curve più usuali siccome di ellissi, di ovali, e di spirali.

Il Governo Farini tentò anche di provvedere alla riorganizzazione dell'istruzione tecnica superiore. Infatti, nel decreto Farini del 14 febbraio 1860, in cui si dichiarava libera l'Università di Ferrara, si stabilì inoltre che fosse aperta una Scuola tecnica per il Corpo del Genio Civile, al fine di formare anche dal punto di vista pratico gli ingegneri civili. Il progetto di questa scuola tecnica, che doveva essere impiantata e mantenuta dallo Stato, in realtà non si concretizzò.

Secondo il Regolamento steso dall'ing. Pietro Conti, la scuola doveva avere una durata triennale e i corsi previsti doveva essere: geometria descrittiva e stereotomia, fisica e geodesia, agrotimesia, tecnologia, architettura, meccanica, idraulica, costruzioni meccaniche e idrauliche. Inoltre, annesso alla scuola si sarebbe dovuto organizzare uno stabilimento meccanico per le esercitazioni manuali degli studenti e per la costruzione di macchine per l'industria privata, consentendo così un introito autonomo che avrebbe permesso alla scuola di affrontare parte delle spese. Al termine del corso ci si laureava in Ingegnere della Scuola d'applicazione.

Il ministro Montanari[73], per sollecitare l'apertura delle scuole tecniche anche a Ferrara, inviò il 26 febbraio di quell'anno una nota al Sindaco, Rodolfo Varano, sottolineando che «quanto più l'insegnamento tecnico [fosse stato] favorito dallo zelo dei Municipii, tanto più facilmente [si sarebbero visti] sorgere nelle Classi meno agiate, giovani abili a mettersi nella carriera commerciale, a sostenere onorevolmente impieghi pubblici o privati, non che intelligenti artigiani capaci di sopperire ai proprii bisogni, e onesti e provvidi padri di famiglia» e che, se i comuni ne avessero fatto richiesta (secondo l'Articolo 4 del citato Decreto), il Ministro dell'Istruzione Pubblica avrebbe accordato un sussidio annuo a norma delle condizioni e dei bisogni dei paesi in cui sarebbero state istituite[74].

Il 1° marzo il popolo delle province dell'Emilia fu «solennemente convocato nei Comizi i giorni 11 e 12 marzo 1860 per dichiarare la sua volontà sulle due seguenti proposte: – *Annessione alla Monarchia costituzionale del Re Vittorio Emanuele II* – ovvero – *Regno separato.*» Chiamati a dare il voto tutti i cittadini che avevano compiuto i 21 anni e che godevano dei diritti civili, si ebbero 426.006 voti per l'annessione contro i 756 per il regno separato[75].

Ad annessione avvenuta anche la provincia di Ferrara doveva adeguarsi alle nuove proposte d'istruzione tecnica. Il Ministero di Agricoltura Industria e Commercio, istituito da poco, chiedeva innanzitutto di ricevere notizie sulle scuole tecniche già operanti nel Regno. Per rispondere il prima possibile a queste richieste, il Regio Intendente Generale della Provincia di Ferrara, Luigi Zini[76], si affrettò a scrivere, il 23 agosto 1860, al Sindaco Varano, per procurarsi «ogni opportuna notizia, e più specialmente le seguenti: 1. Se e quali scuole tecniche siansi in questa Provincia; 2. Dove siano esse stabilite; 3. A carico di chi sia il loro mantenimento; 4. Qual è la spesa annua, divisa nei diversi titoli; 5. Quali regolamenti vi si osservino; 6. Quale sia il loro Stato economico attuale», visto che, secondo le sue informazioni, in quel «Circondario» era presente una scuola tecnica[77].

---

[73] Antonio Montanari (1811-1898), di Meldola, provincia di Forlì-Cesena. Ministro della pubblica istruzione nel Governo di Luigi Carlo Farini in Emilia.

[74] Rodolfo Varano (Ferrara, 1810-1882), primo sindaco di Ferrara dal 1859 al 1867. Nominato Senatore del Regno il 18 marzo 1860.

[75] Racioppi - Brunelli (1909), pp. 32-33.

[76] Luigi Zini (Modena, 1821-1894), Intendente generale di Modena (30 dicembre 1859) e Intendente generale di Ferrara (aprile 1860).

[77] L'intendete generale Zini al Sindaco di Ferrara Ferrara, 23 agosto 1860, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 26: Scuola tecnica.

Il Sindaco si avvalse molto dei pareri del professore e medico Carlo Grillenzoni (Ferrara, 1814-1897). Nominato nel settembre 1840 direttore del reparto di anatomia dell'Università di Ferrara, Grillenzoni promosse in quella città la nascita della Fondazione degli asili infantili. Durante la rivoluzione del 1848 diventò una delle personalità più eminenti della città, scontrandosi spesso con il governo pontificio. Eletto Segretario nell'Assemblea delle Romagne, voluta da L.C. Farini, Grillenzoni diede il 6 settembre 1859 voto favorevole alla decadenza del potere temporale dei papi e all'annessione al Regno di Sardegna. Nell'ottobre 1859 fu eletto al Consiglio comunale di Ferrara (ove rimase fino al 1862) e, con decreto del governo delle Romagne, gli furono affidate all'Università di Ferrara le cattedre di clinica chirurgica, chirurgia operatoria e ostetricia, che tenne fin quasi alla morte. Fu anche protagonista nella dura battaglia per difendere la sopravvivenza dell'Ateneo ferrarese di cui fu Rettore dal 1873 al 1883[78].

Alle domande del Sindaco Varano sulla presenza o meno di scuole tecniche nella città ferrarese, Grillenzoni rispose il 12 settembre 1860:

> Non esistono nella città né scuole né istituti tecnici. Esiste una scuola d'agraria con orto e podere sperimentale. Posta nel Civico ateneo e ha due Professori, uno di agronomia - uno di nozioni delle scienze affini. Il modo dell'insegnamento rilevasi dal Regolamento delle Scuole Comunali. La spesa è sostenuta dal Comune che riceve un sussidio dalla Provincia. Nel nuovo riordinamento dell'Università libera di Ferrara fu proposto di riunire alla medesima anche la scuola di Agraria, ampliandone l'insegnamento, come si vedrà nello statuto che verrà compilato.

L'intendente Generale si affrettò ad inviare al Sindaco anche la Circolare Ministeriale n. 85 (Torino, 2 settembre 1860) «colla quale in pendenza della pubblicazione del Regolamento relativo agli stabilimenti d'istruzione tecnica, fa[ceva] precedere alcuni schiarimenti intorno all'ordinamento e spesa degli Istituti suddetti», in modo tale che se nella prima tornata il consiglio comunale avesse deciso per l'istituzione di qualche scuola tecnica, si sarebbe potuta avanzare il prima possibile la domanda all'ufficio dell'Intendenza generale della provincia di Ferrara per la debita trasmissione al Ministero[79].

Grillenzoni, chiamato ancora una volta dal Sindaco a esprimere le sue osservazioni, il 17 settembre annotò:

---

[78] Carlo Grillenzoni: voce del *Dizionario Biografico degli Italiani* a cura di Fabio Zavalloni.

[79] L'intendete generale Zini al Sindaco Ferrara, 12 settembre 1860, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 26: Scuola tecnica.

> Dovendo preferire un istituto tecnico, è da credere che il Cons.o Comunale darebbe il suo voto per un Istituto agronomico. Le spese che il Municipio sostiene per la Scuola Agraria sono pegno del suo interesse nel favorire un istituto di simile natura per quella parte che gli spetta. La questione tocca più specialmente la Provincia. Il Municipio si darà premura di preparare giovani atti a profittare dei corsi degli istituti tecnici, colla istituzione delle scuole tecniche la quale è dalla Legge posta a suo carico.

Dopo una nuova sollecitazione da parte dell'Intendenza Generale, il 26 settembre il sindaco riassunse i sei punti richiesti dallo Zini, dicendo che a Ferrara non c'erano né scuole tecniche né istituti tecnici e che era invece presente solo una scuola comunale di agraria istituita nel 1844 a spese del comune, al cui sostentamento partecipò successivamente anche la Provincia.

Il I° ottobre fu pubblicato nel *Supplemento* della *Gazzetta Ufficiale del Regno* n. 233 il Regio Decreto n. 4315, con il quale, ad opera del Ministro Terenzio Mamiani (1799-1885), si attuò il *Regolamento per le Scuole tecniche e per gli Istituti tecnici*: il primo grado di istruzione avveniva nelle scuole tecniche e il successivo negli istituti tecnici che furono organizzati nelle 4 sezioni Amministrativo-commerciale, Agronomica, Chimica e Fisico-matematica, di durata biennale tranne l'ultima che era l'unica a consentire l'accesso alla facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali.

Il primo annuncio pubblico dell'istituzione a Ferrara di una Scuola tecnica avvenne il 7 novembre, proclama con cui il sindaco preannunciava anche l'apertura di un Istituto tecnico *Agronomico-Matematico* e della Scuola del Genio Civile:

> Nella Scuola Tecnica, parallela al Ginnasio, riceveranno opportuno ammaestramento tutti quei giovanetti, che per desiderio de'loro genitori o per indole e le qualità del loro ingegno non amano percorrere gli studj classici, ma vogliono non ostante ricevere una conveniente coltura generale e speciale per dedicarsi con profitto alle industrie, ai commerci, alla condotta degli affari domestici e delle cose agrarie, all'ufficio di Computisti, o ad altre determinate carriere del pubblico servizio.
> Il corso di queste Scuole sarà triennale; e vi s'insegnerà la *Lingua Italiana* e la *Francese* – l'*Aritmetica* e la *Contabilità* – gli elementi di *Geometria* e di *Algebra* – il *Disegno* e la *Calligrafia* – la *Storia* e la *Geografia*, - e le *Nozioni elementari di Storia naturale*, e di *Scienze Fisico-Chimiche*, nonché le *Nozioni elementari intorno ai doveri e diritti dei Cittadini*.

> Nel modo stesso poi che il Ginnasio conduce al Liceo, così la Scuola Tecnica aprirà ai giovanetti la Via *all'Istituto tecnico Agronomico Matematico*, che per cura del Governo e della Provincia dovrà aprirsi parallelamente al Liceo. e come i giovani, i quali escono dal liceo, possono entrare nelle Università, così l'istituto tecnico potrà aprire la Via alla Facoltà Matematica. Una Commissione mista eletta dal Consiglio Municipale, e dal Consiglio provinciale, in concorso col Reggente della Università, sta occupandosi della compilazione del *Nuovo Statuto* per la *Università libera* di Ferrara, e per le sue premure Noi confidiamo che la *Facoltà Matematica* sarà per esservi riordinata in modo da non lasciar sentire in nessuno il bisogno di cercare altrove per questo ramo di studj più intero e conveniente ammaestramento: di modo che i giovani laureati in Matematica nella nostra Università non avranno a temere il confronto di quelli che qui potessero giungere dalle altre Città d'Italia per profittare della Scuola del Genio Civile, che qui pure verrà aperta, e mantenuta a spese dello Stato per tutti quegli studj di applicazione, nei quali deve rendersi pratico l'Ingegnere Civile[80].

Alla Scuola tecnica potevano iscriversi tutti quei giovani che, non interessati agli studi classici, volevano ottenere una formazione professionale e la cultura generale necessaria per determinate carriere della pubblica amministrazione, dell'industria, del commercio e dell'agricoltura. Di durata triennale, la Scuola tecnica apriva l'accesso all'Istituto tecnico *Agronomico-Matematico*, il quale, a sua volta, poteva aprire la via alla facoltà matematica.

Il 10 gennaio 1861 il Sindaco poteva finalmente comunicare all'Intendenza generale che la Giunta comunale aveva stabilito i locali, stanziato i fondi e proposto gli insegnanti e che la città era pronta ad attivare la scuola tecnica. L'approvazione del Ministero della pubblica Istruzione arrivò dopo qualche settimana, ma non essendo ancora stata promulgata nell'Emilia la legge 13 novembre 1859, non poteva l'ordinamento di dette scuole «che ritenersi in via interinale»[81].

Finalmente, il 25 maggio 1861, il Sindaco Varano era ben lieto di comunicare alla città che, dopo diversi ostacoli e incertezze, si sarebbe aperta nei primi giorni di giugno, nei locali del Ginnasio, la Scuola Tecnica. Il 12 giugno cominciarono ufficialmente le lezioni[82].

[80] Proclama del Sindaco Varano: Ferrara, 7 novembre 1860, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 18: Scuole ginnasiali tecniche.

[81] L'intendente Generale al Sindaco di Ferrara, 3 febbraio 1861, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 26: Scuola tecnica.

[82] Proclama della Giunta Municipale: Ferrara, 25 maggio 1861; Proclama del R. Provveditore agli Studj: 27 maggio 1861, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 18: Scuole ginnasiali tecniche; *Gazzetta Ferrarese*, 1 giugno 1861.

L'istituzione di un Istituto Tecnico a Ferrara, rispetto alla Scuola Tecnica, richiese maggior tempo. Il Consiglio Provinciale, nella sessione ordinaria del 25 settembre 1860, aveva riconosciuto l'utilità per questa provincia di un Istituto Tecnico Agronomico, Commerciale, Fisico-matematico, ai sensi della Circolare Ministeriale n. 85, nella quale era stato sottolineato che il Ministero non intendeva «di prescriverne la stretta osservanza in modo assoluto e tale da non ammettere quelle modificazioni, che senza alterare l'economia del piano generale, facesse ragione ai bisogni locali»[83]. Il Consiglio Provinciale, privilegiando maggiormente la prima sezione, per il carattere agronomico della provincia, e l'ultima, che avrebbe avviato i giovani alla facoltà Matematica ed all'Istituto Idraulico superiore, deliberò che per la sua attuazione fossero svolte le relative pratiche incaricando a tal fine, insieme alla Deputazione Provinciale, la Commissione, la quale era stata nominata per redigere lo Statuto dell'Università, al fine di vedere se le riforme che si andavano a proporre per questo potessero servire anche all'Istituto. Ma, con il passaggio degli Istituti Tecnici alle dipendenze del Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio[84], le disposizioni date dal Ministero della Pubblica Istruzione furono sospese e così anche l'attuazione dell'Istituto ferrarese. Si ipotizzò allora di migliorare e rendere più completa la Scuola di Agraria, la quale sarebbe diventata una delle parti principali dell'Istituto Tecnico stesso[85].

Il Consiglio, nella sessione straordinaria del 1862, incaricò la sua Deputazione di prendere, quanto prima, accordi col Comune al fine di aprire, per il venturo anno scolastico 1862-63 una Scuola di agronomia teorico-pratica. Questo progetto alla fine non si concretizzò, ma, nell'anno scolastico 1863-64, si riuscì ad attivare l'Istituto Tecnico Provinciale per i primi cinque licenziati delle tecniche inferiori. Però, la difficoltà nel disporre locali adatti e la selezione del personale insegnante richiese ancora alcuni mesi. Si riuscì ad aprire concretamente l'istituto, nello stesso edificio del Regio Liceo, a partire dal 4 gennaio 1864, con la sola sezione fisico-matematica. Direttore provvisorio fu nominato il prof. Gaspare

[83] Circolare Ministeriale n. 85 del 2 settembre 1860, ASCFe, Repertorio XIX secolo: Istruzione Pubblica, Scuole Secondarie, busta 26: Scuola tecnica.

[84] Regio Decreto 28/11/1861 n. 347. Nel 1877, con la soppressione del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio, gli istituti tecnici passarono di nuovo sotto la giurisdizione del Ministero della Pubblica Istruzione. Cfr. Schot (2010), pp. 47-80.

[85] Atti (1860-1865). Documenti relativi all'istituzione dell'Istituto Tecnico Provinciale di Ferrara si trovano in: Archivio di Stato di Ferrara, fondo: Amministrazione Provinciale. Archivio di Segreteria (1802-1950), busta 145; e fondo: Istituto Tecnico Statale Commerciale 'V. Monti', Inventario 1863-1960, buste 131-142-184-190-617.

Salvolini, allora preside del R. Liceo, e furono officiati alcuni professori di questo stesso Liceo. Quattro furono i professori destinati all'insegnamento: uno per la fisica, un secondo per la matematica, un terzo per le lettere italiane, storia e geografia, e un quarto per il disegno. Docente di matematica fu il mantovano Vespasiano Fattorini (1836-1886), laureato in ingegneria civile e architettura all'Università di Pavia nel 1860. Oltre a Ferrara Fattorini insegnò a Vigevano, Venezia e Mantova, diventando preside dell'istituto tecnico di Cremona dal 1883[86].

Otto alunni si presentarono agli esami di ammissione, cinque legalmente, perché licenziati nelle Tecniche inferiori, tre illegalmente perché, o in tutto, o in parte non aveva superato le prove degli esami anteriori, e quindi non muniti della necessaria licenza tecnica per essere ammessi al nuovo Istituto. Nonostante il Salvolini avesse cercato, inizialmente, di accogliere tutti indistintamente, il corpo docente decise di ammetterli come uditori in aspettativa. Nell'anno scolastico successivo le iscrizioni aumentarono a una quarantina, di cui trenta nella sezione di Costruzioni e Meccanica e sei in quella di Agronomia e Agrimensura. Con il nuovo riordino del 1864 (R.D. 18/08/1864 n. 1354) il Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio, dando all'istruzione tecnica-scientifica un'impronta più marcatamente professionale, le sezioni dell'istituto tecnico diventarono 34 e furono denominate «scuole speciali o riunite» e la sezione fisico-matematica fu assorbita dalla nuova sezione quadriennale di costruzioni e meccanica[87].

Mentre si attivavano la scuola tecnica e l'istituto tecnico, proseguiva anche l'iter per l'organizzazione della Scuola del Genio Civile. Dopo la scelta della sede della Scuola presso la Palazzina di Marfisa d'Este, si susseguirono però una serie di problematiche che fecero sfumare questo importante progetto per la città di Ferrara. Una commissione presieduta da Quintino Sella ne modificò il regolamento alleggerendo a due anni il corso per poter renderla attuabile. Tuttavia, l'allora Segretario generale del Ministero della pubblica istruzione (1° luglio 1861-17 gennaio 1863), Francesco Brioschi, sostenendo una politica non localistica, riteneva che,

---

[86] Janovitz (2008), p. 101.

[87] L'anno successivo le sezioni furono ridotte a nove (R.D. 15/6/1865 n. 2372). Queste ultime due riforme, che miravano a trasformare il complesso dell'istruzione tecnica in una fitta rete di scuole speciali atte a soddisfare le esigenze dei vari settori industriali, fallirono e nel 1871 il ministro Stefano Castagnola ordinò al Consiglio superiore per l'istruzione tecnica di studiare un nuovo piano di riforma. Fra le persone distinte nelle scienze che a vario titolo parteciparono al dibattito e contribuirono alla stesura del nuovo ordinamento figuravano numerosi matematici tra cui Enrico Betti, Francesco Brioschi [Cfr. Lacaita (2003), pp. 165-173] e Luigi Cremona. Per un'analisi dettagliata e approfondita dei programmi di matematica previsti per gli istituti tecnici a partire dalla legge Casati cfr. Schot (2010).

prima di aprire scuole speciali, fosse necessario organizzare un piano generale che le coordinasse e che ne stabilisse il numero e le sedi. Creata una nuova Commissione che si occupò di compilare questo piano, nel 1863 la Scuola Tecnica del Genio Civile venne trasformata in Scuola di Applicazione per Ingegneri Idraulici. Sella e Brioschi fecero parte della nuova Commissione per la stesura del nuovo Regolamento. Ma, nonostante questi sforzi e successivi tentativi, questo progettò non riuscì a giungere a compimento. Francesco Brioschi, che fu anche rettore dell'Università di Pavia (1860-61), dal 1863 fino alla morte diresse l'Istituto Tecnico Superiore di Milano[88]. Così, il 29 settembre 1863, iniziò il suo discorso inaugurale per l'apertura della nuova istituzione formativa di grado superiore prevista per Milano dalla legge Casati:

> Signori,
> Le istituzioni scolastiche non hanno probabilità di soddisfare alla loro alta missione se la creazione e l'ordinamento di esse non corrisponde ai nuovi bisogni della scienza ed alle nuove condizioni sociali. La storia del pubblico insegnamento attesta con infiniti esempi l'esistenza di questo fatto; esso si verificò nell'indirizzo esclusivamente teologico dell'insegnamento nel medio evo, in quello specialmente classico che ad esso sostituivasi nel quindicesimo secolo, e negli indirizzi scientifico e tecnico che l'età moderna aggiunse a quest'ultimo. Ma la storia civile delle nazioni lo rende ancora più evidente registrando accano alle più grandi rivoluzioni politiche o la creazione di nuovi istituti, o profonde modificazioni nell'ordinamento degli esistenti. Da ciò la fama che gli istituti fondati in quelle epoche acquistarono quasi contemporaneamente alla loro creazione, da ciò l'agitarsi della pubblica opinione, le molte discussioni e pubblicazioni ogni qualvolta si pose mano ad innovazioni nel loro organismo, da ciò infine il carattere di istituzioni nazionali che si assunsero per l'armonia fra le aspirazioni nazionali ed il loro concetto, e quindi l'affetto e le cure delle quali seppero circondarli le nazioni che li possedevano …[89]

Negli anni successivi furono attivate nella provincia di Ferrara altre due scuole tecniche, una a Comacchio nell'anno scolastico 1866-67 e l'altra a Cento nel successivo anno 1867-68. Grazie alla dettagliata indagine *Statistica della Provincia di Ferrara*, raccolta in un volume dal Prefetto Giacinto Scelsi nel 1875, è possibile comparare tra loro il numero degli iscritti alle scuole del ramo classico e del ramo tecnico per notare come le iscrizioni nel ginnasio fossero diminuite con la nascita della

---

88 Silvestri (2011), pp. 135-137; Selvafolta (2011), pp. 185-191.
89 Lacaita (2003), pp.45-46.

scuola tecnica e come si fosse spostato ancor più l'interessamento anche agli studi tecnici con la nascita dell'istituto tecnico provinciale[90]:

anni	Ginnasio	Scuola Tecnica	Liceo	Istituto Tecnico
1860-61	144	-	36	-
1861-62	91	56	25	-
1862-63	70	87	43	-
1863-64	63	82	35	4
1864-65	76	69	36	41
1865-66	67	59	32	41
1866-67	76	65	34	40

Bibliografia

Atti (1860-1865), *Atti del Consiglio Provinciale di Ferrara*, Ferrara: Bresciani.

Botter, F.L. (1847), *Dello Istituto Agrario di Ferrara, con alcuni cenni sulla storia e progresso dell'agricoltura*, Ferrara: Taddei.

Botter, F.L. (1849), *Rendiconto generale dell'Istituto Agrario di Ferrara, dalla sua fondazione nel 1841 a tutto il 1848*, Ferrara: Taddei.

Cenni (1829), *Cenni sopra alcuni miglioramenti de'quali sarebbe suscettibile la pubblica istruzione nella città e Provincia di Ferrara*, Firenze: Tipografia all'insegna di Dante; senza autore, ma probabilmente Giacomo Maffei.

Cittadella, L.N. (1868), *Notizie amministrative, storiche, artistiche relative a Ferrara*, vol. 1, Ferrara: Taddei.

Chiappini, L. (1994), *Ferrara nell'Ottocento*, Roma: Editalia.

Deliries, F.M. (1832), *Elogio del Professor Antonio Campana*, Ferrara, ed. sconosciuto.

Farneti, F., Riccardi Scassellati, V.(1997), *L'accademia di belle arti di Bologna*, Fiesole: Nardini.

Fiocca, A. (1991), La formazione dei giudici e dei notai d'argine a Ferrara: dai primi provvedimenti istituzionali alla scuola di idraulica di Teodoro Bonati, in P. Castelli (a cura di), *La rinascita del sapere: libri e maestri dello Studio ferrarese*, Venezia: Marsilio Editori, pp. 367-384.

Fiocca A. (2005), Vicende idrauliche del basso Po nella corrispondenza di Gian Andrea Borotti e Romualdo Bertaglia, in F. Cazzola e R. Varese (a cura di), *Cultura nell'età delle Legazioni*, Firenze: Le lettere, pp. 173-199.

[90] Scelsi (1875), pp. 154-158.

Fiocca, A., Pepe, L. (1986), L'Università e le scuole per gli Ingegneri a Ferrara, *Annali dell'Università di Ferrara*, Nuova serie, VII, Scienze Matematiche, 32, Bologna, (Monografia).

Fiocchi, F. (1983-84), L'Accademia del Disegno di Ferrara, *Musei Ferraresi*, 13-14, pp. 231-248.

Franceschini, G. (1986), Carlo Grillenzoni (1814-1897) medico e patriota, in *La tradizione medica ferrarese dall'Ottocento ad oggi*, Ferrara: Tip. Acc. Sci., pp. 65-73.

Gazzetta (1861-1902), *Gazzetta Ferrarese Foglio officiale per gli Atti del Governo e per le inserzioni degli Atti Giudiziali*, Ferrara: Bresciani.

Janovitz, A. (2008), Studi liceali di matematici ebrei nella Mantova del tardo Ottocento, *Ratio matematica*, 18, pp. 91-106.

Lacaita, C.G. (a cura di) (2003), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897).III: Scritti e discorsi*, Milano: F. Angeli.

Mantovani, G., Santini, L. (2009), Una scuola di agraria con podere sperimentale a Ferrara a metà dell'800, *La Pianura*, 2, pp. 67-70.

Nigrisoli, G. (1861), *Elogio di Antonio Campana da un'analisi delle sue opere*, Ferrara: Taddei.

Codice (1870), *Nuovo Codice della istruzione pubblica*, Saluzzo: Fratelli Lobetti-Bodoni.

Ordinamento (1860), *Ordinamento delle Scuole tecniche del Corso inferiore, in conformità del Decreto governativo 21 gennaio 1860*, Modena: Tipografia di Carlo Vincenzi.

Patergnani E., Pepe L. (2011-1), *Insegnamenti matematici e istruzione tecnica nel processo di unificazione nazionale. Il Lombardo Veneto e il Regno di Sardegna*, in C.G. Lacaita e P.P. Poggio (a cura di), *Scienza tecnica e industria nei 150 anni di Unità d'Italia*, Milano: Jaca Book, pp. 87-107.

Patergnani, E., Pepe, L. (2011-2), Insegnamenti matematici e istruzione tecnica dalla Legislazione del Graducato di Toscana alla legge Casati, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 31 (2), pp. 167-176.

Patergnani, E., Pepe, L. (2012), Insegnamenti matematici e istruzione tecnica. Le Legazioni pontificie e le Marche dagli antichi Stati alla Legge Casati, in L. Bellatalla, G. Genovesi e E. Marescotti (a cura di), *La scuola nell'Italia unita. 150 anni di storia*, Padova: Cleup.

Pepe, L. (1987), La cultura scientifica e l'Università, *Storia illustrata di Ferrara*, 39, Milano: Aiep.

Racioppi, F., Brunelli, I. (1909), *Commento allo Statuto del Regno, con prefazione di Luigi Luzzatti*, Torino: Unione Tipografico-Editrice Torinese, vol. 1.

Ratta, G. (1850), *Alcuni cenni biografici su quattro illustri italiani*, Ferrara: Bresciani.

Regolamento (1843), *Regolamento per la Scuola Teorico-pratica Territoriale di Agraria a Ferrara*, Ferrara: Bresciani.

Regolamento (1856), *Regolamento generale sulle scuole comunali di Ferrara*, Ferrara: Bresciani.

Roveri, M., Fiorentini, L. (1892), *Annali Ferraresi 1830-1880*, Ferrara: Nella Premiata Tipografia Sociale.

Scardino, L. (1995), *Descrizione, Un ticinese a Ferrara: sulle tracce di Giuseppe Saroli, artista nato a Cureglia nel 1779 e oggi dimenticato, ma che innestò il neoclassicismo in area emiliana*, Lugano: Corriere del Ticino, p. 39.

Scelsi, G. (1875), *Statistica della Provincia di Ferrara*, Ferrara: Bresciani.

Schiarimenti (1850), *Schiarimenti ed aggiunte alla confutazione anonima della cronachetta sul podere sperimentale dell'Istituto Agrario di Ferrara con Appendice relativa alla risposta stampata alla detta confutazione*, Ferrara: Bresciani.

Schot, R. (2010), *La matematica negli istituti tecnici italiani. Analisi storica dei programmi d'insegnamento (1859-1891)*, Cagliari: C.R.S.E.M.

Scutellari, G. (1869), *Sulla Sistemazione delle Scuole di Belle Arti nell'Ateneo di Ferrara*, Ferrara: Bresciani.

Scutellari, G. (1893), Cenni Biografici intorno ai pittori e scultori ferraresi,n *Atti e Memorie della Deputazione Provinciale Ferrarese di Storia Patria*, Ferrara: Nella Premiata Tipografia Sociale, vol. 5, pp. 21-61.

Selvafolta, O. (2011), Una scuola per l'Italia Unita: la formazione di ingegneri e architetti al Politecnico di Milano, in C.G. Lacaita e P.P. Poggio (a cura di), *Scienza tecnica e industria nei 150 anni di Unità d'Italia*, Milano: Jaca Book, pp. 185-200.

Silvestri, A. (2011), I rapporti tra scienza, tecnica e industria nella storia del Politecnico di Milano, in C.G. Lacaita e P.P. Poggio (a cura di), *Scienza tecnica e industria nei 150 anni di Unità d'Italia*, Milano: Jaca Book, pp. 135-148.

Visconti, A. (1950), *La storia dell'Università di Ferrara (1391-1950)*, Bologna: Zanichelli.

La matematica nella Scuola secondaria di II grado, dalle sperimentazioni degli anni Ottanta al riordino del 2010

Luigi Tomasi[(*)]

1. Il computer e l'insegnamento della matematica negli anni Ottanta: il Piano Nazionale per l'Informatica

A partire dagli anni Settanta il computer e l'informatica cominciano a influenzare la vita produttiva e sociale dei Paesi sviluppati economicamente e anche la scuola secondaria superiore in Italia inizia a tenerne conto. L'informatica diventa oggetto di studio, come materia autonoma e caratterizzante, in alcuni indirizzi degli Istituti tecnici: vengono attivati l'indirizzo di Istituto Tecnico Commerciale per programmatori (1970) e quello di Istituto Tecnico Industriale per perito informatico (1972). In questi indirizzi anche l'insegnamento della matematica viene rafforzato con elementi di 'matematica moderna', di statistica, probabilità e ricerca operativa.

Nel 1985, in analogia ad altri Paesi europei, il Ministro della Pubblica Istruzione Franca Falcucci vara il *Piano Nazionale per l'Informatica* (PNI). Con il PNI si voleva introdurre degli elementi di informatica in tutte le scuole secondarie, aggiornando tutti i docenti di matematica e di fisica della scuola secondaria di II grado nel giro di pochi anni. Fu nominato un Comitato scientifico che decise di collocare l'insegnamento dell'informatica nell'ambito della matematica e non come disciplina autonoma, tranne negli indirizzi degli istituti tecnici informatici. Secondo Giovanni Prodi, che rappresentava i matematici nel Comitato, «Vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: sono rami che escono da uno stesso tronco».

(*) Liceo Scientifico Statale 'Galileo Galilei', Adria (RO) (luigi.tomasi@unife.it).

Quindi i matematici, con un certo ‘opportunismo’, utilizzarono il PNI al fine di rinnovare i programmi di insegnamento della matematica per la scuola secondaria superiore, che erano fermi ormai da decenni (i licei addirittura dal 1945), tranne appunto alcuni indirizzi degli istituti tecnici per l’informatica. Il progetto venne attuato in modo molto rapido: durante l’anno scolastico 1985/86 fu preparato il primo gruppo di docenti formatori e fu avviato l’aggiornamento ‘a cascata’ dei docenti di Matematica e di Matematica e Fisica. Alla fine del 1985 vennero scritti i programmi di matematica e di fisica del biennio, che dall’anno scolastico 1987-88 – definiti i nuovi orari e le cattedre - furono adottati sperimentalmente da moltissime scuole di ogni ordine (Licei, Tecnici, Professionali, …). Nel 1989 furono scritti i nuovi programmi PNI del triennio, che entrarono in attuazione in continuità con quelli del biennio a partire dall’anno scolastico 1989-90.

Con il pretesto dell’informatica, furono quindi elaborati dei nuovi programmi di matematica per tutte le scuole secondarie di II grado. Il programma di matematica per il biennio iniziale fu scritto in modo unitario, ma suddiviso in due versioni, una più estesa (programma ‘forte’) e l’altra più ristretta (programma ‘debole’), anche se con identici obiettivi e un nucleo comune di argomenti. Il programmi del PNI – scritti in continuità con gli innovativi programmi di matematica del 1979 per la Scuola Media – contengono una premessa con le finalità e gli obiettivi dell’insegnamento della matematica. I contenuti sono suddivisi in cinque grandi temi (1. Geometria del piano e dello spazio; 2. Insiemi numerici e calcolo; 3. Relazioni e funzioni; 4. Probabilità e statistica; 5. Elementi di logica e di informatica), senza proporre una scansione annuale. Ciascun tema contiene un commento e dei suggerimenti metodologici.

Si trattava quindi di programmi molto innovativi, in cui l’orario dedicato alla matematica diventava consistente (5 ore settimanali), a fronte però di un notevole aumento degli argomenti da svolgere.

Le principali novità riguardavano l’introduzione della logica e informatica, di elementi di statistica e di probabilità. Inoltre, in tali programmi, si suggeriva una metodologia di insegnamento ‘per problemi’, con l’invito a consolidare e sistematizzare i concetti in modo graduale. Inizialmente, per quanto riguarda l’informatica, l’attenzione era stata posta all’apprendimento di un linguaggio di programmazione, ma successivamente è prevalsa un’interpretazione più equilibrata, in cui si è posto maggiormente l’attenzione all’insegnamento della matematica, utilizzando gli strumenti informatici come uno strumento per il suo insegnamento e apprendimento. L'introduzione delle tecnologie ha comunque portato a un notevole rinnovamento dell'insegnamento della matematica.

I programmi del PNI diventarono una sperimentazione molto diffusa in tutte le scuole secondarie superiori, con un forte seguito tra i docenti. Una delle critiche prevalenti si riferiva alla vastità dei contenuti, forse perché i docenti hanno la tendenza a conservare, nel loro insegnamento, il 'vecchio' e il 'nuovo'. Seguendo questo atteggiamento degli insegnanti, i libri di testo diventarono, in quegli anni, molto voluminosi, con l'aggiunta ai tradizionali capitoli di quelli nuovi, ma senza arrivare, nella maggior parte dei libri di testo, a un'organica integrazione. Si aggiunga che, almeno nel triennio, la sperimentazione non ha interessato tutte le scuole, ma soltanto una parte. Non tutti gli insegnanti hanno saputo rinnovare la loro metodologia; inoltre non c'è stato un monitoraggio e un bilancio rigoroso della sperimentazione; in molte situazioni, nonostante il PNI, gli insegnanti si sono limitati ad aggiungere nuovi argomenti a quelli tradizionali. Nonostante questi limiti, la sperimentazione del PNI ha avuto una grande diffusione e, tramite gli strumenti informatici, c'è stato un certo rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Grazie al PNI, sono inoltre entrati a far parte del curricolo 'nuovi temi' come la logica, le trasformazioni geometriche, l'analisi numerica, la statistica e la probabilità, che per la scuola superiore italiana erano delle novità.

2. La matematica nei programmi del Progetto Brocca (1987)

Due anni dopo l'avvio del PNI, che aveva interessato soltanto la Matematica e la Fisica, nel 1987 la mancata approvazione della riforma della Scuola secondaria superiore indusse il Ministro della P.I. a costituire una Commissione, presieduta da Beniamino Brocca (Sottosegretario alla P.I.), con il compito di redigere un progetto di riordino della Scuola secondaria superiore. Vennero definite le finalità e l'impianto della scuola secondaria di II grado e i piani di studio degli indirizzi che avrebbero dovuto sostituire i Licei e gli Istituti Tecnici. Una commissione, suddivisa in gruppi disciplinari, elaborò i nuovi programmi: nel 1988 quelli del biennio e nel 1990 quelli del triennio.

Per quanto riguarda il programma di matematica del biennio 'Brocca', non ci sono sostanziali differenze con quello del biennio PNI. Cambiava però notevolmente il contesto, perché questo progetto cambiava, oltre ai programmi, anche gli orari di tutte le materie e non soltanto quelli di matematica e fisica come previsto dal PNI.

I programmi della Commissione Brocca erano nati come proposta di riforma della scuola secondaria superiore, che però non fu approvata dal Parlamento. Furono quindi introdotti nella scuola liceale come programmi sperimentali a partire dall'anno scolastico 1991-92. Non ebbero però la stessa diffusione di quelli del PNI, anche perché prevedevano orari settimanali di lezione molto gravosi.

I programmi di matematica PNI e Brocca, pur con degli aggiustamenti, sono stati estesi a tutti i bienni degli istituti tecnici e dei professionali e talvolta anche nei trienni dei vari progetti 'assistiti' dal Ministero della P.I., mentre nei licei sono rimasti dei progetti sperimentali e quindi facoltativi, seguiti da una minoranza degli studenti.

3. La scuola secondaria di II grado dal 1996 al 2000 e la proposta UMI di un nuovo curricolo di matematica

Nella seconda metà degli anni Novanta, vengono approvate alcune leggi che cambiano di molto la struttura della scuola. In particolare, nel 1997, la Legge n. 59 (detta Legge Bassanini) riconosce l'autonomia amministrativa, organizzativa e didattica a tutte le scuole.

Negli anni - dal maggio 1996 - in cui è stato Ministro dell'Istruzione Luigi Berlinguer, sono state approvate tre importanti leggi: nel 1997 la legge di riforma dell'esame di maturità, entrata in vigore nella sessione di giugno 1999; nel 1999 la legge che eleva l'obbligo scolastico e nel febbraio 2000 la legge n. 30 sul *Riordino dei cicli*. Quest'ultima - abrogata nella successiva legislatura - prevedeva l'accorciamento di un anno dell'intero percorso scolastico e una struttura su due soli cicli: il ciclo primario, detto anche 'scuola di base', con durata di sette anni, che doveva assorbire la Scuola Elementare e la Scuola Media, ed il secondo ciclo della durata di cinque anni, di cui i primi due obbligatori, organizzata su diverse aree, a loro volta articolate in indirizzi.

Nello stesso periodo, dall'anno accademico 1999-2000, viene istituita la SSIS - Scuola di specializzazione per l'insegnamento secondario, per la formazione universitaria degli insegnanti di scuola secondaria.

Nel giugno del 2000, il Ministro Tullio De Mauro, subentrato a L. Berlinguer, nominò una commissione con il compito di elaborare i curricoli della nuova scuola, ma questi non vennero approvati a causa del termine anticipato della legislatura (2001). Nella stesura del curricolo di matematica per la scuola di base, il gruppo di lavoro assunse come punto di partenza un ampio e documentato lavoro (*Matematica 2001*) prodotto da una commissione nominata dall'Unione Matematica Italiana.

L'UMI nel 2000 aveva insediato una commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società. La commissione era costituita da docenti universitari esperti di didattica e della scuola. Nella proposta di curricolo di matematica vennero definite le conoscenze fondamentali da acquisire, indipendentemente, per quanto riguarda il ciclo secondario, dalla varietà dei suoi indirizzi. Nei lavori della commissione si sostiene l'idea di una «matematica per il cittadino», cioè di un corpus di conoscenze e abilità matematiche fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici. La commissione ha elaborato un curricolo fortemente unitario per la scuola primaria, per la scuola secondaria di I grado e per quella di II grado.

È opportuno ricordare che, dal punto di vista legislativo, le proposte della Commissione UMI si collocano tra la fine della XIII Legislatura e quella successiva, iniziata nel 2001, nella quale, come primo atto del Ministro L. Moratti, venne abrogata la legge sul riordino dei cicli (Legge n. 30/2000) e sostituita con la Legge n. 53/2003 (cosiddetta Riforma Moratti), che delinea la nuova struttura della scuola. Questa legge prevedeva un primo ciclo, formato dalla scuola primaria di durata quinquennale e dalla scuola secondaria di 1° grado di durata triennale, e un secondo ciclo (scuola secondaria di II grado) suddiviso in due sistemi: il sistema dei licei, con durata quinquennale, e il sistema dell'istruzione e della formazione professionale affidata alle Regioni. La scuola secondaria di secondo grado era quindi pensata suddivisa in un I biennio, II biennio e dalla classe quinta.

Nelle intenzioni della Commissione UMI, il curricolo di matematica proposto era riferito a tutta la scuola secondaria superiore, delineando conoscenze e abilità matematiche per tutti i cittadini, indipendentemente dal tipo di scuola.

Le proposte contenute in *Matematica 2001*, pur con modifiche e rimaneggiamenti sono state alla base della formulazione dei nuovi curricoli di Matematica per la scuola primaria e per la scuola secondaria di I grado contenuti nel Decreto L.vo 19 febbraio 2004, n. 59.

Per la scuola secondaria di II grado la proposta della commissione UMI è contenuta nei volumi *Matematica 2003* e *Matematica 2004*, che segue l'idea di una «matematica per il cittadino». Secondo questa impostazione, l'educazione matematica deve concorrere alla formazione culturale degli allievi come futuri cittadini, fornendo loro gli strumenti per partecipare alla vita sociale, consapevolezza e capacità di gestire l'informazione e capacità critica.

Secondo il progetto l'insegnamento della matematica deve raggiungere alcune competenze disciplinari di vasta portata, stabili nel tempo, che si concentrano attorno a dei nuclei tematici e a dei nuclei trasversali. I nuclei tematici (Numeri e algoritmi, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) sono nuclei di tipo contenutistico, attorno ai quali costruire le competenze matematiche dell'allievo, mentre i nuclei trasversali (Argomentare, congetturare e dimostrare; Misurare; Risolvere e porsi problemi; Laboratorio di matematica) sono centrati sui processi che gli allievi devono gradualmente attivare nella loro formazione matematica.

4. La scuola secondaria di II grado dal 2001 a oggi e l'insegnamento della matematica

Nel giugno 2001 diventa ministro dell'istruzione Letizia Moratti. Le proposte dell'UMI dell'inizio degli anni duemila («la matematica per il cittadino») sono state - bene o male interpretate - alla base delle indicazioni curricolari di matematica introdotte nella Scuola primaria e nella Scuola secondaria di I grado (2003-2004) e di quelle successive (2005) per la Scuola secondaria di II grado introdotte dal ministro Moratti. L'attuazione di queste ultime (per la Scuola secondaria di II grado) venne sospesa dal Ministro Fioroni per il 2006/2007 e per l'anno scolastico seguente.

Nel 2008 si ha il termine anticipato della XIV Legislatura. Nel maggio 2008 subentra ministro M.S. Gelmini. Nello stesso anno vengono abolite, senza validi motivi, le SSIS, chiudendo questa esperienza innovativa di formazione dei docenti di scuola secondaria. L'avvio della Riforma Moratti per il Secondo Ciclo viene procrastinato all'anno scolastico 2010/2011.

Nel 2010 viene introdotto il Riordino dei Licei, degli Istituti Tecnici e degli Istituti Professionali ed emanate le nuove Indicazioni nazionali per i Licei e le nuove Linee guida per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali.

Nel seguito si propongono alcune osservazioni e riflessioni didattiche sui nuovi quadri orari, sulle *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento* (approvate in via definitiva il 26 maggio 2010) per i Licei e sulle *Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento* (direttiva ministeriale n. 57 del 15 luglio 2010) per gli Istituti Tecnici e gli Istituti Professionali, per quanto riguarda la Matematica.

Da decenni si aspettava una riforma della Scuola secondaria di II grado e con essa il rinnovamento dei curricoli di matematica. Negli ultimi vent'anni, almeno, ci sono stati diversi tentativi di riformare la Scuola secondaria superiore, ma tutti sono naufragati, a partire dalla proposta complessiva di riforma della Scuola superiore della Commissione Brocca (1988 per il biennio e 1990 per il triennio).

Nel riordino del 2010 la suddivisione della scuola secondaria superiore rimane più o meno quella tripartita preesistente: Licei, Istituti Tecnici e Istituti Professionali, ma con drastiche riduzioni di orario, di personale e di spesa, secondo il programma di politica scolastica del Governo in carica.

Prima del riordino della Scuola secondaria di II grado, introdotto nell'anno scolastico 2010-2011, i programmi e gli orari, per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, erano molto differenziati. Nei licei di ordinamento sopravvivevano ancora i programmi di matematica della Sottocommissione Alleata del 1945, che erano quindi in vigore da 65 anni (e formalmente sono ancora in vigore). La sopravvivenza così lunga di questi programmi costituisce qualcosa di stupefacente nel panorama internazionale. Accanto ai programmi di ordinamento, erano presenti quelli 'sperimentali', che risalgono più o meno a vent'anni fa. Si tratta dei programmi di matematica innovativi del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica (avviati nell'anno scolastico 1987-1988), dei programmi elaborati dalla Commissione Brocca (avviati negli anni 1990 e 1992 come programmi sperimentali), e di altri programmi di matematica delle sperimentazioni autonome. Negli Istituti Tecnici e negli Istituti Professionali c'erano programmi di matematica molto differenziati, adottatati nei vari corsi in anni diversi, anche se recenti rispetto agli obsoleti programmi ancora in vigore nei licei di ordinamento.

Tutti concordano, pertanto, che era ormai urgente intervenire e razionalizzare il gran numero di indirizzi della Scuola secondaria di II grado esistenti in precedenza. Tuttavia occorre prendere atto che non è stata attuata soltanto una razionalizzazione, ma soprattutto una drastica riduzione della spesa nella Scuola secondaria di II grado.

5. I nuovi quadri orari (2010) per la matematica nella scuola secondaria di II grado

Con il riordino della scuola secondaria di II grado, le sperimentazioni di matematica (PNI, Progetto Brocca, sperimentazioni autonome), sono state chiuse e progressivamente andranno ad esaurimento. Questa decisione è stata presa senza che sia stata fatta un'analisi sulla loro validità. Con il riordino del 2010 mediamente si assiste quindi a una diminuzione delle ore di lezione di matematica in quasi tutti gli indirizzi di studio. C'è solo un aumento nei licei scientifici, se si fa però un confronto con gli orari del liceo scientifico di ordinamento, nel quale si passa da un orario settimanale di 5-4-3-3-3 nei cinque anni a 5-5-4-4-4, oppure a 5-4-4-4-4 nell'opzione 'liceo delle scienze applicate'.

Si riportano nel seguito gli orari settimanali assegnati alla matematica nei D.P.R. n. 87, n. 88 e n. 89 del 15 maggio 2010 (Riordino degli Istituti Professionali, degli Istituti Tecnici e dei Licei).

Tabella 1 - Quadri orari settimanali di Matematica nel riordino dei Licei (DPR n. 89 del 15 maggio 2010)

	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V
Liceo artistico - 6 indirizzi	3	3	2	2	2
Liceo classico	3	3	2	2	2
Liceo linguistico	3	3	2	2	2
Liceo musicale e coreutico - 2 indirizzi	3	3	2	2	2
Liceo scientifico	5	5	4	4	4
Liceo scientifico - opzione scienze applicate	5	4	4	4	4
Liceo delle scienze umane	3	3	2	2	2
Liceo delle scienze umane - opzione economico - sociale	3	3	3	3	3

Negli Istituti Tecnici e negli Istituti Professionali la matematica è presente tra gli insegnamenti dell'area generale, comune a tutti gli indirizzi, con i quadri orari settimanali riportati nelle tabelle 2 e 3.

Tabella 2 – Quadri orari settimanali di Matematica negli Istituti Tecnici (DPR n. 88 del 15 maggio 2010)

	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V
Istituti Tecnici - settore economico - 3 indirizzi	4	4	3	3	3
Istituti Tecnici - settore tecnologico - 9 indirizzi	4	4	3	3	3

Tabella 3 – Quadri orari settimanali di Matematica negli Istituti Professionali (DPR n. 87 del 15 maggio 2010)

	Classe I	Classe II	Classe III	Classe IV	Classe V
Istituti Professionali - settore servizi - 4 indirizzi	4	4	3	3	3
Istituti Professionali - settore industria e artigianato - 2 indirizzi	4	4	3	3	3

È possibile pertanto constatare che nel riordino della Scuola secondaria di II grado i quadri orari per la matematica non sono soddisfacenti in molti degli indirizzi di studio e prima di tutto nei licei, esclusi quelli scientifici.

Dai quadri orari riportati in precedenza è evidente che in quasi tutti i licei l'orario settimanale dedicato alla matematica è molto ridotto (12 ore nell'arco del quinquennio, con 2 ore settimanali nelle classi terza, quarta e quinta). La riduzione dell'orario dedicato alla matematica ha poco senso in generale, ma soprattutto in relazione alle dichiarazioni di diversi esponenti politici sull'importanza dello studio della matematica, così come avviene in occasione della pubblicazione dei risultati di indagini nazionali e internazionali sugli apprendimenti.

Nel liceo scientifico l'orario dedicato a matematica aumenta di 4 ore rispetto al Liceo scientifico di ordinamento, ma diminuisce di 3 ore rispetto al quadro orario dei Licei scientifici sperimentali PNI e Brocca. Le ore di matematica saranno il 15% delle ore complessive di lezione nel quinquennio (in precedenza erano il 13%).

Le ‘12 ore’ complessive di matematica al Liceo Classico - e in quasi tutti gli altri licei ‘non scientifici’- non sono adeguate. In particolare è sorprendente che al liceo Classico ci sia soltanto un’ora in più di matematica su 5 anni rispetto ai programmi della Riforma Gentile del 1923, con delle indicazioni che prevedono in più - rispetto ai programmi precedenti - analisi matematica, probabilità, statistica e informatica.

6. Le *Indicazioni nazionali* di matematica per i Licei (2010)

Le nuove indicazioni nazionali sono state precedute nel 2005 dagli OSA (obiettivi specifici di apprendimento) per la scuola secondaria di II grado della ‘Riforma Moratti’, sospesa dal Ministro Fioroni nella successiva Legislatura, che a loro volta riprendono, sia pure con diverse modifiche e riduzioni, la proposta di nuovo curricolo di matematica elaborata negli anni 2000-2004 da una Commissione nominata dall’UMI.

Il riordino è stato introdotto a partire dall’a.s. 2010/2011. La rapidità con cui è stato avviato è dipesa dalla necessità di ridurre la spesa nel settore dell’istruzione pubblica, portata avanti in questa legislatura. Gli insegnanti non sono stati minimamente aggiornati e formati per supportare questo riordino, pur essendo noto che non basta adottare delle nuove indicazioni curricolari ‘per decreto’ affinché si verifichi automaticamente che tutti i docenti siano preparati e pronti a seguirle.

Per i Licei e per gli Istituti Tecnici e Professionali sono uscite due documenti finali riferiti ai contenuti di Matematica alquanto diversi. Mentre per i Tecnici e Professionali la stesura è organizzata su due colonne (conoscenze e abilità), quella dei Licei è in una sola colonna. I due documenti, inoltre, sono stati elaborati da differenti gruppi di esperti, senza prevedere un’impostazione comune, tranne che per i nomi dei temi. Si evidenzia quindi una marcata diversità fra la stesura delle *Indicazioni nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti professionali. Le *Indicazioni nazionali* di matematica per i Licei sono molto discorsive anche se sembrano avere un’impostazione organica e piuttosto caratterizzata da un punto di vista culturale. Per entrambi i documenti si riconosce nello sfondo la traccia delle proposte della Commissione UMI che ha elaborato i volumi *Matematica 2003* e *Matematica 2004*.

Le indicazioni nazionali di matematica per i Licei contengono una premessa contenente «il profilo generale e [le] competenze» e sono poi suddivise per
- Primo biennio
- Secondo biennio
- Quinto anno.

Le conoscenze sono ripartite nei seguenti temi:
- Aritmetica e algebra
- Geometria
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni.

Nella suddivisione dei temi e soprattutto nella metodologia proposta si evidenzia un debito delle indicazioni nazionali nei confronti del curricolo elaborato dalla Commissione UMI citata in precedenza.

Nelle indicazioni per la matematica, nelle *linee generali e competenze*, si afferma che

> lo studente al termine del percorso del liceo avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico:
> - la matematica nella civiltà greca,
> - il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico,
> - la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Da questi momenti della storia della matematica, si ricavano di conseguenza i «gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio» nei licei, elencati in otto punti (quelli riportati di seguito sono riferiti al liceo scientifico, ma ci sono solo lievi variazioni per gli altri tipi di liceo):

> 1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
> 2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana; una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;
> 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;

4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ('invarianza delle leggi del pensiero'), della sua diversità con l'induzione fisica ('invarianza delle leggi dei fenomeni') e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

I precedenti «gruppi di concetti e metodi» appaiono molto validi, anche se alcuni contengono delle genericità e forse sono difficili da tradurre concretamente nella didattica.

Un tema dominante di queste indicazioni è quello di «modello matematico» (vedi i punti 5 e 6 dell'elenco precedente), che torna molte volte anche nel seguito. Questa indicazione, di sicuro apprezzabile e innovativa per quanto riguarda il curricolo di matematica della scuola secondaria di II grado, presuppone ovviamente tempi adeguati per la sua trasposizione in classe.

Come si vede dal precedente elenco, i traguardi finali sono molto ambiziosi, ma ci si domanda soltanto se sono perseguibili, soprattutto in quei tipi di liceo nei quali nel secondo biennio e nel quinto anno è previsto un orario settimanale di sole 2 ore dedicato alla matematica.

Nelle *linee generali e competenze* si prosegue ricordando le conoscenze e le competenze matematiche che lo studente dovrà raggiungere al termine del percorso liceale.

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.

Si riporta di seguito quanto è previsto nelle Indicazioni nazionali riguardo agli strumenti informatici e alla loro utilizzazione didattica.

> Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici.
> L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche.
> L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.

Tali indicazioni appaiono senz'altro apprezzabili ed equilibrate e sembrano tener conto di quanto è stato elaborato nelle sperimentazioni del PNI e Brocca.

Commentiamo anche il seguente passo, che risulta uno dei più discutibili.

> L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, è necessario evitare dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina.

Si intuisce il senso delle indicazioni riportate sopra, ma in classe è a volte difficile capire quali sono i «tecnicismi ripetitivi» e le «casistiche sterili», soprattutto se non si fanno delle esemplificazioni. E soprattutto sarebbe necessario pensare a dei libri di testo che non continuino a presentare centinaia e centinaia di esercizi ripetitivi, per cercare di svolgere qualsiasi argomento di matematica.

Merita sicuramente un commento anche il seguente passo conclusivo delle *linee generali e competenze*:

L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

Questa indicazione è ovviamente condivisibile da tutti i docenti. Tuttavia essa appare contraddittoria con la vastità dei contenuti previsti dalle Indicazioni nazionali per i Licei. Per poter seguire questa indicazione sarà quindi necessario fare delle scelte nella vastità dei contenuti proposti. Probabilmente va anche chiarito analiticamente quali siano questi «concetti e metodi fondamentali» perché dalle indicazioni nazionali non è possibile ricavarlo in modo esplicito.

7. Qualche altro commento sulle *Indicazioni nazionali* per i Licei

Nell'impossibilità di fare un'analisi completa delle indicazioni per tutti i tipi di liceo, si riportano di seguito alcuni passi di quelle per il liceo scientifico e per il liceo classico, aggiungendo qualche commento. Le considerazioni esposte hanno però validità generale.

Liceo Scientifico - Primo Biennio - *Aritmetica e algebra*

Concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale.

Anche se nel I biennio del liceo scientifico si hanno a disposizione 5 ore di lezione alla settimana, sembra troppo richiedere tutto questo nelle prime due classi. I concetti elencati sopra richiedono una notevole capacità di astrazione, in particolare quelli «di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale». Prima di questo riordino non sempre questi concetti erano trattati nella scuola secondaria di II grado, tantomeno nel I biennio. Sulla questione del calcolo con i vettori in generale è opportuno osservare che hanno un ruolo fondamentale in Fisica, ma anche in Informatica, in Economia, ecc. È uno degli 'oggetti' della matematica più usato in tutte le applicazioni. Le Indicazioni nazionali sono forse troppo centrate sulla Fisica.

Ma ammettiamo pure che si debba fare il calcolo con i vettori nel I Biennio del liceo scientifico. Si potrebbe allora introdurre la somma di due vettori (la regola del parallelogramma), il prodotto di un vettore per uno scalare, usando dei software di geometria dinamica, e non molto di più. Si ritiene opportuno rinviare al II Biennio il prodotto scalare, il prodotto vettoriale e i concetti di dipendenza e indipendenza lineare. È auspicabile che le scuole, nella loro autonomia, si orientino in tal senso.

Riguardo poi agli «elementi di calcolo matriciale», questa richiesta sembra fuori luogo in un primo biennio. Probabilmente le indicazioni richiedono di fare la somma di matrici, il prodotto di una matrice per uno scalare e forse anche il prodotto «righe per colonne», ma le indicazioni non sono chiare. Sarebbe stato più sensato richiedere la risoluzione di sistemi lineari 2×2 (e al massimo 3×3) senza parlare in generale di «calcolo matriciale».

Liceo scientifico - Primo Biennio - *Geometria*

> Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Il primo biennio del liceo scientifico sembra troppo carico di argomenti. Le *Indicazioni* nazionali sono molto condivisibili dal punto di vista della metodologia proposta, ma appare problematica la collocazione nel I biennio, almeno in modo completo, del calcolo con i vettori e delle funzioni circolari (trigonometria). Si osserva inoltre che non c'è praticamente differenza tra le Indicazioni nazionali di matematica per il Liceo Scientifico e quelle per il Liceo delle Scienze applicate, anche se quest'ultima opzione ha un'ora settimanale in meno nella classe seconda (4 ore invece di 5). Pertanto, alcuni temi, ad esempio le funzioni circolari e le coniche, andrebbero inserite nel secondo biennio. Se proprio si debbono introdurre le funzioni circolari nel primo biennio, si potrebbe dare una definizione preliminare di $\mathrm{sen}x$, $\cos x$ e $\mathrm{tg}x$, per gli angoli acuti (relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo) e rimandare al secondo biennio uno studio più dettagliato e completo delle funzioni goniometriche viste come funzioni reali di una variabile reale.

Nelle indicazioni nazionali il primo biennio è quasi l'unico punto dove si parla delle funzioni goniometriche. Ci si rende conto che sulla Trigonometria sono molto diffuse delle pratiche didattiche discutibili, che tendono a esagerare il tempo dedicato a questo tema della matematica elementare. Si ritiene che la trigonometria - da presentare comunque prevalentemente nel secondo biennio - si possa anche ridurre molto, come propongono le indicazioni per i licei, ma ci vuole poi coerenza con quanto è richiesto all'esame di Stato e nei corsi di laurea a indirizzo scientifico e tecnologico.

Liceo scientifico - Primo Biennio - *Geometria*

> Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.

Si può essere d'accordo con queste indicazioni, ma è difficile prevedere di svolgere le coniche nel primo biennio (nella classe seconda); sarebbe meglio spostarle nel secondo biennio e lasciare nel I biennio le funzioni lineari e le funzioni quadratiche, ma senza voler completare in queste prime due classi tutte le coniche come luoghi geometrici nel piano. Si ritiene pertanto opportuno proporre che le scuole spostino lo studio delle coniche prevalentemente nel secondo biennio perché nel primo biennio ci sono fin troppi argomenti da svolgere.

Liceo scientifico - Primo Biennio - *Dati e previsioni*

> [Lo studente] apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

La prima frase è poco chiara. Ci si chiede cosa significa che lo studente «apprenderà la nozione di probabilità,… con l'introduzione di nozioni di statistica». Questo punto doveva essere precisato meglio dal punto di vista didattico.

Liceo scientifico - Primo Biennio - *Dati e previsioni*

> Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Non è ben spiegato perché il concetto di modello matematico e il suo approfondimento rigoroso sia collocato già nel primo biennio. Conviene rinviare come minimo al secondo biennio, se non al quinto anno. La frase sulla «specificità concettuale e metodica… rispetto all'approccio della fisica classica» di un modello matematico andrebbe come minimo chiarita con degli esempi precisi dal punto di vista didattico.

Liceo scientifico – Secondo Biennio (4 ore settimanali) *Relazioni e funzioni*

> Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

In questo passo le indicazioni sono particolarmente significative. Il concetto di «velocità di variazione di un processo» - previsto nel secondo biennio - probabilmente allude al rapporto incrementale e allo studio degli incrementi di una funzione con incrementi della variabile indipendente «a passo costante», come introduzione alla derivata di una funzione. Osserviamo comunque che il rapporto incrementale è una velocità di variazione media. Per arrivare al concetto di variazione istantanea di una funzione, che dipenda dal tempo, occorre inserire questo concetto nel contesto delle derivate. Purtroppo questa definizione è poco presente nei libri di testo (oppure presente formalmente, ma non con questo linguaggio) e in genere gli insegnanti stessi non presentano il rapporto incrementale e la derivata di una funzione in questo modo.

Liceo scientifico – Secondo Biennio (4 ore settimanali) *Dati e previsioni.* Riportiamo questo passo:

> Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.
> Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.

I contenuti proposti sembrano troppo vasti e superano quelli che erano presenti nei programmi sperimentali del PNI e Brocca, dove però l'orario era di 5 ore settimanali anche nel triennio, con una parte dedicata al laboratorio e all'uso degli strumenti informatici applicati alla matematica.

E' da osservare che l'aumento abnorme dei contenuti, a fronte di un orario insufficiente, non fa altro che incentivare pratiche didattiche che puntano più sull'addestramento che sul reale apprendimento. Nel passo precedente si trova poi l'incongruenza di proporre «gli elementi di base del calcolo combinatorio» nel secondo biennio, dopo aver già introdotto diverse nozioni di calcolo delle probabilità. In questo caso sarebbe opportuno anticipare e introdurre almeno le idee più semplici del calcolo combinatorio nel primo biennio. Altrimenti non si riesce a introdurre nemmeno i più semplici contesti classici della probabilità che pure sono previsti nel primo biennio.

Liceo scientifico - Quinto Anno (4 ore settimanali) - *Relazioni e funzioni*

> Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Nel passo precedente c'è un altro punto critico di queste indicazioni: il concetto di limite di una successione e di limite di una funzione. Nelle indicazioni, riguardo alle successioni, si trova scritto soltanto: «Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche».

Se si cerca la parola 'limite' nelle Indicazioni, si trova scritto: «Lo studente acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici».

Manca qualcosa di più sulla definizione di limite, sulla definizione di funzione continua e sui relativi teoremi. Su questi temi le Indicazioni nazionali sono alquanto generiche. Indefinita è pure la frase «lo studente apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici». Sarebbe opportuno dire quali sono i «casi semplici» e soprattutto precisare se all'esame di Stato saranno richiesti solo questi.

Liceo classico - Quinto Anno (2 ore settimanali) *Relazioni e funzioni*

> Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi).
> Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già studiate, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici.

Queste indicazioni per il liceo classico sono esattamente le stesse che sono presenti per il liceo scientifico (al 5° anno) come del resto per gli altri licei. Se si può essere particolarmente compiaciuti di questa coincidenza tra le indicazioni per i diversi tipi di liceo, dall'altro c'è da preoccuparsi perché al liceo classico si avranno a disposizione 2 ore settimanali di matematica, invece delle 4 del liceo scientifico.

C'è scritto inoltre che «non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo», ma questa indicazione è contraddittoria con quel che c'è scritto nel seguito. Soprattutto in vista degli esami di Stato sarebbe opportuno che fosse scritto un elenco preciso di conoscenze e abilità relative a questo tema.

Liceo scientifico - Quinto Anno (4 ore settimanali) - *Relazioni e funzioni*

> Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura.

L'introduzione di questo tema nel liceo scientifico è particolarmente significativa, ma ci si chiede se l'orario, pur se di 4 ore settimanali, sarà sufficiente per trattare in modo efficace questo argomento. L'aggiunta di nuovi temi senza un orario adeguato rischia di accentuare un insegnamento che punta più all'addestramento che sulla comprensione e l'effettivo apprendimento dei concetti.

Si parla poi di «alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali», ma con precisione si cita solo la II legge della dinamica di Newton. Molto significativo, relativamente a questo tema, anche il riferimento alla «modellizzazione dei fenomeni fisici o di altra natura», ma anche qui c'è una certa genericità nelle richieste.

Liceo classico - Quinto Anno (2 ore settimanali) *Geometria*

> Lo studente apprenderà i primi elementi di geometria analitica dello spazio e la rappresentazione analitica di rette, piani e sfere.

Si presume che questo argomento, con 2 ore settimanali, sarà difficile da trattare in quasi tutti i licei ‘non scientifici’. Occorre ricordare che due ore di matematica alla settimana equivalgono a 66 ore in un anno scolastico (33 settimane di scuola). Evidentemente questo orario, con classi attorno ai trenta allievi, è assolutamente insufficiente per trattare tutti gli argomenti proposti per il quinto anno.

Liceo scientifico - Quinto Anno (4 ore settimanali)

> Nell’anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell’aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell’insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Da questo passo si evince che il quinto anno deve essere dedicato ad approfondire in modo particolare il metodo assiomatico e in cui si insiste sulla sua utilità ai fini della modellizzazione matematica. Si tratta di un tema particolarmente impegnativo, che rischia di essere tradotto in un discorso puramente teorico, tutto sommato solamente discorsivo, come avveniva nelle sperimentazioni del PNI e Brocca ad esempio sul tema delle geometrie non euclidee. Sugli argomenti di matematica da svolgere nel 5° anno di scuola secondaria di II grado occorre un raccordo più preciso con l’università. Occorre dire esattamente che cosa gli allievi devono conoscere e saper fare relativamente a questo tema.

In definitiva si ritiene che gli obiettivi di apprendimento fondamentali siano molto validi, anche se scritti in modo generico. A volte non forniscono delle indicazioni precise agli insegnanti. Rischiano di essere poco efficaci, per quanto siano apprezzabili, perché gli insegnanti e le scuole possono darne tante diverse interpretazioni, che risulterà difficile portare a una sintesi e a unitarietà. È quindi necessario proporne una stesura più precisa e vincolante, chiarendo anche quali argomenti sono da eliminare rispetto allo svolgimento tradizionale del programma.

8. Le *Linee guida* di matematica (2010 - 2012) per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali

Le *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali per il I biennio sono uscite nel 2010 e completatate, per il secondo biennio e per il quinto anno, il 16 gennaio 2012 (direttiva del Ministro dell'Istruzione Francesco Profumo).

A differenza delle Indicazioni nazionali per i licei, la stesura è articolata su due colonne, intitolate «conoscenze» ed «abilità». Il gruppo di lavoro che ha elaborato queste Linee guida è diverso da quello che ha elaborato le *Indicazioni nazionali* per i licei. Questa diversità di impostazione è abbastanza sorprendente, visto che la matematica dovrebbe essere una disciplina di carattere generale e come tale essere presente in modo unitario nei vari tipi di scuola.

Le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali per la Matematica sono suddivise in quattro ambiti, gli stessi presenti delle *Indicazioni nazionali* per i Licei:

- Aritmetica e algebra
- Geometria
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

Queste linee guida sono precedute da una premessa in cui si afferma che:

> Il docente di Matematica concorre a far conseguire allo studente, al termine del percorso quinquennale, risultati di apprendimento che lo mettono in grado di:
> - padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica;
> - possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate;
> - collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche.

Nel seguito si precisa che «nel primo biennio il docente persegue, nella propria azione didattica ed educativa, l'obiettivo prioritario di far acquisire allo studente le competenze di base attese a conclusione dell'obbligo di istruzione», che sono indicate di seguito:

> - utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica
> - confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni
> - individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

- analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Si può essere d'accordo con queste competenze attese anche se la prima («utilizzare le tecniche e le procedure…») è scritta in modo poco chiaro.

Si precisa anche che l'articolazione delle *Linee guida* per la matematica «in conoscenze e abilità» è indicata «quale orientamento per la progettazione didattica del docente in relazione alle scelte compiute nell'ambito della programmazione collegiale del Consiglio di classe». Infine, in modo apprezzabile, si ricorda che:

> Nella scelta dei problemi, è opportuno fare riferimento sia ad aspetti interni alla matematica, sia ad aspetti specifici collegati ad ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) o, più in generale, al mondo reale.

Segue poi una stesura delle conoscenze e delle abilità in forma di tabella su due colonne e suddivisa nei quattro temi richiamati sopra.

La stesura di queste *Linee guida* è abbastanza piana, anche se non mancano alcuni punti che andrebbero chiariti. Ad esempio sarà opportuno esplicitare che cosa significa introdurre «in forma intuitiva» i numeri reali. Su questo punto si potrebbe fare riferimento a quanto è proposto in UMI, *Matematica 2003* nella parte dedicata al nucleo di contenuto *Numeri ed algoritmi* per il I biennio.

Per quanto riguarda l'argomento *Geometria*, si usano a volte delle espressioni poco precise, come ad esempio, «le principali figure del piano e dello spazio», «le principali trasformazioni geometriche» oppure «sviluppare semplici catene deduttive». Analoghe imprecisioni si riscontrano sul tema *Relazioni e funzioni* dove si parla delle «principali funzioni», e in *Dati e previsioni* in cui si parla delle «principali rappresentazioni grafiche» e di «semplici spazi (discreti)», senza specificare ulteriormente.

Nel Secondo biennio (classe terza e classe quarta) di quasi tutti gli indirizzi degli Istituti Tecnici sono stati aggiunti dei *Complementi di matematica* di un'ora settimanale, dedicati ad argomenti specifici utilizzati nelle materie tecniche e professionali, che portano l'orario complessivo dedicato alla matematica a 4 ore settimanali.

9. I punti di forza delle nuove Indicazioni e Linee guida e la formazione degli insegnanti

Le nuove *Indicazioni nazionali* e le *Linee guida*, pur con i limiti evidenziati, possono essere un'occasione per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica nella Scuola secondaria di II grado. Nonostante il contesto dei tagli alla spesa per l'istruzione pubblica in cui sono state adottate, le indicazioni nazionali/linee guida hanno dei punti di forza che si possono elencare come segue:

- propongono un curricolo fortemente unitario e in continuità con la scuola secondaria di I grado;
- richiedono l'utilizzazione di una metodologia basata sul laboratorio di matematica
- il tema «Dati e previsioni» è stato introdotto in tutti gli ordini di scuola secondaria di II grado
- si sottolinea il ruolo degli strumenti informatici nella didattica della matematica
- in tutti gli ordini di scuola sono stati introdotti elementi di Analisi matematica
- in tutto il curricolo si insiste sull'attività di matematizzazione e sul ruolo dei modelli matematici per l'interpretazione del mondo reale
- in tutti gli ordini di scuola sono stati introdotti elementi di geometria analitica dello spazio
- si propone inoltre di utilizzare l'insegnamento «per problemi», presi dalla matematica o nelle scienze, per sviluppare l'apprendimento della matematica
- si sottolinea che l'obiettivo fondamentale è quello di comprendere in profondità gli aspetti concettuali della matematica e si dà l'indicazione di introdurre pochi concetti e metodi fondamentali, ma di acquisirli in profondità.

Questi aspetti di contenuto e soprattutto metodologici presuppongono una formazione e un aggiornamento degli insegnanti che li metta in grado di intraprendere il rinnovamento della didattica. È pertanto auspicabile che al più presto prendano avvio i corsi di Tirocinio Formativo Attivo per la formazione universitaria degli insegnanti di scuola secondaria e che nelle scuole ci sia una vasta azione di aggiornamento su queste nuove indicazioni e linee guida, che altrimenti sono destinate a rimanere non attuate, come si è verificato per molti programmi, anche innovativi, introdotti in passato.

Nelle scuole sarà necessario prima di tutto trasformare queste indicazioni nazionali/linee guida in vere e proprie proposte di curricolo che siano praticabili in classe. Il pericolo, tuttavia, è che si crei un'eccessiva diversità tra i curricoli scelti nelle diverse scuole e che non si riesca a giungere a una sintesi comune. Sarebbe pertanto necessaria una maggiore precisione a livello nazionale nel fissare le finalità generali, soprattutto se si introdurrà nella Scuola secondaria di II grado, come si è fatto per quella di I grado, un prova di valutazione Invalsi delle conoscenze matematiche, da inserire all'esame di Stato. In secondo luogo è necessario ricavare dalle indicazioni nazionali/linee guida un quadro di riferimento chiaro per la valutazione delle conoscenze e delle competenze matematiche per la prova scritta di liceo scientifico.

Questo lavoro di trasposizione didattica delle indicazioni nazionali e delle linee guida in curricoli che possano essere sviluppati effettivamente nelle classi non può che essere fatto dagli insegnanti e dalle scuole.

Bibliografia e sitografia

Barozzi, G.C., Ciarrapico, L. (2003), Il Piano Nazionale Informatica, *Bollettino UMI*, 4-A, Dicembre, pp. 441-461.

Bernardi, C. (2011), La matematica nella riforma Gelmini, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34-AB (3), Maggio-Giugno, pp. 285-297.

Ciarrapico, L. (2002), L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità, *Archimede*, luglio-settembre, pp. 123-129.

Linati, P. (2011), *L'algoritmo delle occasioni perdute. La matematica nella scuola della seconda metà del Novecento*, Trento: Erickson.

MIUR-UMI-SIS (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Secondaria di secondo grado*, Lucca, Liceo Vallisneri.

MIUR-UMI-SIS (2006), *Matematica 2004. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ultimo anno della Scuola Secondaria di secondo grado*, Lugo di Romagna, Liceo Ricci-Curbastro.

Paola, D. (2010), Le indicazioni curricolari dei nuovi licei: una prima impressione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 33B (4), Agosto, pp. 407-410.

Prodi, G. (1987), I nuovi programmi del biennio tra utopia e realtà, *Notiziario UMI*, Novembre.

Tomasi, L. (2011), La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado del 2010: osservazioni e considerazioni didattiche, *Progetto Alice*, 12, anno I, 34, pp. 159-186.

Villani, V. (2001), I contributi di Giovanni Prodi all'elaborazione e all'attuazione delle riforme scolastiche italiane della seconda metà del Novecento, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34A (4), pp. 411-446.

Vita, V. (1986), *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'Unità d'Italia al 1986*, Bologna: Pitagora.

Le *Indicazioni nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali, si trovano sul sito dell'ANSAS (ex INDIRE)

http://nuovilicei.indire.it/

http://nuovitecnici.indire.it/

http://nuoviprofessionali.indire.it/

Abstracts

Nicolina A. Malara, *Processi di generalizzazione nell'insegnamento-apprendimento dell'algebra*

In questo lavoro è affrontato il tema della generalizzazione nell'insegnamento e apprendimento della matematica. In particolare, si introducono dapprima alcuni studi teorici sui processi di generalizzazione in campo algebrico. Sono quindi considerati alcuni studi in cui sono analizzati e teorizzati i comportamenti degli studenti nella esplorazione di successioni figurali, richiamando brevemente il ruolo dell'insegnante e sottolineando la necessità di una sua adeguata preparazione.

Nicolina A. Malara, *Studies on the generalisation processes in the field of algebra*

This paper deals with the question of generalization in the teaching and learning of mathematics. In particular, a few theoretical works on generalisation processes in the field of algebra are introduced, after which some studies concerning the students' behaviour and the role of the teacher in dealing with the exploration of figural sequences are analysed and theorized. The need for an adequate teachers' education in the teaching of this kind of task is stressed.

Nicolina A. Malara, *Formazione degli insegnanti per un approccio socio-costruttivo all'early algebra: studio di un caso*

Tracciamo una breve rassegna degli studi sulla generalizzazione, in particolare dei processi di generalizzazione in algebra, e degli studi circa le strategie di pensiero degli studenti nello sviluppo di generalizzazioni in riferimento allo studio di successioni figurali. Discutiamo circa il ruolo dell'insegnante nel guidare gli studenti ad affrontare questo tipo di generalizzazioni e presentiamo metodi e strumenti da noi messi a punto per promuovere la competenza degli insegnanti nell'affrontare questo genere di attività nel quadro di un insegnamento socio-costruttivo. Concludiamo con alcune osservazioni riguardanti la nostra metodologia e le condizioni che ne determinano l'efficacia.

Nicolina A. Malara, *Formation of teachers for a socio-constructive approach to early algebra: a case study*

In this paper we trace the changes of perspective which have occurred in algebra teaching, sketching the recent trends and discussing the increasingly more complex role played by the teacher. We present our methodology of work with teachers aimed at improving their ability to promote the development of the students' algebraic thinking and introduce the multi-commented classroom transcripts (MT), seen as a useful tool to foster teachers' ability to orchestrate early algebra discussions and to critically observe their own actions in the classroom. We report an MT excerpt and analyse the related comments highlighting behaviour and awareness emerging in the teacher. We conclude with some remarks concerning the value of our methodology and the conditions which determine its efficacy.

Annalisa Cusi, *Un costrutto teorico per guidare il docente nell'attività di riflessione a posteriori sulla propria pratica: analisi di un'esperienza di tirocinio*

In questo lavoro cercheremo di evidenziare le ricadute, nell'ambito della formazione insegnanti, di una ricerca che abbiamo condotto con l'obiettivo di promuovere, nella scuola secondaria superiore, percorsi didattici innovativi di approccio all'insegnamento dell'algebra. In particolare, metteremo in luce l'uso che abbiamo fatto di uno dei principali risultati della nostra ricerca, un costrutto teorico elaborato per l'analisi del ruolo dell'insegnante, come strumento per modellizzare e guidare la riflessione a posteriori condotta da tirocinanti iscritti ai corsi SSIS sulle attività da loro condotte nelle classi durante il periodo di tirocinio.

Annalisa Cusi, *A theoretical construct as a teacher's guideline for a posteriori reflection on teaching practice: analysis of a teacher training experience*

In this paper we highlight the consequences, within the context of a teacher training course, of a research work carried out in a senior secondary school, aimed at promoting innovative teaching/learning sequences in the subject of algebra. We will focus particularly on one of the main results of the research used to create a theoretical construct to analyse the role of the teacher as a tool for a posteriori reflection on the activities carried out by the trainee teachers who took part in the SSIS course.

Alessandra Fiocca, *Un approccio alla trigonometria attraverso un percorso storico*

È noto che la trigonometria è tra le discipline matematiche meno gradite agli studenti. A questa situazione si potrebbe ovviare attraverso un approccio storico che avrebbe, tra l'altro, il grande vantaggio di rendere ragione del perché era, ed è ancora oggi, importante conoscere la trigonometria. Nel presente lavoro si ripercorrono alcune delle principali tappe nello sviluppo della disciplina, dalle prime tavole delle corde contenute nell'*Almagesto* di Tolomeo, ai contributi degli Indiani e degli Arabi, agli sviluppi in Occidente, fino all'introduzione e alla sistemazione della teoria delle funzioni circolari tra XVII e XVIII secolo.

Alessandra Fiocca, *An approach to trigonometry from a historical point of view*

It is well known that students of mathematics are rarely attracted to the discipline of trigonometry. This situation may be obviated by the introduction of a historical approach which would have the advantage of demonstrating why it was, and still is, important to study trigonometry. The present work proposes to go back over some of the main steps of the development of the discipline, from the first tables of chords contained in the *Algemest* by Ptolemy, to the contributions made by the Indians and Arabs, to the developments in the West, up to the introduction and definition of circular functions between the XVII and XVIII centuries.

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi, *I vettori nell'insegnamento della matematica nella Scuola secondaria di II grado*

Questo lavoro si propone di valorizzare il calcolo vettoriale nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di II grado, come sottolineato anche dalle recenti *Indicazioni nazionali per i Licei* del 2010. Si propone di non relegare questo tema al solo insegnamento della fisica, ma di evidenziare il vantaggio di un suo utilizzo nel prendere in esame diversi argomenti matematici. Particolarmente importante in un percorso didattico come quello suggerito, è l'introduzione di esempi e problemi che, a partire da quelli proposti, facciano apprezzare agli studenti la potenza del metodo vettoriale nell'affrontare, oltre le applicazioni, anche argomenti teorici.

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi, *Vectors in the teaching of mathematics in senior secondary school*

This work proposes that the teaching of mathematics in senior secondary schools would be enhanced by inclusion of calculus vectors, as was recently suggested in the 2010 National Proposals for the Grammar School (*Indicazioni nazionali per i Licei*). It is believed that this theme should not be limited to the Physics curriculum, since it may be used to advantage as a possibility to highlight their various mathematical aspects. Of particular importance in a teaching sequence like the one suggested is the introduction of examples and problems which, starting from those proposed, allow the student to understand the potential of the vector method not only for practical applications but also when dealing with theoretical arguments.

Paola Vighi, *Introduzione al concetto di probabilità nella scuola secondaria superiore*

Si presenta un approccio al concetto di probabilità, basato su di una sequenza di problemi che hanno lo scopo di promuovere il pensiero probabilistico ed il ragionamento non deterministico, fondamentali per la comprensione della probabilità.

Paola Vighi, *An Introduction to the probability concept in senior secondary school*

We present an approach to the probability concept, based on a sequence of problems, with the aim to promote probabilistic thinking and not deterministic reasoning that are fundamental to an understanding of probability.

Carlo Marchini, *Un'esperienza di insegnamento nella SSIS. Il caso della Logica matematica*

Si presentano le ragioni e gli aspetti fondamentali dell'insegnamento di Logica matematica per la SSIS illustrandone le finalità e il valore formativo.

Carlo Marchini, *A teaching experience in the SSIS. The case of mathematical logic*

This paper presents the rationale of a course of mathematical logic among the teaching activities for the Teachers' Specialisation School, focusing on the main features of the discipline in its spin-off in teacher training.

Giuliana Gnani, Angela Balestra, *La formazione degli insegnanti di matematica e scienze in modalità e-learning: una esperienza europea*

Dagli anni settanta un settore di Scienze dell'educazione risulta rivolto alla sperimentazione e alla valutazione dell'applicazione dell'e-learning nell'ambito della formazione (Adelsberger, Collis, Pawlowski, 2002). Numerosi corsi di formazione degli insegnanti sono stati svolti utilizzando la comunicazione, le pratiche didattiche e i processi della attività di e-learning: con queste modalità si è svolto nell'ambito del progetto europeo ISSUE il corso di formazione iniziale degli insegnanti di matematica e scienze Teaching-Learning Sequences for Integrated Learning of Science Issues. L'articolo vuole illustrare il contributo italiano al corso tramite l'esperienza maturata dai docenti tutor.

Giuliana Gnani, Angela Balestra, *The formation of maths and science teachers in the context of e-learning: a European experience*

Since the seventies a sector of Science of Education has been testing and assessing the application of e-learning in the context of formation. (Adelsberger, Collis, Pawlowski, 2002). Numerous teacher formation courses have been carried out using e-learning communication, teaching practices and activities: an initial formation course for teachers of mathematics and science, Teaching-Learning Sequences for Integrated Learning of Science Issues, was held within the European ISSUE project. The article describes the Italian teaching staff's experience and contribution to the course.

Daniela Gambi, Isabella Stevani, Anna Pelizzari, *Il progetto regionale EM.MA. a Ferrara: un'esperienza di riflessione sulla didattica e di formazione dei docenti in una prospettiva di continuità verticale*

Nel triennio 2008- 2011 è stato realizzato in Emilia-Romagna un articolato e complesso progetto di formazione docenti, denominato EM.MA. (Emergenza Matematica), che ha coinvolto in tutte le province gli insegnanti delle scuole primarie e secondarie di primo grado. Solo nella provincia di Ferrara il percorso formativo ha coinvolto anche i docenti del biennio del II grado. L'esperienza nasce dall'esigenza di riflettere sui curricoli disciplinari e sulle modalità di insegnamento/apprendimento e costituisce un esempio di come, a partire dall'analisi degli esiti delle prove di valutazione esterna nelle scuole, in primis da quelli della Quarta Prova dell'Esame di Stato a conclusione del primo ciclo di istruzione, si possano mettere a confronto le esperienze di docenti di ordini di scuola differenti, per costruire percorsi didattici in verticale coerenti e condivisi e per elaborare strategie che migliorino l'apprendimento degli studenti e permettano il superamento degli ostacoli cognitivi emersi.

Daniela Gambi, Isabella Stevani, Anna Pelizzari, *The regional EM.MA project in Ferrara: a reflection on teaching methods and the formation of teachers with a view to vertical continuity*

Between 2008 and 2011, a well-designed project for teacher training called EM.MA. (Emergency Mathematics) was set up in Emilia-Romagna. The project involved teachers of primary and junior secondary schools from all the provinces. Only in the province of Ferrara did the project also involve teachers from the first two years of senior secondary school. This experience developed from the need to think critically about the curricula of the various subjects and the current teaching/learning methods, starting from an analysis of external school tests results, especially the results of the Fourth Test of the State examination at the conclusion of junior secondary school. The EM.MA project is an example of how teachers with different teaching backgrounds can share their experience in order to build vertical and consistent teaching/learning curricula and devise strategies that can both improve the students' learning processes and allow them to overcome any possible cognitive obstacles.

Elisa Patergnani, *Gli inizi dell'istruzione tecnica a Ferrara. Il ruolo della matematica*

Le scuole tecniche nella città di Ferrara, prima della legge Casati del 1859 e del Regolamento Mamiani del 1860, erano essenzialmente legate all'Università (Scuola di idraulica, Corsi per gli agrimensori, Scuola di Agraria). Con l'Unità d'Italia anche a Ferrara furono istituite le Scuole Tecniche Comunali (1861) e l'Istituto Tecnico Provinciale (1863). Il fine di esse era didare ai giovani la formazione professionale e la cultura generale necessaria per determinate carriere della pubblica amministrazione, dell'industria, del commercio e dell'agricoltura. Tra le varie sezioni in cui furono organizzati gli istituti tecnici, particolare interesse per gli insegnamenti matematici assunse la Sezione Fisico-Matematica, l'unica che consentiva l'accesso all'Università. Si cercò anche di riorganizzare l'istruzione tecnica superiore con l'istituzione di una Scuola tecnica per il Corpo del Genio Civile, ma questo progetto non si concretizzò.

Elisa Patergnani, *The beginnings of technical education in Ferrara. The role of mathematics*

Before the Casati law of 1859 and the Mamiani Regulation of 1860, the technical schools in the city of Ferrara were essentially linked to the University (School of Hydraulics, Courses for surveyors, School of Agriculture). With the Unification of Italy, Communal Technical Schools (1861) and the Provincial Technical Institute (1863) were also set up in Ferrara. They aimed at providing young people with the professional formation and general culture required for a career in public administration, industry, commerce and agriculture. Among the various sections which constituted the technical institutes, the teaching of mathematics assumed particular importance in the Section of Physics and Mathematics, the only one which qualified for entrance to university. Attempts were made to reorganise Higher Technical Education through the establishment of a technical school for civil engineering, but this plan was never carried out.

Luigi Tomasi, *La matematica nella Scuola secondaria di II grado, dalle sperimentazioni degli anni Ottanta al riordino del 2010*

L'articolo prende le mosse dall'analisi dei programmi sperimentali per la matematica (PNI e "Progetto Brocca"), introdotti nella scuola secondaria superiore in Italia alla fine degli anni Ottanta del secolo scorso. Propone in seguito alcune osservazioni e considerazioni didattiche sulle nuove *Indicazioni nazionali* per i Licei e sulle *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali riguardanti la matematica, che sono andate in attuazione con il Riordino della Scuola secondaria di II grado a partire dall'anno scolastico 2010-2011. In questo breve excursus si esaminerà in particolare il legame tra queste recenti indicazioni con la proposta di un nuovo curricolo, all'insegna di una "matematica per il cittadino", elaborata da una Commissione UMI negli anni 2000-2004.

Luigi Tomasi, *Mathematics in senior secondary school, from experimentation in the eighties to reorganisation in 2010*

The paper begins with an analysis of experimental projects for mathematics (PNI and the "Brocca" Project) which were introduced into the Italian senior secondary schools at the end of the 1980s. This is followed by some considerations on teaching related to the National Recommendations for Grammar Schools and Guidelines for Technical High Schools and Vocational Schools regarding the teaching of mathematics which came into effect with the reorganisation of senior secondary schools starting from the scholastic year of 2010-2011. This brief overview examines the link between these recent recommendations with the proposal for a new curriculum, to the teaching of "mathematics for the citizen", drafted by the UMI in the years 2000-2004.

Recensioni

Paolo Linati, *L'algoritmo delle occasioni perdute. La matematica nella scuola della seconda metà del Novecento*. Edizioni Erickson, Trento, 2011, 359 pp., ISBN: 978-88-6137-771-4

Sono rare le autobiografie scientifiche di insegnanti di matematica come questa di Paolo Linati, docente di matematica e fisica nelle scuola secondarie, attivo in Italia e all'estero, autore di numerosi articoli di didattica della matematica e per trent'anni presidente della sezione della Mathesis di Varese.

L'autore percorre oltre cinquant'anni di progetti e sperimentazioni nel campo della didattica della matematica, collocata opportunamente in un contesto internazionale. Ricordando Oscar Chisini, scomparso nel 1967, Linati dà una sua spiegazione del titolo del volume *L'algoritmo delle occasioni perdute*: "Forse con lui finì un'epoca e ne nacque un'altra: l'epoca della 'nuova matematica' di cui la matematica bourbakista degli insiemi e delle strutture fu solo un primo capitolo, ben presto messo da parte; o forse, qualcuno potrebbe dire, nasceva l'epoca delle esperienze dimenticate e delle occasioni perdute". In effetti l'autore rimane molto attaccato alle proposte didattiche degli anni Sessanta e in particolare alla presentazione della geometria partendo dagli spazi vettoriali (p. 129).

Ma altri temi sono presi in esame: l'assiomatica a scuola, logica e filosofia della matematica nella scuola secondaria, dalla logica del certo alla logica del probabile, il piano nazionale per l'informatica, matematica numerica e algoritmi, la matematica per l'interpretazione del reale, la matematica per il cittadino, la matematica del disagio.

Il libro ha il pregio di contestualizzare le varie proposte didattiche, così la nuova matematica si afferma quando il mondo occidentale, preso atto dei successi scientifici dell'Unione sovietica, con il lancio del primo uomo nello spazio, cercava di rilanciare gli insegnamenti scientifici nella scuola. Le esperienze del Sessantotto in gran parte distrassero dal dibattito teorico e l'avvento dell'informatica diede nuova attualità al calcolo numerico, alla matematica discreta e un certo impulso all'insegnamento della logica matematica.

Il volume si legge volentieri, come una specie di Zibaldone nel quale l'autore presenta con accurati riferimenti bibliografici i risultati di convegni internazionali, dibattiti, incontri sulla didattica della matematica nella scuola per oltre mezzo secolo.

Luigi Pepe

Fátima Paixão, Konstantinos Nikolantonakis (eds.), *Metric System and Local Adoptions in Europe*, Edições IPCB, Instituto Politécnico de Castelo Branco, Portugal, 2012, 114 pp, ISBN: 978-989-8196-20-0

Il sistema metrico è il sistema di misure decimale basato su unità fisiche, che prende il nome dalla unità base delle lunghezze, il *metro*, dal greco 'metron', misura. Introdotto e adottato per legge in Francia nel 1799, fu successivamente adottato come comune sistema di pesi e misure nella maggioranza dei paesi, e ovunque come il sistema in uso nel mondo scientifico. In Europa la completa affermazione del sistema metrico ebbe luogo in tempi diversi e con diverse modalità.

Esso risponde ad esigenze di semplicità, uniformità e internazionalità. Prima della sua introduzione, la frammentazione di misure e unità di misura era straordinaria e di grande impaccio alla comunicazione e ai commerci. In Francia, ad esempio, nella seconda metà del Settecento esistevano 800 diversi nomi di misure e 250000 diverse unità di misura, che pur con lo stesso nome, variavano da luogo a luogo. Il progetto di stabilire una unità naturale delle misure e dei pesi, fu avviato dall'Accademia delle Scienze di Parigi negli anni tra 1784 e il 1790. Si trattava non solo di unificare le misure all'interno di uno stato, ma di determinare un misura lineare di base per tutte le altre: di superficie, capacità, peso, che fosse anche universale e riproducibile. Alla iniziale proposta di Condorcet di adottare come unità di misura la lunghezza del pendolo che batte il secondo alla latitudine di 45°, la Commissione per i pesi e misure, cui appartennero anche Lagrange, Lavoisier, Laplace e Monge, sostituì quella di una frazione del meridiano terrestre: la decimilionesima parte del quarto di meridiano (1791). Il nuovo sistema rispondeva anche ad esigenze di razionalizzazione e semplicità: tutte le misure di una stessa specie si ottenevano dalla principale, moltiplicando o dividendo per potenze di 10. Tra il settembre 1798 e il giugno 1799 una conferenza internazionale sul sistema metrico ebbe luogo a Parigi, con i rappresentanti dei diversi paesi. La diffusione e applicazione del nuovo sistema incontrò molte difficoltà, e anche una battuta d'arresto con la fine del periodo napoleonico. Il volume esplora diversi percorsi e aspetti dell'introduzione del sistema metrico in Europa nella fase iniziale e delle resistenze che incontrò: in Francia (Suzanne Débarbat e Simone Dumont), in Grecia (Konstantinos Nikolantonakis), in Portogallo (Fátima Paixão e Fátima Regina Jorge), Italia (Maria Teresa Borgato), Spagna (Juan Navarro Loidi e Pilar Merino Saez), Germania del Nord (Karl-Heinz Ziessow).

I curatori del volume sono due studiosi che rappresentano anche geograficamente, due periferie dell'Europa occidentale: ricercatrice del Politecnico di Castelo Braco la prima, professore all'Università della Macedonia occidentale il secondo. Il volume nasce da un simposio nell'ambito della European Society for the History of science: esso contiene, in un linguaggio accessibile, molti risultati inediti frutto di ricerca in archivi e musei e non reperibili in altre pubblicazioni. Può essere utile a insegnanti di scuole di ogni livello di istruzione e a ricercatori di storia della scienza e di educazione scientifica.

Luigi Pepe

Giorgio Israel, Ana Millán Gasca, *Pensare in matematica*, Zanichelli, Milano, 2012, 527 pp., ISBN: 978-88-19361-2

"*Pensare in matematica* propone un incontro con la matematica come parte della cultura". Così Giorgio Israel e Ana Millán Gasca, due storici delle matematiche con una grande esperienza internazionale, presentano un corposo volume di oltre cinquecento pagine diretto in primo luogo a studenti di Scienze della formazione primaria.

Pensare in matematica consta di tredici capitoli: Che cos'è la matematica; Numeri naturali e sistemi di numerazione; I numeri interi; L'aritmetica elementare; I numeri razionali; I numeri reali e il continuo; Il pensiero geometrico e la geometria euclidea; Algebra, geometria e il concetto di spazio; L'analisi matematica; La matematica assiomatica; Probabilità; La matematica applicata e la modellistica; Restituire la matematica alla cultura.

Caratteristica comune di ogni capitolo è l'uso della storia delle matematiche come strumento principale per inserire gli argomenti in un contesto culturale più ampio. Diversi capitoli sono anche completati con letture di testi classici pertinenti, attingendo ad opere di Eulero, Poincaré, Enriques, Einstein, Thom, Fourier, Koyré, Truesdell, Laplace, Von Neumann.

Accanto a temi classici come quelli dell'aritmetica e della geometria trovano spazio l'analisi numerica e la modellistica matematica.

Il volume, oltre che a degli studenti di Scienze della formazione primaria, per i quali può costituire un testo di riferimento, può essere utile agli insegnanti di matematica di ogni ordine e grado e agli uomini di cultura, che di fronte allo spazio crescente che gli strumenti matematici hanno nella vita di tutti i giorni, intendano guardare a questa antica scienza, come ad una delle più significative espressioni dello spirito umano e come tale intellegibile da parte di tutti gli uomini e di tutte le donne.

Maria Teresa Borgato

Autori

Angela Balestra (*Istituto Comprensivo 'T. Bonati', Bondeno*)
abalestra@libero.it

Maria Teresa Borgato (*Università di Ferrara*)
mariateresa.borgato@unife.it

Annalisa Cusi (*Università di Modena e Reggio Emilia*)
annalisa.cusi@unimo.it

Alessandra Fiocca (*Università di Ferrara*)
alessandra.fiocca@unife.it

Daniela Gambi (*Liceo Statale 'L. Ariosto', Ferrara*)
danygam@libero.it

Giuliana Gnani (*Università di Ferrara*)
giuliana.gnani@unife.it

Nicolina A. Malara (*Università di Modena e Reggio Emilia*)
malara@unimore.it

Carlo Marchini (*Universita di Parma*)
carlo.marchini@unipr.it

Giuliano Mazzanti (*Università di Ferrara*)
giuliano.mazzanti@unife.it

Elisa Patergnani (*Università di Ferrara*)
elisa.patergnani@unife.it

Anna Pelizzari (*Istituto Comprensivo, Ostellato*)
annapelizzari@libero.it

Luigi Pepe (*Università di Ferrara*)
luigi.pepe@unife.it

Valter Roselli (*Università di Ferrara*)
valter.roselli@unife.it

Isabella Stevani (*Liceo Statale ‘L. Ariosto’, Ferrara*)
stevisa@libero.it

Luigi Tomasi (*Liceo Scientifico Statale ‘G. Galilei’, Adria*)
luigi.tomasi@unife.it

Paola Vighi (*Università di Parma*)
paola.vighi@unipr.it