“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 14, n. 24/2022, pp. 123-143 – ISSN 2038-1034

Laboratorio di geometria origami: prime considerazioni su un’indagine esplorativa

Elena Lazzari

Abstract – *An initial exploratory investigation is reported in this paper, which aims to identify strengths and critical elements of using origami geometry in the mathematics teaching-learning process. An origami geometry laboratory, set out in detail in the body of the article, has been designed for students in the first two years of secondary school, to accompany the discussion of the fundamentals of Euclidean geometry. This is set out in detail in the body of the article. The experimentation carried out in three first grade secondary school classes is also described, highlighting the difficulties encountered and the episodes that were didactically significant. Thanks to the analysis of the satisfaction questionnaires submitted to the participants, it was possible to obtain some results regarding the students' perceptions of the work done, which are useful to better delineate possible future developments of the present research.*

Riassunto – *Nel presente contributo viene riportata una prima indagine esplorativa che ha lo scopo di individuare punti di forza ed elementi di criticità dell’utilizzo della geometria origami nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. È stato progettato per studenti del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado un laboratorio didattico di geometria origami, esposto nel dettaglio del corpo dell'articolo, da affiancare alla trattazione dei fondamenti di geometria euclidea. Si descrive, inoltre, la sperimentazione realizzata in tre classi prime di scuola secondaria di secondo grado, evidenziando le difficoltà riscontrate e gli episodi didatticamente significativi. Grazie all’analisi dei questionari di gradimento sottoposti ai partecipanti, si sono potuti ottenere alcuni risultati relativi alle percezioni degli studenti rispetto al lavoro svolto, utili a delineare meglio i possibili sviluppi futuri della presente ricerca.*

Keywords – origami geometry, axiomatic system, problem solving, learning by doing, exploratory investigation

Parole chiave – geometria origami, sistema assiomatico, risoluzione di problemi, imparare facendo, indagine esplorativa

Elena Lazzari è Docente di Matematica di scuola secondaria di secondo grado. Sta attualmente svolgendo un assegno di ricerca presso l’Università degli Studi di Ferrara, dove ha conseguito nel 2018 il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica. Collabora dal 2016 con il Piano Lauree Scientifiche del Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università di Ferrara occupandosi, nell’ambito della sua ricerca, dello studio di metodologie didattiche nell’insegnamento-apprendimento in matematica. Tra le sue pubblicazioni: *Flipped learning and affect in mathematics: Results of an initial narrative analysis* (in “European Journal of Science and Mathematics Education”, 11(1), 2022, pp. 77-88) e *I sistemi di numerazione: un’esperienza di apprendimento capovolto* (in “Annali online della Didattica e della Formazione Docente”, 9(14), 2017, pp. 372-393).

1. Introduzione

La parola giapponese *origami* consiste nell'unione di due termini: *ori*, che significa piegare, e *gami* che significa carta. La tecnica della piegatura della carta per costruire figure piane e oggetti tridimensionali ha una lontana tradizione in oriente, in particolare in Cina e Giappone, ed è arrivata in Europa solo successivamente, attraverso i materiali per i *kindergarten* (giardini d'infanzia) progettati dal pedagogista tedesco Friedrich Fröbel (Newton, 2020). Tuttavia, una trattazione sistematica della geometria elementare piana che recuperi i risultati della teoria euclidea, si trova per la prima volta nel testo *Geometric exercises in paper folding* del 1893, scritto dal matematico indiano Tandalam Sundara Row. Questo approccio alla geometria si diffuse successivamente in occidente grazie a Felix Klein, destando l'interesse di numerosi matematici (Borgato & Salmi, 2018).

Negli ultimi anni la piegatura della carta sta diventando una tecnica sempre più considerata nell'ambito della ricerca scientifica ed è possibile leggere di intersezioni tra origami e vari ambiti come geometria, tecnologia, ingegneria e arte (Magrone, 2015). La letteratura che riguarda l'uso dell'origami come strumento didattico in matematica, però, è estremamente limitata. Sono molte le proposte di contenuti didattici, ma l'attenzione data agli aspetti cognitivi coinvolti è esigua (Ferrara et al., 2021). Alcuni studi sperimentali hanno mostrato come l'uso degli origami nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica possa contribuire a far sviluppare abilità motorie e visuo-spaziali, ad accrescere le conoscenze geometriche degli studenti e a migliorare la loro motivazione e il loro atteggiamento verso la matematica (eg. Akayuure et al., 2016; Boakes, 2009; Cakmak et al., 2014; Golan & Jackson, 2009; Morando & Spreafico, 2022; Russel, 2007).

In questo contesto si inserisce la ricerca che sarà esposta nel presente contributo. Si tratta di una prima indagine esplorativa, priva di ipotesi a priori, che ha lo scopo di evidenziare eventuali punti di forza o elementi di criticità legati all'utilizzo degli origami nel processo di insegnamento-apprendimento della geometria elementare. Il fine ultimo è quello di identificare un possibile focus di ricerca da approfondire in indagini successive. Per realizzare tale obiettivo, dopo aver inquadrato storicamente il campo della geometria origami, si procederà con la presentazione di un laboratorio didattico appositamente progettato e della sua attuazione all'interno di tre classi prime di scuola secondaria di secondo grado, che ha coinvolto un totale di 77 studenti. Si entrerà nello specifico della sperimentazione descrivendo le principali difficoltà riscontrate e gli episodi più significativi da un punto di vista didattico. Verranno presentate infine alcune conclusioni sulle percezioni degli studenti relativamente all'attività svolta, analizzando i risultati dei questionari di gradimento proposti durante e dopo gli incontri in aula.

2. Geometria origami e inquadramento storico

Alle origini della geometria origami vi è l'opera *Geometric Exercises in Paper Folding*, pubblicata a Madras, in India, nel 1893 da Tandalam Sundara Row. Il volume, destinato all'insegnamento della geometria nelle scuole e nei college mediante un approccio innovativo, consiste in una raccolta di costruzioni di geometria piana euclidea in cui l'utilizzo della riga e del compasso viene soppiantato dall'uso di fogli di carta, su cui è possibile agire soltanto mediante una successione di piegature (Borgato & Salmi, 2018). In analogia con quanto avviene nella geometria euclidea elementare, anche nella geometria origami ogni costruzione può essere descritta come una successione di ripiegamenti basilari. Sundara Row, nella sua opera, utilizza cinque piegature fondamentali, anche se queste non vengono mai esplicitamente elencate. Le cinque piegature (Figura 1) equivalgono, rispettivamente, alla possibilità di: tracciare una retta per due punti A e B; individuare l'asse di un segmento AB; rappresentare la bisettrice di un angolo individuato da due rette r e s; tracciare la perpendicolare ad una retta r per un punto dato A e infine, mediante la piega passante per A che porta un punto B su una retta r, ricercare le eventuali intersezioni della retta r con la circonferenza di centro A e raggio AB[1].

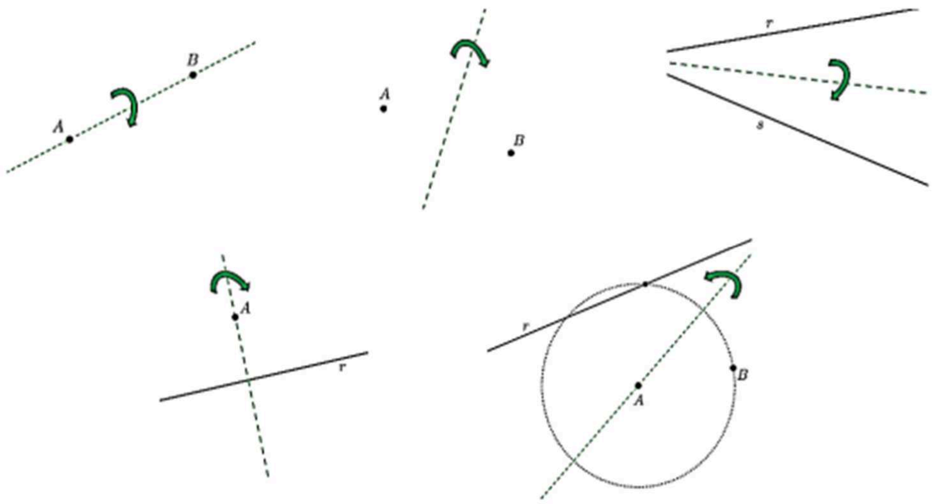

Figura 1 – Le cinque piegature fondamentali di Sundara Row (Borgato & Salmi, 2018, p. 59)

[1] Nonostante nella geometria origami non sia possibile tracciare con continuità delle circonferenze, esiste questa quinta operazione che funge da compasso.

L’opera di Sundara Row ebbe una certa diffusione anche in Europa, soprattutto grazie al matematico Felix Klein, che citando l’autore nelle sue celebri lezioni di geometria elementare (*Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Berlino, 1897) in merito alla possibilità di costruire per punti alcune curve algebriche in modo alternativo, attirò l’attenzione dei matematici occidentali verso questa nuova geometria. Fu però Margherita Beloch a dare una svolta cruciale alla storia della geometria origami mediante una nota sugli *Atti dell’Accademia delle Scienze di Ferrara* del 1934, in cui si ripropose di mostrare la superiorità dei metodi origami rispetto a quelli tradizionali con riga e compasso. Nel proporre metodi alternativi per la risoluzione di equazioni di terzo grado, l’autrice utilizza, oltre alle cinque piegature basilari di Sundara Row, anche una sesta piegatura (la cosidetta *piegatura Beloch*) che consiste nel portare simultaneamente due punti dati su due rette assegnate; a differenza delle precedenti, questa piegatura non può essere riprodotta con il solo uso di riga e compasso. L'esigenza di dare una sistemazione assiomatica a questa nuova geometria non fu avvertita fino al 1989, quando Humiaki Huzita e Benedetto Scimemi enunciarono i sei assiomi della geometria origami, che corrispondevano alle sei piegature basilari note, durante il "First International Meeting of Origami Science and Technology" tenuto a Ferrara, in Italia. Un settimo assioma fu aggiunto nel 2001 da Koshiro Hatori, ripreso da una lista di assiomi presentata da Jacques Justin nel 1989, ma rimasta inosservata fino a quel momento. Questo settimo assioma non estende il numero di piegature ottenibili via origami, ma non essendo un’operazione equivalente a nessuno dei sei assiomi precedenti, diventa parte integrante del sistema (Borgato & Salmi, 2018). Si riportano nel seguito i sette assiomi della geometria origami (Alperin & Lang, 2009):

1) Dati due punti P_1P_1 e P_2P_2, è possibile individuare la piega che passa per entrambi.
2) Dati due punti P_1P_1 e P_2P_2, individuare una piega che porta P_1P_1 su P_2P_2.
3) Date due rette l_1l_1 e l_2l_2, è possibile individuare la piega che porta l_1l_1 su l_2l_2.
4) Dato un punto P_1P_1 e una retta l_1l_1, è possibile individuare una piega perpendicolare a l_1l_1 che passa per il punto P_1P_1.
5) Dati due punti P_1P_1 e P_2P_2 e una retta l_1l_1, è possibile individuare una piega che porta P_1P_1 su l_1l_1 e passa per il punto P_2P_2.
6) Dati due punti P_1P_1 e P_2P_2 e due rette l_1l_1 e l_2l_2, è possibile individuare una piega che porta P_1P_1 sulla retta l_1l_1 e P_2P_2 sulla retta l_2l_2.
7) Dato un punto PP e due rette l_1l_1 e l_2l_2, è possibile individuare una piega che porta P P sulla retta l_1l_1 ed è perpendicolare a l_2l_2.

3. Descrizione del laboratorio didattico

Il laboratorio didattico qui presentato è destinato a studenti frequentanti il primo biennio di scuola secondaria di secondo grado ed è stato progettato per essere integrato con la trattazione dei fondamenti della geometria euclidea nel piano. L'obiettivo non è solo quello di far godere gli studenti dei benefici, già elencati, che questo approccio può portare, ma è anche quello di fornire un secondo esempio di sistema assiomatico da poter confrontare con quello euclideo. Quest'ultimo aspetto può contribuire a rendere più chiara la visione delle caratteristiche di un approccio assiomatico (postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione), come richiesto dalle *Indicazioni Nazionali per licei* del 2010, mettendo in evidenza cosa significa stabilire i criteri di esistenza e la costruibilità di oggetti matematici.

Le metodologie principali adottate sono il *learning by doing*[2], il *problem based learning*[3] e il *collaborative learning*[4]. Ogni lezione prevede attività di problem solving collaborativo, alternate a discussioni collettive guidate dal docente con lo scopo di formalizzare i contenuti oggetto dell'incontro e di svolgere una riflessione metacognitiva sulle diverse strategie risolutive attuate dai singoli gruppi. Inoltre si prevede l'utilizzo di fonti storiche originali[5], in particolare l'opera *Geometric Exercises in Paper Folding* di Sundara Row (1917). L'opera originale è scritta in lingua inglese, arricchendo così il percorso proposto di possibili collegamenti interdisciplinari.

Non sono necessari strumenti particolari per la realizzazione di questo laboratorio, sono sufficienti fogli di carta bianchi di qualsiasi formato e materiale di cancelleria.

Il percorso didattico è costituito di sei lezioni della durata di un'ora, così scansionate:

I. Gli assiomi della geometria origami: primo approccio.
II. I punti notevoli di un triangolo.
III. Il triangolo isoscele e il triangolo equilatero.
IV. Alcuni teoremi sui triangoli.
V. I quadrilateri.
VI. Gli ultimi tre assiomi della geometria origami.

Durante la prima lezione (Gli assiomi della geometria origami), dopo una breve introduzione durante la quale verrà esplicitato come nella geometria origami l'uso della riga e del compasso venga completamente sostituito dalla piegatura della carta e, in analogia a quanto avviene nella geometria elementare euclidea, ogni costruzione può essere descritta come una successione di ripiegamenti basilari, si proporrà un'attività di problem solving collaborativo guidata dalle indicazioni che seguono.

[2] Il learning by doing è una metodologia di apprendimento attivo nel quale gli studenti, partendo da un'esperienza pratica associata ad un processo di riflessione, comprendono e interiorizzano le azioni svolte, acquisendone piena consapevolezza e raggiungendo un apprendimento più efficace e duraturo (Dale, 1969).

[3] Il problem based learning è un metodo di apprendimento attivo nel quale gli studenti, guidati da un facilitatore, affrontano problemi, spesso inseriti in contesti reali, con l'obiettivo di acquisire o consolidare nuove conoscenze, oltre che sviluppare competenze disciplinari e trasversali (Barrows & Tamblyn, 1980).

[4] Il collaborative learning è un metodo di apprendimento attivo nel quale gli studenti lavorano insieme in piccoli gruppi per raggiungere obiettivi comuni come comprendere contenuti, elaborare significati, risolvere problemi, realizzare prodotti, ecc. (Godsell et al., 1992).,

[5] L'uso di fonti storiche originali nella didattica, viste come strumento di ricerca-scoperta e non come manuale da cui memorizzare contenuti, è un approccio legato all'apprendimento attivo (Brusa, 1991) e può condurre a una comprensione più profonda dei concetti matematici e del processo evolutivo delle idee matematiche (Jahnke et al., 2002).

1) *Disegna due punti su un foglio, A e B. Determina una retta r, mediante la piegatura della carta, che passi per A e B.*

2) *Individua, mediante la piegatura della carta, l'asse del segmento AB (e quindi il punto medio del segmento AB).*

3) *Individua due rette incidenti (con punto di incidenza interno al foglio di carta), determinando un angolo. Trova, mediante la piegatura della carta, la bisettrice dell'angolo.*

4) *Disegna un punto C esterno a una retta r. Individua, mediante la piegatura della carta, una retta perpendicolare alla retta r e passante per C.*

5) *Disegna due punti A e B, e una retta r. Determina la piega passante per A che porti il punto B sulla retta r.*

Al termine dell'attività, durante la discussione collettiva, si ascolteranno le strategie risolutive individuate dai singoli gruppi, promuovendo il confronto e la riflessione sui processi attuati. Una volta individuate le soluzioni più efficaci ed efficienti si procederà con una breve introduzione dell'origine storica della geometria origami, con particolare riferimento a Sundara Row e alla sua opera. Lo scopo è quello di evidenziare come le cinque piegature basilari utilizzate dall'autore siano esattamente quelle individuate dalle soluzioni dei problemi appena affrontati. Si procederà poi con la presentazione del sistema assiomatico completo composto dai sette assiomi, arricchita da cenni storici, e con il confronto tra questi ultimi e gli assiomi della geometria euclidea. La lezione potrà concludersi con l'assegnazione di alcuni compiti per casa per consolidare le conoscenze acquisite, anche mediante test a risposta aperta e/o chiusa.

Nella seconda lezione (I punti notevoli di un triangolo) si continueranno a sfruttare strategie di collaborative learning per risolvere i problemi elencati nel seguito. Prima di ciò si chiederà ai singoli gruppi di disegnare tre triangoli scaleni acutangoli congruenti su tre fogli distinti e di utilizzarne uno diverso per ognuna delle seguenti richieste.

1) Dopo aver individuato le tre altezze del triangolo con il metodo della piegatura della carta, osserva come queste si incontrano in un unico punto, l'ortocentro del triangolo.

2) Dopo aver individuato i tre assi del triangolo con il metodo della piegatura della carta, osserva come queste si incontrano in un unico punto, il circocentro del triangolo.

3) Dopo aver individuato le tre mediane del triangolo con il metodo della piegatura della carta, osserva come queste si incontrano in un unico punto, il baricentro del triangolo[6].

A seguito di una discussione collettiva, utile a formalizzare i contenuti dell'attività e i processi attuati, si chiederà di sovrapporre i tre triangoli e, ponendoli su un quarto foglio bianco, forare in corrispondenza dell'ortocentro, del circocentro e del baricentro, procedendo poi con alcune osservazioni sulla loro posizione. L'obiettivo è, naturalmente, quello di mostrare come i tre punti notevoli si trovino allineati su di una stessa retta, la retta di Eulero, che sarà successivamente

[6] Le tre consegne non possono essere considerate veri e propri problemi in quanto viene esplicitato nel testo il risultato finale dell'operazione. Tale scelta è dipesa dal fatto che i punti notevoli di un triangolo sono stati studiati con il docente della classe in precedenza. Si ricorda, infatti, che il presente percorso è stato progettato per essere integrato con la trattazione dei fondamenti della geometria euclidea nel piano. Un'opzione alternativa potrebbe essere quella di anticipare la lezione descritta con l'obiettivo di rendere le tre consegne dei veri e propri problemi, lasciando gli studenti liberi di giungere a tali conclusioni.

introdotta in modo formale. La lezione potrà essere prolungata anche al di fuori dell'aula attraverso i compiti assegnati per casa. Si chiederà agli studenti di svolgere nuovamente l'attività utilizzando il disegno di un triangolo scaleno ottusangolo, invece che acutangolo, facendo prendere nota delle caratteristiche che accomunano, o fanno differire, la posizione dei punti notevoli nelle due tipologie di triangoli presi in considerazione.

La terza lezione (Il triangolo isoscele e il triangolo equilatero) è strettamente legata alla precedente. Si continuerà infatti l'attività di problem solving collaborativo con le richieste riportate nel seguito, dopo aver chiesto ai singoli gruppi di disegnare un triangolo scaleno acutangolo congruente a quello della lezione precedente.

1) Dopo aver individuato le tre bisettrici del triangolo con il metodo della piegatura della carta, osserva come queste si incontrano in un unico punto, l'incentro del triangolo.

2) Sovrapponi il triangolo con gli altri tre triangoli ad esso congruenti realizzati durante la lezione precedente e ponili su di un foglio bianco. Fai un foro in corrispondenza dell'ortocentro, del circocentro, del baricentro e dell'incentro. Togli i quattro fogli ed osserva i quattro fori (che corrispondono ai quattro punti notevoli del triangolo). Cosa puoi dire sulla loro posizione?

Dopo aver fatto osservare come l'incentro non si posizioni sulla retta di Eulero, si passerà ad una nuova attività, lasciando una domanda aperta: *esistono triangoli per cui i quattro punti notevoli risultano tutti allineati?* Gli studenti troveranno risposta, ossia che ciò accade in un triangolo isoscele, grazie al compito che verrà assegnato per casa. Il lavoro in classe proseguirà con la richiesta di determinare mediante la piegatura della carta, senza l'aiuto della riga graduata, prima un triangolo isoscele e successivamente un triangolo equilatero, riflettendo in particolar modo sulle proprietà dei triangoli che sono state utilizzate durante la costruzione. Durante la discussione collettiva si formalizzeranno i contenuti oggetto dell'incontro, si rifletterà sulle strategie risolutive attuate in relazione alle proprietà del triangolo isoscele e del triangolo equilatero e, se non già emerso, si proporrà la costruzione di Sundara Row, fornendo anche l'estratto della fonte storica originale (Figura 2). La lezione potrà essere prolungata anche al di fuori dell'aula attraverso i compiti assegnati per casa. Si chiederà agli studenti di svolgere nuovamente l'attività di individuazione delle posizioni dei quattro punti notevoli di un triangolo utilizzando il disegno di un triangolo isoscele o di un triangolo equilatero, con l'obiettivo di confrontare i risultati ottenuti durante l'incontro successivo.

L'utilizzo della fonte storica originale diventa elemento essenziale della quarta lezione (Alcuni teoremi sui triangoli). Si chiederà infatti ai gruppi di seguire le istruzioni date da Sundara Row nel suo libro per verificare il noto teorema degli angoli interni di un triangolo, riportato in Figura 3. Durante la discussione collettiva si potrà verificare la correttezza delle costruzioni realizzate dagli studenti, ma soprattutto riflettere sulle ragioni che rendono quest'ultima una dimostrazione. Sarà opportuno inoltre analizzare la differenza di una dimostrazione nella geometria euclidea e nella geometria origami. La lezione si potrà concludere con l'assegnazione dei compiti a casa, proponendo un'attività simile a quella svolta in classe su di un'altra proposizione presente nell'opera.

22. Now take this square piece of paper (Fig. 9), and fold it double, laying two opposite edges one upon the other. We obtain a crease which passes through

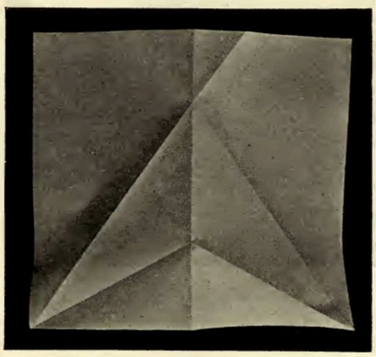

Fig. 9.

the mid-points of the remaining sides and is at right angles to those sides. Take any point on this line, fold through it and the two corners of the square which are on each side of it. We thus get isosceles triangles standing on a side of the square.

25. If we so take the point on the middle line, that

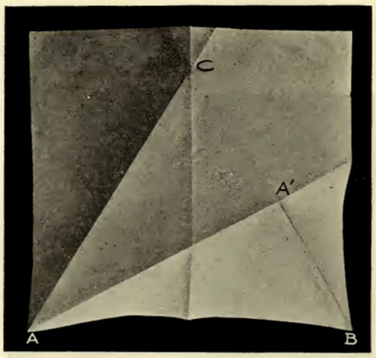

Fig. 10.

its distances from two corners of the square are equal to a side of it, we shall obtain an equilateral triangle (Fig. 10). This point is easily determined by turning the base AB through one end of it, over AA', until the other end, B, rests upon the middle line, as at C.

Figura 2 – Costruzione di un triangolo isoscele (Sundara Row, 1917, p. 9) e costruzione di un triangolo equilatero (Sundara Row, 1917, p. 10)

167. The property that the three interior angles of a triangle are together equal to two right angles is illustrated as follows by paper folding.

Fold CC' perpendicular to AB. Bisect $C'B$ in N, and AC' in M. Fold NA', MB' perpendicular to AB, meeting BC and AC in A' and B'. Draw $A'C'$, $B'C'$.

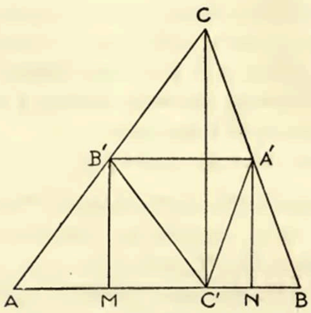

Fig. 57.

By folding the corners on NA', MB' and $A'B'$, we find that the angles A, B, C of the triangle are equal to the angles $B'C'A$, $BC'A'$, and $A'C'B'$ respectively, which together make up two right angles.

Figura 3 – Teorema degli angoli interni di un triangolo (Sundara Row, 1917, p. 90).

La quinta lezione (I quadrilateri) consiste in un momento di riflessione su alcune proprietà dei quadrilateri notevoli. Si chiederà ai gruppi di realizzare attraverso la piegatura della carta, riflettendo di volta in volta sulle proprietà che vengono sfruttate, i seguenti quadrilateri: rettangolo, quadrato, deltoide, rombo, trapezio scaleno e parallelogramma. Durante la discussione collettiva si evidenzieranno le diverse proprietà utilizzate dai gruppi per costruire ogni quadrilatero. La lezione potrà proseguire al di fuori dell'aula attraverso i compiti per casa, nei quali verrà richiesto di costruire un trapezio isoscele e un trapezio rettangolo, individuando le caratteristiche che differenziano i due trapezi da quello scaleno già realizzato.

La sesta e ultima lezione (Gli ultimi tre assiomi) consiste in una lezione dialogata. Si comincerà con la seguente domanda: *Osserva i sette assiomi della geometria origami, quali di essi pensi di aver utilizzato durante le lezioni precedenti?* L'obiettivo è di mettere in risalto il fatto che gli ultimi tre assiomi non sono mai stati utilizzati. Si dedicherà dunque il resto dell'incontro all'approfondimento di questi. Partendo dal quinto assioma si mostrerà come sia possibile rappresentare una circonferenza per punti: ripetere la quinta piegatura (Figura 1), mantenendo fissati i punti A e B e variando la posizione della retta r, consente di individuare diversi punti della circonferenza di centro A e raggio AB. Gli studenti parteciperanno attivamente realizzando tale costruzione. Si proseguirà poi con il sesto assioma, che corrisponde alla piegatura Beloch. Anche in questo caso gli studenti parteciperanno attivamente, sperimentando l'efficacia di tale piegatura nella risoluzione guidata di un problema che non può essere risolto con riga e compasso: la trisezione di un angolo (Figura 4). Infine si concluderà con una riflessione sul settimo assioma, mettendo in evidenza come questo non estenda il numero delle costruzioni possibili via origami, ma essendo indipendente dai sei assiomi precedenti, debba essere considerato a tutti gli effetti parte del sistema assiomatico considerato.

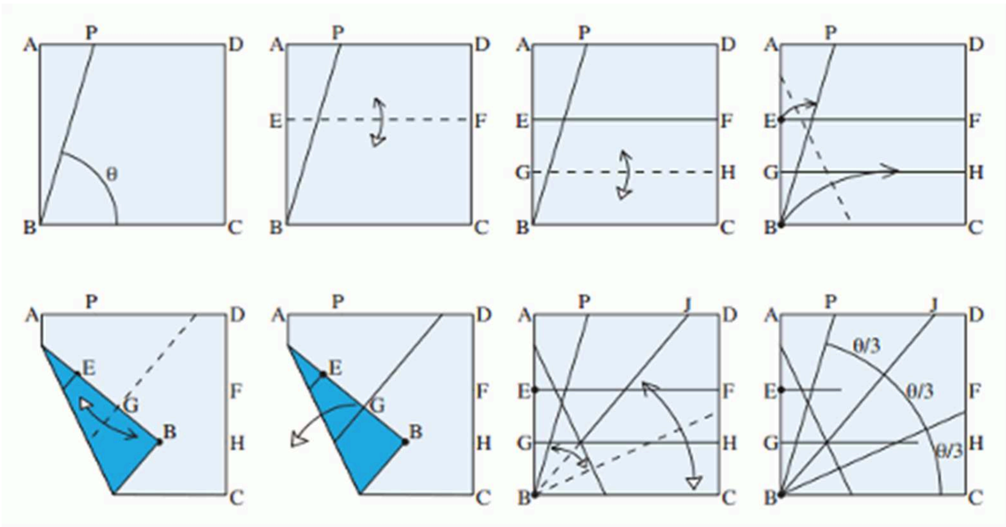

Figura 4 – Istruzioni per la trisezione di un angolo
(https://dropseaofulaula.blogspot.com/2015/04/trisecare-con-gli-origami.html)

4. Contesto e metodologia

La sperimentazione è stata attuata in due classi prime di liceo scientifico, frequentate complessivamente da 53 studenti, e in una classe di liceo delle scienze umane, frequentata da 24 studenti, per un totale di 77 partecipanti. La sua realizzazione è avvenuta sotto forma di progetto del Piano Lauree Scientifiche dell'a.s. 2021/22 del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Ferrara. Le lezioni sono state condotte dal ricercatore, sempre affiancato dal docente della classe, secondo la modalità a distanza per le classi del liceo scientifico[7] e in presenza per la classe di liceo delle scienze umane. Gli incontri sono stati fissati in modo tale che fosse possibile coordinare la trattazione dei fondamenti della geometria euclidea e della geometria origami, così che lo studio di queste procedesse in parallelo. Nelle due classi di liceo scientifico sono state svolte tutte le sei lezioni previste, per una durata complessiva della sperimentazione di sei ore, mentre nella classe del liceo delle scienze umane gli incontri sono stati ridotti a cinque, eliminando l'attività dedicata ai quadrilateri. Le esperienze svolte in aula hanno seguito il percorso e le indicazioni esplicitate nella descrizione del laboratorio didattico del paragrafo precedente.

A conclusione del primo incontro e al termine della sperimentazione, agli studenti sono stati sottoposti due questionari di gradimento a risposta aperta mediante un form on-line. Il Questionario 1 aveva l'obiettivo di indagare le prime impressioni degli studenti sull'esperienza didattica appena vissuta, mentre il Questionario 2 mirava a investigare le loro percezioni sull'esperienza didattica compiuta nel suo complesso. La scelta delle domande poste all'interno dei questionari non è guidata da ipotesi di ricerca a priori in quanto, come anticipato, la sperimentazione realizzata rappresenta una prima indagine esplorativa. Il Questionario n.1 è stato assegnato al termine del primo incontro ed è costituito dalle seguenti domande aperte:

1) *Durante la prima lezione abbiamo analizzato un secondo esempio di sistema assiomatico diverso da quello euclideo che già conoscevi. È stato utile vedere questo secondo esempio? Motiva la tua risposta.*
2) *Durante la prima lezione abbiamo visto come costruire l'asse di un segmento, la bisettrice, ecc., con la piegatura della carta. Ti è sembrato più facile o più difficile approcciarsi a tali costruzioni con tale metodo rispetto a quello della riga e del compasso? Motiva la tua risposta*
3) *Quali differenze hai riscontrato nel costruire l'asse di un segmento, la bisettrice, ecc., con la piegatura della carta invece che con riga e compasso?*

Il Questionario n.2 è stato assegnato al termine del ciclo completo di lezioni e contiene le seguenti domande aperte:

1) *Quali aspetti del laboratorio ti sono piaciuti e perché?*
2) *Quali aspetti del laboratorio non ti sono piaciuti e perché?*

[7] Gli incontri con le due classi di liceo scientifico si sono svolti a distanza, tranne l'ultimo che è potuto tenersi in presenza, per via delle restrizioni imposte dalla scuola legate alla situazione epidemiologica di Covid-19.

3) Hai trovato utile il laboratorio per comprendere meglio i concetti matematici affrontati? Motiva la tua risposta.

4) Come ti sei sentito durante lo svolgimento del laboratorio?

5) Cosa ne pensi dell'utilizzo di parti di opere storiche originali? Approfondisci.

5. Osservazioni didattiche

Nel seguito si riporteranno dapprima le difficoltà riscontrate con maggior frequenza durante la sperimentazione e in secondo luogo gli episodi più significativi da un punto di vista didattico.

La prima difficoltà incontrata è consistita nella realizzazione della piegatura della carta: gli studenti hanno dimostrato scarse abilità manuali, così, anche quando era presente un'idea chiara dell'azione da svolgere, questa non sempre riusciva ad essere attuata correttamente.

Il secondo problema è stato l'utilizzo dei bordi del foglio A4 per l'individuazione di rette perpendicolari e parallele durante le costruzioni. Gli studenti, infatti, erano stati invitati fin dal primo incontro a non utilizzare questo *escamotage* per risolvere i problemi, ciò nonostante sono state numerosissime le costruzioni proposte che sfruttavano questa caratteristica del foglio. In alcuni casi i gruppi dichiaravano di aver "infranto le regole" per riuscire a proporre una soluzione al problema, che altrimenti non sarebbero stati in grado di portare a termine, altre volte invece vi era una totale assenza di consapevolezza. Per evidenziare questo fatto, il ricercatore ha dovuto guidare a ritroso gli studenti nella loro costruzione fino al momento in cui, quasi inconsapevolmente, la perpendicolarità dei due bordi adiacenti del foglio veniva utilizzata. Nonostante gli studenti conoscessero la costruzione per individuare due rette perpendicolari generiche mediante la piegatura della carta, la tendenza ad utilizzare i bordi del foglio come strumento era spontaneo e inconsapevole. Per ovviare a questo problema, in previsione di sperimentazioni future, si potrebbero fornire alla classe fogli di carta dai bordi irregolari[8], per non dare agli studenti la possibilità di cedere all'automatismo di utilizzare i bordi regolari e perpendicolari tra loro.

Come conseguenza di questa tendenza, durante gli incontri ci sono stati diversi episodi in cui alcuni gruppi proponevano soluzioni particolari, e non generali, ad uno dei problemi. Un esempio può essere quello dello studente che ha proposto la costruzione di un deltoide come mostrato in Figura 5.

[8] Una delle prime costruzioni che Sundara Row (1917) propone nella sua opera è quella che permette di individuare un rettangolo a partire da un foglio di carta dai bordi irregolari, che può poi essere utilizzato per realizzare costruzioni più complesse.

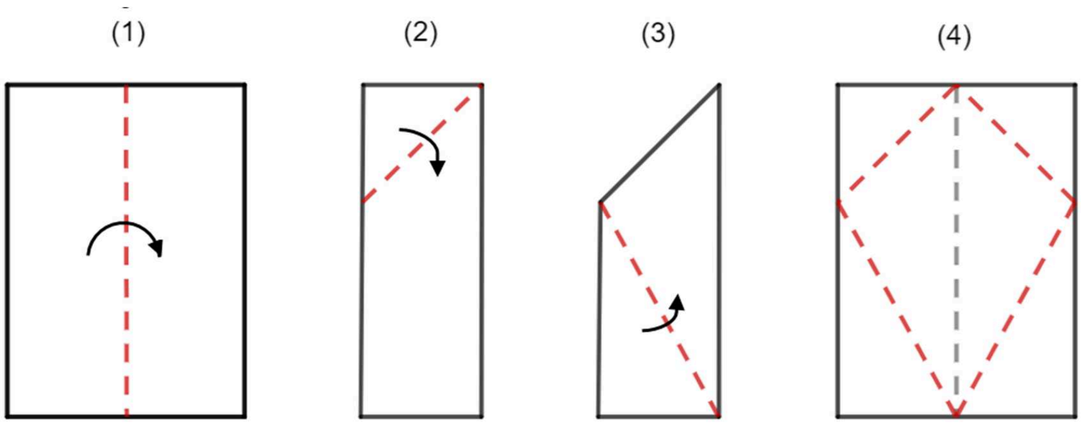

Figura 5 – Schema in quattro passaggi per la costruzione di un deltoide mediante piegatura della carta proposta da uno studente

Dopo aver piegato il foglio A4 a metà per lungo, sovrapponendone i lati maggiori (1), ha portato uno dei lati inferiori a sovrapporsi con uno di quelli maggiori, generando un angolo di 45° (2), il punto così individuato sul lato maggiore è stato unito mediante un'ultima piega con il vertice opposto (3), ottenendo, una volta riaperto il foglio, un deltoide particolare con un angolo di 90° (4).

Si conclude questa esposizione trattando il tema dell'argomentazione. Durante la discussione collettiva i gruppi erano invitati a mostrare le costruzioni realizzate e ad esporre i passaggi attuati, motivando questi ultimi ai fini della risoluzione del problema corrispondente. L'attività ha messo in evidenza le scarse competenze argomentative degli studenti che, in alcuni casi, restavano in silenzio anche dopo essersi proposti volontariamente per la presentazione della costruzione realizzata. La difficoltà consisteva soprattutto nell'organizzazione logica dei passaggi attuati e nella sua espressione. È stato così rilevato un problema noto in letteratura, quello dell'argomentazione, portando in primo piano l'importanza di svolgere con maggior frequenza attività che prevedono l'impiego di queste competenze, con l'obiettivo di svilupparle (Di Martino, 2017).

Durante gli incontri è stato possibile svolgere alcune osservazioni didatticamente rilevanti, alcune delle quali vengono esposte nel seguito.

Un esempio si collega all'ultima difficoltà evidenziata sulle competenze argomentative degli studenti. Si sono presentati diversi episodi in cui il porta voce del gruppo, trovandosi in difficoltà nel descrivere i passaggi attuati durante la costruzione, ha chiesto il permesso di ripercorrere quest'ultima manipolando nuovamente il foglio di carta, piega dopo piega, riuscendo così a portare a termine l'esposizione orale. Sembra dunque che la manipolazione del prodotto realizzato, ripercorrendo le azioni precedentemente attuate, abbia supportato anche il processo argomentativo. Questi episodi fanno pensare al concetto di rappresentazione esecutiva[9] di Bruner, ossia una modalità di elaborazione delle informazioni che pervengono al soggetto dall'ambiente esterno e che vengono meglio descritte da sequenze di gesti piuttosto che dalle parole. Le rappresentazioni esecutive si originano dalle azioni fisiche e dai feedback di tipo sensoriale che accompagnano tali azioni, e sono le prime tipologie di rappresentazione che si sviluppano quando uno studente utilizza un approccio di learning by doing durante un processo di apprendimento. L'osservazione fatta mette ulteriormente in rilievo l'importanza di stimolare gli studenti ad argomentare, per indurli ad attuare quel processo di riflessione sull'azione svolta, necessario per non ottenere come unico risultato l'acquisizione mnemonica di gesti e procedure.

Un secondo esempio si collega alla tendenza degli studenti ad utilizzare i bordi del foglio come strumento per individuare rette perpendicolari e parallele, ottenendo di conseguenza soluzioni particolari ai problemi invece che soluzioni generiche. Si propone il caso di uno studente che ha realizzato la seguente costruzione per individuare un rombo sfruttando la proprietà di perpendicolarità delle sue diagonali. Con riferimento alla Figura 6, dopo aver individuato un quadrato a partire dalla sua diagonale e approfittando dei bordi del foglio (1), l'alunno traccia le due diagonali di quest'ultimo (2) e poi, per determinare i lati congruenti del rombo, porta i vertici del quadrato sul centro dello stesso (3).

Questo episodio risulta essere particolarmente interessante in quanto il rombo individuato dallo studente, avendo i quattro angoli retti, è in particolare anche un quadrato, ma non viene riconosciuto come tale. Infatti, quando allo studente è stato chiesto se il rombo da lui proposto potesse essere considerato anche un quadrato, quest'ultimo ha risposto negativamente, dando la seguente motivazione (si fa riferimento alla Figura 7): "Potrebbe essere un quadrato se fosse messo così (2), ma visto che è messo così (1) non può esserlo, è solo un rombo".

Per essere considerato un quadrato, quindi, il quadrilatero dovrebbe avere avuto necessariamente i lati paralleli ai bordi del foglio, e non obliqui. Questo intervento ha messo in evidenza una misconcezione[10] ricorrente in geometria: fornire agli studenti esclusivamente e ripetutamente rappresentazioni convenzionali induce, in alcuni casi, ad attribuire agli enti geometrici determinate proprietà che non gli appartengono (Sbaragli, 2006). Un esempio è, per l'appunto, la condizione secondo cui un quadrato debba avere necessariamente i lati paralleli ai bordi del foglio.

[9] Oltre alle rappresentazioni esecutive, Bruner et al. (1966) individuano altre due modalità di rappresentazione, quella iconica, che avviene in forma di immagini che conservano alcune delle configurazioni rappresentative dell'oggetto, e quelle simboliche che si basano sul linguaggio ed altre basi astratte. Bruner riprende il punto di vista di Vygotskij per spiegare lo sviluppo mentale di un soggetto, sostenendo che i processi mentali hanno un fondamento sociale e che la cognizione umana è influenzata dalla cultura attraverso vari fattori, tra cui simboli, artefatti e convenzioni.

[10] Una misconcezione è un concetto errato che, però, non va considerato come un evento da evitare del tutto e assolutamente negativo: può capitare che durante la costruzione di un concetto si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione (D'Amore, 1999).

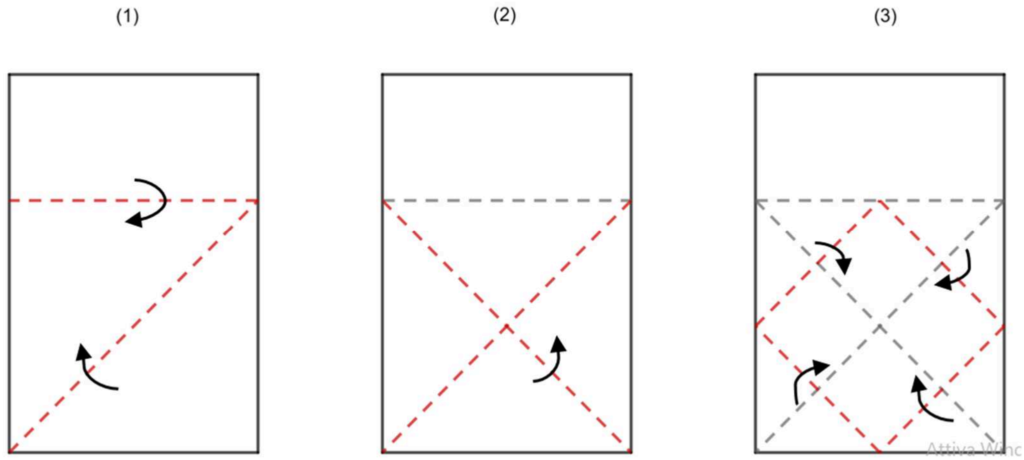

Figura 6 – Schema in tre passaggi per la costruzione di un rombo mediante piegatura della carta proposta da uno studente.

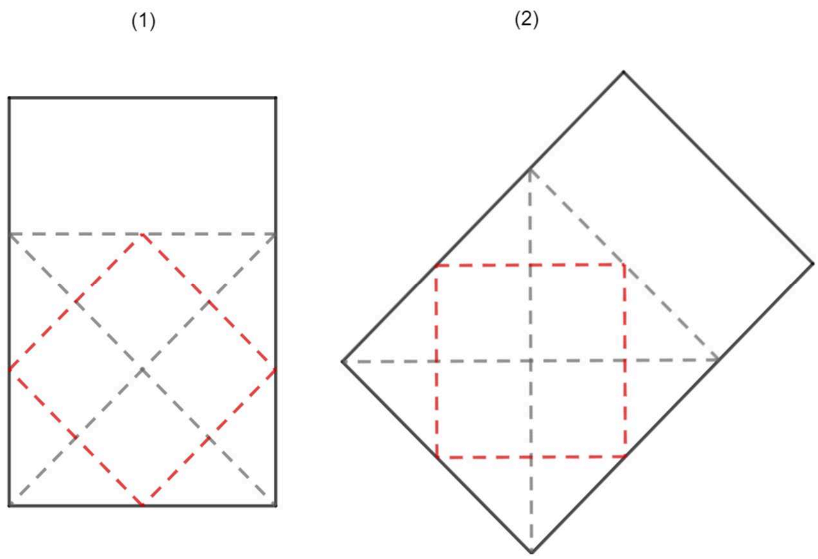

Figura 7 – Posizioni del foglio mostrate dallo studente.

L'utilizzo della geometria origami si è rivelato inoltre estremamente utile per concretizzare la definizione di congruenza, che di rado viene applicata direttamente in esercizi e problemi. Di solito, infatti, risulta essere più efficace il riferimento a criteri di congruenza e ad altri teoremi. La definizione di congruenza tra figure, che è stata data in classe durante la trattazione dei fondamenti della geometria euclidea, è la seguente: "Due figure sono congruenti se sono sovrapponibili punto a punto l'una all'altra mediante un movimento rigido". Frequentemente, durante la sperimentazione, si è assistito all'applicazione di questa definizione. In particolare, durante l'esposizione dei portavoce al termine della prima lezione relativamente alle costruzioni dell'asse di un segmento e della bisettrice. Gli studenti, infatti, per argomentare le scelte fatte durante l'esecuzione di queste costruzioni, tendevano ad utilizzare, rispettivamente, frasi del tipo "le due parti del segmento sono congruenti perché li ho fatti sovrapporre" o "i due angoli sono sovrapposti, quindi sono congruenti".

6. Analisi dei questionari

Al termine della prima lezione, agli studenti è stato chiesto di compilare on-line il Questionario n. 1 per indagare quali fossero le loro prime impressioni a seguito del nuovo approccio. Sono stati 66 gli studenti che hanno inviato le loro risposte, distribuendosi come segue.

La Tabella 1 riporta le risposte date alla prima domanda, relativa all'eventuale utilità di studiare il sistema assiomatico della geometria origami come un secondo esempio di sistema assiomatico oltre a quello euclideo. I dati mostrano come la maggior parte degli studenti abbia dato un riscontro positivo. Mentre per le risposte negative non è stato possibile individuare specifiche ragioni che giustifichino tale giudizio, chi si è espresso positivamente ha argomentato facendo riferimento per lo più ad una delle seguenti ragioni: aver visto la geometria da un nuovo punto di vista; aver acquisito nuove conoscenze; aver compreso con maggior facilità i contenuti; essere venuto a contatto con un approccio diverso e interessante, descritto come "pratico".

Risposta	Sì	No	Non data
n. studenti (percentuale del campione)	57 (86%)	5 (8%)	4 (6%)

Tabella 1 – Risposte alla domanda 1 del Questionario n.1

Nella Tabella 2 sono inserite le risposte date alla seconda domanda, la quale chiede se le costruzioni realizzate a lezione con la piegatura della carta risultassero essere più facili o più difficili rispetto a quelle realizzate con riga e compasso. I dati mostrano come le opinioni degli studenti si distribuiscano equamente tra le due opzioni. Chi ha dichiarato che le costruzioni mediante la piegatura della carta sono più semplici si giustifica descrivendo tale approccio come più intuitivo e immediato, anche per via del minor numero di strumenti da dover utilizzare. Chi ha espresso, invece, una maggior difficoltà deve tale percezione a diversi aspetti, come alla minor abitudine ad utilizzare tecniche origami; ai problemi di manipolazione della carta che rende la costruzione meno precisa; all'impossibilità di "cancellare" una piega e al divieto di utilizzare strumenti; non potendo prendere così le misure che vengono ritenute necessarie.

Risposta	Più facile	Ugualmente facili	A volte facile a volte difficile	Più difficile	Non data
n. studenti (percentuale del campione)	28 (42%)	3 (5%)	4 (6%)	29 (44%)	2 (3%)

Tabella 2 - Risposte alla domanda 2 del Questionario n.1

Le risposte date alla terza domanda, che indaga le differenze riscontrate nel realizzare le costruzioni con la piegatura della carta invece che con riga e compasso, sono difficilmente riassumibili in tabelle. Si riportano a titolo esemplificativo alcune delle risposte:

1) "Come detto nella risposta precedente, con riga e compasso potevamo appunto essere aiutati da strumenti esterni. Invece per quanto riguarda il foglio di carta potevamo solo piegarlo."

2) "Principalmente una differenza di strumenti, con la piegatura della carta si utilizzano solo le proprie mani e una matita per i punti. Un'altra differenza riscontrata è che nel metodo della piegatura, inizialmente, bisogna ragionare di più, poi però trovando il sistema giusto si riescono ad ottenere delle costruzioni abbastanza velocemente. Il metodo della riga e del compasso lo trovo un po' più lungo, ma con meno ragionamento inziale."

Alcuni studenti hanno rielaborato le opinioni espresse nelle risposte antecedenti, non aggiungendo nuove informazioni rispetto a quelle già fornite (come nell'esempio n. 1); molti altri, invece, hanno evidenziato una differenza sostanziale che non era emersa in precedenza (come nell'esempio 2) . Sembra infatti che con riga e compasso alcune costruzioni vengano svolte mediante passaggi che sono diventati ormai automatismi e su cui non è necessario riflettere; con la tecnica origami, invece, è essenziale ragionare su ogni passaggio, comprendendolo a fondo. Sebbene questo implichi un maggior dispendio di tempo, al quale si vanno ad aggiungere le difficoltà tecniche già espresse nelle risposte antecedenti, l'uso degli origami stimola il pensiero critico e risulta essere più efficacie.

Al termine dell'intero ciclo di incontri, agli studenti è stato chiesto di compilare il Questionario n. 2 per indagare quali fossero le loro percezioni sull'esperienza svolta nel complesso. Sono stati 55 gli studenti che hanno inviato le loro risposte, distribuendosi come segue.

La prima domanda chiede di esporre gli aspetti del laboratorio maggiormente apprezzati esplicitandone le ragioni. Anche se nella maggior parte delle risposte raccolte non è stato esplicitato il nesso di causa-effetto come richiesto, si è proceduto con l'analisi dei dati raccolti, esaminando gli aspetti giudicati positivamente dalla maggior parte degli studenti. Il coinvolgimento di abilità manuali e creative, caratteristica dalla geometria origami, è la ragione che compare con la frequenza più alta tra le risposte, è presente infatti in 19 di esse (il 35%). Ciò sembra collegarsi anche al fatto che le attività proposte, definite "pratiche", permettano agli studenti di essere più coinvolti nelle lezioni, diminuendo la percezione di noia, come espresso da 6 studenti (l'11%). Il riferimento sembra essere, rispettivamente, alla metodologia del learning by doing e alle strategie di active learning in generale. Oltre al learning by doing, tra le strategie di active learning utilizzate, si trovano rifermenti anche al collaborative learning e al problem based learning: infatti in 12 risposte (il 22%) si riscontra un apprezzamento per i lavori di gruppo, in particolare per i risvolti legati alla socializzazione, mentre in 4 risposte (il 7%) vengono valutate positivamente le attività di problem solving. Un altro aspetto particolarmente gradito consiste nella possibilità di potersi approcciare alla geometria in una modalità nuova, sviluppando punti di vista differenti, come emerge da 14 risposte (il 25%). Per concludere l'elenco, si evidenzia come 11 studenti (il 20%) abbiano valutato positivamente il laboratorio per l'interesse e il divertimento scaturito.

La seconda domanda chiede di esporre gli aspetti del laboratorio meno apprezzati, esplicitandone le ragioni, ma anche in questo caso nella maggior parte delle risposte raccolte non è stato chiarito il nesso di causa-effetto. Si procede comunque con l'analisi dei dati raccolti, esaminando gli aspetti giudicati negativamente dalla maggior parte degli studenti. Fra le caratteristiche valutate negativamente vi è la modalità di svolgimento a distanza che è stata utilizzata per le classi del liceo scientifico, anche considerando i problemi tecnici che sono stati incontrati: 13 studenti su 43[11] (il 30%) hanno esplicitato questo disagio. Una critica è stata mossa anche nei confronti dei contenuti teorici mediati da lezioni frontali, nonostante costituissero una minima parte del laboratorio didattico, questi sono stati considerati noiosi da 5 studenti (il 9%). Inoltre, in altre 5 risposte (il 9%) si è ritenuto che alcune costruzioni mediante la piegatura della carta risultassero troppo difficili, specialmente nella fase iniziale della sperimentazione. Infine, 16 studenti (il 29%) hanno dichiarato di non aver riscontrato nessun aspetto negativo.

I risultati relativi alla terza domanda, nella quale si indaga l'utilità del laboratorio didattico per la comprensione dei concetti trattati, sono riportati in Tabella 3 ed emerge chiaramente una propensione degli studenti verso la risposta affermativa. Mentre per le risposte negative non è stato possibile individuare specifiche ragioni che giustifichino tale giudizio, chi si è espresso positivamente è entrato maggiormente nel dettaglio. Le lezioni sono state utili non solo al fine di una comprensione più profonda, specialmente dei punti notevoli di un triangolo e dell'assetto assiomatico di una teoria matematica, ma anche per rendere più efficace il processo di memorizzazione dei contenuti. Le ragioni risiedono prevalentemente nell'approccio pratico: la manipolazione di enti geometrici attraverso la piegatura della carta ha favorito la visualizzazione di concetti e procedure astratte. Più in generale, il fatto di utilizzare un approccio diverso da quello usuale, fornendo un nuovo punto di vista, è stato percepito efficace ai fini dell'apprendimento.

Risposta	Sì	A volte sì, a volte no	No
n. studenti (percentuale del campione)	44 (80%)	2 (4%)	9 (16%)

Tabella 3 – Risposte alla domanda 3 del Questionario n. 2

[11] Gli studenti appartenenti al liceo scientifico che hanno risposto al questionario sono 43 sul totale di 55.

La quarta domanda chiede di descrivere le sensazioni provate durante la sperimentazione; dagli aggettivi utilizzati nella descrizione, raccolti nella Tabella 4[12], traspare come le sensazioni positive abbiano superato nettamente quelle negative.

Risposta	Felicità	Benessere	Divertimento	Interessa-mento	Curiosità
n. studenti (percen-tuale del campione)	5 (9%)	15 (27%)	9 (16%)	12 (22%)	4 (7%)

Risposta	Coinvolgi-mento	Soddisfazione	Confusione	Noia	Indifferenza
n. studenti (percen-tuale del campione)	8 (15%)	1 (2 %)	4 (7 %)	1 (2%)	1 (2%)

Tabella 4 – Risposte alla domanda 4 del Questionario n. 2

La quinta domanda è relativa alle opinioni sulle fonti storiche originali utilizzate durante alcune delle lezioni, ma quest'ultima è stata probabilmente posta in modo inadeguato in quanto 18 studenti (il 33%) l'ha equivocata o non ne ha compreso il significato. Fatto salvo per 3 alunni (il 5%) che hanno descritto l'attività come non interessante o non rilevante, i restanti 34 (il 61%) l'hanno valutata positivamente. L'uso della fonte storica originale viene visto come momento di approfondimento utile per ampliare le proprie conoscenze, considerando nuovi punti di vista, efficace in particolare per comprendere l'origine e lo sviluppo dei concetti trattati, oltre ad essere elemento di novità che desta interesse e che fornisce maggior valore e affidabilità ai contenuti oggetto del laboratorio.

7. Conclusioni

I risultati esposti nel presente contributo consistono principalmente in alcune osservazioni didattiche, che si sono potute elaborare al termine della sperimentazione, e nell'analisi delle risposte raccolte da due questionari per indagare le percezioni degli studenti in merito al laboratorio.

Dalle osservazioni didattiche emerge come laboratori di geometria origami possano essere un'occasione per gli studenti per migliorare le proprie abilità manuali e le proprie competenze argomentative che, come si è riscontrato, sono poco sviluppate. È noto che le competenze argomentative, insieme a quelle di problem solving, sono uno degli obiettivi principali dell'educazione matematica e sono strettamente interconnesse tra di loro (Di Martino, 2017). Durante

[12] Si tenga presente che alcuni studenti hanno utilizzato più di un aggettivo nella risposta data, mentre altri non hanno espresso sensazioni ma hanno ribadito opinioni su altri aspetti del laboratorio che, esulando dalla richiesta, non sono state riportate.

le attività proposte gli studenti si sono scontrati con le loro difficoltà, dovendo argomentare i processi risolutivi individuati durante il problem solving collaborativo. Lo sforzo attuato dagli studenti è essenziale, in particolare quando vengono adottate metodologie di learning by doing: il processo di riflessione deve necessariamente affiancare l'esperienza pratica per evitare di ottenere come unico risultato la memorizzazione meccanica delle azioni svolte.

Il laboratorio proposto, oltre ad un valore legato allo sviluppo di competenze trasversali a tutte le discipline, può contribuire in modo specifico all'apprendimento in matematica. Durante gli incontri, in alcuni studenti è stata riscontrata la presenza di misconcezioni, legata in particolare alla tendenza a riconoscere determinate figure geometriche soltanto in posizioni standard (Sbaragli, 2006). L'uso di tecniche origami permette di fare esperienza con rappresentazioni non convenzionali di enti geometrici, approcciandosi ad essi attraverso le proprietà che li contraddistinguono, riducendo il rischio della comparsa di misconcezioni evitabili.

Dall'analisi dei risultati dei due questionari è possibile trarre alcune conclusioni sulle percezioni degli studenti rispetto alla sperimentazione. Questi ultimi ritengono che l'esperienza didattica svolta sia stata utile, non solo per aver fornito un punto di vista differente sui fondamenti della geometria e per aver arricchito il loro bagaglio culturale, anche dal punto di vista storico, ma pure per aver compreso più a fondo e memorizzato più facilmente i contenuti oggetto delle attività. Sembra che questo derivi da una delle principali differenze individuate durante la realizzazione di costruzioni geometriche utilizzando la piegatura della carta invece che la riga e il compasso, ossia il fatto di non poter mettere in atto degli automatismi e di dover attuare un processo di riflessione che ha favorito la comprensione più profonda.

Il progetto è stato molto apprezzato dagli studenti, in particolare per l'adozione di metodologie di active learning come il learning by doing, che gli ha permesso di sentirsi coinvolti durante le lezioni, il collaborative learning, che gli ha consentito di recuperare la componente sociale con i compagni, e il problem based learning, che li ha stimolati attraverso piccole sfide che richiamavano competenze specifiche e trasversali. Non sono mancate però le critiche, legate in particolare alle difficoltà tecniche che una costruzione origami può implicare. Nel complesso, però, gli studenti dichiarano di aver provato sensazioni positive, come ad esempio di interessamento, coinvolgimento, curiosità, tutti termini che si ricollegano al concetto di motivazione intrinseca (Ryan et al., 1992; De Beni e Moè, 2000).

Si ritiene che i risultati di questa prima indagine esplorativa che, come anticipato, non aveva ipotesi a priori, abbiano individuato alcuni aspetti di interesse utili a meglio definire potenziali sviluppi di ricerca futuri. Un esempio potrebbe essere lo studio della possibile influenza di un approccio laboratoriale di geometria origami sul processo di apprendimento degli studenti, ma anche sullo sviluppo di competenze trasversali come il problem solving e l'argomentazione, o sulla stimolazione della motivazione intrinseca.

8. Bibliografia di riferimento

Alperin R. C., Lang R. J., *One-, two-, and multi-fold origami axioms*, in "Origami", 4, 2009, pp. 371-393.

Akayuure P., Asiedu-Addo S. K., Alebna V., *Investigating the effect of origami instruction on preservice teachers' spatial ability and geometric knowledge for teaching*, in "International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology", 4(3), 2016, pp. 198-209.

Barrows H. S., Tamblyn R. M., *Problem-based Learnimg in Medical Educazion*, New York, Springer, 1980.

Boakes N. J., *Origami instruction in the middle school mathematics classroom: Its impact on spatial visualization and geometry knowledge of students*, in *"RMLE Online"*, 32(7), 2009, pp. 1-12.

Borgato M. T., Salmi R., *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche,* in "Periodico di Matematiche", 10(3), 2018, pp. 57-71.

Bruner J. S., Olver R. R., Greenfield P. M., *Studies in cognitive growth*, New York, John Wiley, 1966.

Brusa A., *Il laboratorio storico*, Scandicci, La Nuova Italia, 1991.

Cakmak S., Isiksal M., Koc Y., *Investigating effect of origami-based instruction on elementary students' spatial skills and perceptions*, in "The Journal of Educational Research", 107(1), 2014, pp. 59-68.

Dale E., *Audiovisual methods in teaching* (3rd ed.), New York, Dryden Press, 1969.

D'Amore B, *Elementi di didattica della matematica*, Bologna, Pitagora, 1999.

De Beni R., Moè A., *Motivazione e apprendimento*, Bologna, Il Mulino, 2000.

Di Martino P., *Problem solving e argomentazione matematica*, in "Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula", 1, 2017, pp. 23-37.

Ferrara F., Ferrari G., & Lucco-Castello F. (2021). Piegatura della carta nella didattica della matematica: Una sperimentazione a distanza con studenti universitari. [Power Point]. X Convegno DI.FI.MA. https://drive.google.com/drive/folders/157GgicVnfBXEPuT_aUuKw8M70iJbsQj1

Golan M., Jackson P., *Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami*, "Origami", *4*, 2009, pp. 459-469.

Jahnke H. N., Arcavi A., Barbin E., Bekken O., Furinghetti F., Idrissi A. E., Weeks C., The use of original sources in the mathematics classroom, in J. Fauvel, J. Maanen (a cura di), *History in mathematics education,* Springer, 2002, pp. 291-328.

Magrone P., Form and art of closed crease origami, in D. Velichova (a cura di), *14th International Conference on Applied Mathematics (APLIMAT 2015)*, Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering, 2015.

MIUR, *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attivita' e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*, decreto interministeriale n. 211, 7 ottobre 2010.https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2010/12/14/010G0232/sg

Morando P., Spreafico M. L., *Origami e strategie di apprendimento*=*Origami and learning strategies*, "Didattica della Matematica",11, 2022, pp. 121-134.

Newton L., *The power of origami*, in "*University of Cambridge + plus magazine*", 2020.

Ryan R.M., Connell J.P., Grolnick W.S., When achievement is not intrinsically motivated: A theory of internalization and self-regulation in school, in A.K. Boggiano, T.S. Pittman (a cura di), *Achievement and motivation: A social-developmental perspective,* Cambridge, Cambridge University Press, 1992, pp. 167-188.

Russell R. A., Origami, Papierfalten, Papiroflexia: Paper Folding in Mathematics Education, in *Proceedings of the Ninth International Conference on Mathematics Education in a Global Community*, 2007, pp. 572-576.

Sbaragli S., Le misconcezioni in aula, in G. Boselli, M. Seganti (a cura di), *Dal pensare delle scuole: riforme,* Roma, Armando Editore, 2006, pp. 130- 139.

Goodsell A., Maher M., Tinto V., Smith B. L., MacGregor J. T., *Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education*, National Center on Postsecondary Teaching, Learning, and Assessment at Pennsylvania State University, 1992. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED357705.pdf

Sundara Row T., *Geometric Exercises in Paper Folding* (3rd ed.), Chicago, Open Court, 1917.

Data di ricezione dell'articolo: 29 luglio 2022
Date di ricezione degli esiti del referaggio in doppio cieco: 25 e 30 agosto 2022
Data di accettazione definitiva dell'articolo: 20 novembre 2022