"Annali online della Didattica e della Formazione Docente"
Vol. 14, n. 24/2022, pp. 99-122 – ISSN 2038-1034

Nuovi approcci nei corsi di Matematica per l'Architettura: connettere forme e formule in geometria attraverso esperienze laboratoriali

Paola Magrone, Maria Luisa Spreafico

Abstract – *First-year mathematics courses in architecture aim to provide students with scientific language, increase spatial, creative, thinking together with the ability to recognize and create forms, and enable informed use of design software. However, future Italian architects often consider these courses marginal in their education (Pagano, & Tedeschini Lalli, 2005). In order to overcome this criticality, we developed an experimental 4-hour workshop following the DBR methodology (Brown ,1992; Barab & Squire, 2004). The didactic content is the parabola, familiar to first-year students, rediscovered with activities aimed at revealing the connection between geometric form and analytical description. Students fold (on paper) the envelope of a parabola, verify the reflection property, thus "discovering" the algebraic description of the curve and, finally, apply it to a problem of architectural luminosity. After the design phase, the lab was experimented with two groups of 75 first-year students from Politecnico di Torino and Università Roma Tre in a.y. 2021-22. Comparison of our field notes with comparative analysis of the responses of a final questionnaire provided us with encouraging results on conceptual learning and engagement, with an impact on mathematics beyond the specific example considered in the workshop.*

Riassunto – *I corsi di matematica del primo anno in architettura mirano a fornire agli studenti il linguaggio scientifico, aumentare il pensiero spaziale, creativo, insieme alla capacità di riconoscere e creare forme e consentire un uso consapevole dei software di progettazione. Tuttavia, i futuri architetti italiani considerano spesso questi corsi marginali nella loro formazione (Pagano & Tedeschini Lalli, 2005). Per superare questa criticità, abbiamo sviluppato un'officina sperimentale di 4 ore seguendo la metodologia DBR (Brown ,1992; Barab & Squire, 2004). Il contenuto didattico è la parabola, familiare agli studenti del primo anno, riscoperta con attività volte a svelare il legame tra forma geometrica e descrizione analitica. Gli studenti piegano (su carta) l'inviluppo di una parabola, ne verificano la proprietà di riflessione, "scoprendo" così la descrizione algebrica della curva e, infine, la applicano ad un problema di luminosità in architettura. Dopo la fase di progettazione, il laboratorio è stato sperimentato con due gruppi di 75 studenti del primo anno del Politecnico di Torino e dell'Università Roma Tre nell'a.a. 2021-22. Il confronto delle nostre note sul campo con l'analisi comparativa delle risposte di un questionario finale ci ha fornito risultati incoraggianti sull'apprendimento concettuale e sul coinvolgimento, con un impatto sulla matematica al di là dell'esempio specifico considerato nell'officina.*

Keywords – mathematics education, higher education (architecture), hands-on methodologies, mathematical workshops, origami

Parole chiave – educazione matematica, istruzione superiore (architettura), metodologie hands-on, officine di matematica, origami

Paola Magrone è Ricercatrice di Analisi Matematica nel Dipartimento di Architettura dell'Università Roma Tre e titolare del corso Istituzioni di Matematiche 1 per il CdL in Scienze dell'Architettura. I suoi interessi di ricerca appartengono all'ambito delle matematiche complementari e riguardano sia la storia che la didattica e divulgazione della disciplina con particolare riguardo al legame tra matematica e realtà dall'infanzia all'età adulta. Tra le sue pubblicazioni: *Argomenti di Matematica per filosofia* (in coll. con P. Borriello, Roma, Aracne, 2005); *I bambini e il pensiero scientifico. Il lavoro di Mary Everest Boole* (in coll. con A. Millán Gasca, Roma, Carocci, 2018).

Maria Luisa Spreafico è Ricercatrice di Matematiche Complementari nel Dipartimento di Scienze Matematiche del Politecnico di Torino e titolare del corso Istituzioni di Matematiche per il CdL in Architettura. La sua attività di ricerca riguarda lo sviluppo di strategie educative per una didattica innovativa e inclusiva della matematica. In particolare, la sua attenzione è rivolta alla progettazione di laboratori matematici per ogni ordine di scuola, dalla primaria all'università. Tiene corsi di formazione per insegnanti di scuole di ogni ordine e grado e seminari divulgativi. Tra le sue pubblicazioni: *Ed ora, origami. 18 laboratori di matematica con l'origami* (in coll. con E. Frigerio, Ed. Kangourou, 2018).

Le autrici ringraziano la Prof.ssa Ana Millán Gasca per le molte discussioni e i suggerimenti, anche sulle fonti bibliografiche.

1. L'innovazione didattica per i corsi di matematica ad architettura: sfide e stato dell'arte

Gli insegnamenti di matematica del primo anno dei corsi di laurea in architettura (normalmente denominati "Istituzioni di Matematiche" per evidenziare che i contenuti riguardano sia il calcolo differenziale che la geometria) perseguono diversi obiettivi: mettere in grado gli studenti di leggere in autonomia un testo scientifico, ovvero far acquisire loro un linguaggio che poi li agevolerà nell'affrontare gli altri corsi scientifici, far loro conseguire destrezza e sensibilità nel riconoscere forme e crearne di nuove, e padroneggiare la matematica in vista di un uso consapevole dei software di modellazione parametrica, qualità utili sia nel percorso accademico, sia nella futura professione. Tuttavia, il rischio è che questi corsi siano percepiti come distaccati ed estranei rispetto al percorso di studi, come sembra indicare il fatto che siano lasciati tra gli ultimi esami ad essere sostenuti (Pagano & Tedeschini Lalli, 2005).

I cambiamenti nel contesto digitale e tecnologico e l'evoluzione dell'architettura invitano ad attivare la ricerca per l'innovazione didattica della matematica per l'Architettura affinché i corsi si integrino culturalmente nel percorso dello studente di architettura (come formazione al pensiero spaziale, creativo, critico), invece di essere vissuti come corsi meramente tecnici, di addestramento all'uso di strumenti di calcolo. A questo scopo, il ripensamento e l'innovazione dei contenuti e del modo di erogarli può avere un ruolo importante[1]. La nostra ipotesi di partenza è

[1] Mentre c'è molta letteratura riguardo ad applicazioni della matematica all'architettura, alla visualizzazione, alla lettura delle forme architettoniche, piuttosto esigui sono i contributi su proposte didattiche concrete nel merito dei corsi di base di matematica per architettura. Si veda, per esempio, Pedemonte (2001) per una rassegna di alcuni programmi di matematica per corsi di laurea in architettura in Europa, e Consiglieri & Consiglieri (2003) su una proposta di syllabus per un corso su due semestri e il già citato Pagano & Tedeschini Lalli (2005) in cui vengono discusse alcune innovazioni didattiche introdotte nei corsi di base. Nel recente lavoro di Ostrowska-Wawryniuk et al. (2022) si parla di un corso che porti rapidamente al pensiero parametrico e algoritmico per la formazione iniziale dell'architettura; questo mostra che i corsi di base necessitano di ricerca ed innovazioni didattiche, proprio per poter poi affrontare la modellazione parametrica. Infine, in Spreafico (2022) viene descritta una sperimentazione

inoltre che molto dipende dal fatto che lo studente o studentessa arrivi al convincimento che la matematica può essere una freccia in più – di formidabile valore – dell'arco di un giovane futuro architetto. Infine, crediamo che sia importante mettere in gioco la diversità dei background scolastici, delle conoscenze matematiche e delle prospettive sulla matematica come sapere che hanno gli studenti italiani al primo anno di Architettura[2]: il successo dei corsi di Istituzioni di Matematiche dipende anche dal prendere in conto tale diversità, anche per arrivare a un più omogeneo livello delle conoscenze.

La domanda che si pone è: si possono introdurre metodologie didattiche da accostare alle lezioni frontali/teoriche per agire sulla visione che i futuri architetti hanno della matematica al primo anno del corso di laurea? Precedenti studi mostrano che alcuni argomenti curriculari di base possono contribuire a tessere un legame tra la matematica e le altre discipline del loro corso di studi, poiché la loro lunga storia (che permette di riconoscerli nel patrimonio culturale architettonico) si combina con le loro moderne applicazioni in architettura. Ci riferiamo ad argomenti di geometria che si adattano bene ad essere proposti in sessioni laboratoriali (spesso descritte in didattica della matematica con l'espressione *hands-on*, a sottolineare che non tutto avviene alla lavagna con simboli scritti) in cui l'atmosfera di scoperta, gioco e sfida sveglia l'interesse dello studente e incoraggia la partecipazione.[3]

La formazione laboratoriale, che ha chiaramente una lunga tradizione in architettura, si rivela preziosa anche nei corsi di matematica, integrandosi alle lezioni teoriche[4]. Il laboratorio di matematica è ampiamente citato anche nei documenti dell'Unione Matematica Italiana (UMI) e della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM), per tutti i cicli di istruzione. In particolare, nel documento sul curriculum di matematica per il ciclo secondario (Anichini et al., 2004) se ne evidenzia il ruolo per le scuole superiori; noi pensiamo sia da rivendicare anche nell'ambito dell'istruzione universitaria. Richiamiamo alcune righe dal citato documento sulla descrizione di cosa è un laboratorio di matematica:

di attività interdisciplinari con alcune discipline caratterizzanti del primo anno, come Storia dell'Architettura Contemporanea e Progettazione Architettonica.

[2] La grande eterogeneità degli studenti del primo anno dei corsi di laurea in architettura ha portato a cercare di ottenere un "livellamento", con "corsi zero" offerti in presenza prima dell'inizio delle lezioni, o tramite video lezioni registrate, fruibili in qualunque momento (uno dei primi esempi in Italia è stato il sito dei MOOC (Massive Open Online Courses) del Politecnico di Milano). Sul modo di porsi di fronte a questa varietà si veda Richtáriková (2015 e 2016).

[3] Alcune esperienze di didattica universitaria in tal senso, realizzate dalle autrici si trovano in Cumino et al. (2018) e Farroni & Magrone (2016). Riflessioni generali sulla didattica hands-on ad ogni livello si trovano in Magrone & Millán Gasca (2017). Per esperienze interdisciplinari di matematica ad architettura si veda anche Carlini & Tedeschini Lalli *(*2012). Volendo lavorare hands-on non solo sui contenuti ma anche sulle strategie di apprendimento si veda Morando & Spreafico (2020).

[4] Al Politecnico di Torino si propone dal 2019 un corso facoltativo per gli studenti del primo anno di Architettura, denominato Laboratorio di Matematica, che abbina l'approccio hands-on, a quello digitale (una dozzina di incontri nel corso dell'anno accademico, che affiancano i corsi obbligatori): si veda Ceragioli & Spreafico (2020). A Roma Tre, si veda la proposta didattica per i corsi di geometria descrittiva che combina lezioni frontali con disegni alla lavagna, proiezione di modelli digitali tridimensionali e manipolazione di modelli plastici, in Spadafora (2020). Infine, una rassegna di workshops hands-on di matematica, svolti durante i corsi o per occasioni di diffusione della cultura scientifica, si possono trovare sul sito del Laboratorio di matematica www.formulas.it alla sezione "workshop".

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni) (Anichini et al., 2004, p. 28).

Nella sperimentazione oggetto di questo articolo abbiamo scelto la carta, uno dei materiali cosiddetti "poveri", ma molti altri sono gli strumenti che possono essere messi in gioco, le macchine matematiche[5] per esempio, o i software dinamici. Quello che fa la differenza tra una lezione frontale e una laboratoriale è la creazione di un'atmosfera simile alla "bottega rinascimentale, in cui gli apprendisti imparano agendo e interagendo sia tra loro che con gli esperti" (Anichini et al., 2004, p. 30). Gli studenti si avvicinano quindi all'idea che nella matematica c'è spazio per la creatività, il movimento, la relazione con i propri pari; questo è ovviamente cruciale quando si porge la matematica ai bambini, ma non meno importante se si ha a che fare con studenti universitari, verso i quali lo scopo è quello di migliorare quello che è già stato costruito, attenuando atteggiamenti di rifiuto o disinteresse[6].

D'altra parte, il legame della matematica con le attività e le esperienze umane[7] offre, in questo caso di istruzione superiore come in altri studi universitari o scolastici, un appiglio formidabile per incuriosire i discenti e favorire l'apprendimento, grazie alla traccia che lasciano negli studenti attività che svelano l'umanità e la corporeità delle matematiche. Citiamo al riguardo Miguel de Guzmán (1991):

Oggi si è generalmente d'accordo sul fatto che per una sana concezione della matematica occorra il persistente appoggio nel concreto, nella realtà da cui i concetti e i problemi matematici sorgono in modo naturale. E che, per comprendere questa fruttuosa interazione tra mondo reale e matematica è necessario ricorrere, da un lato alla storia, che svela nel tempo questo processo di affioramento della nostra matematica, e dall'altro alle applicazioni della matematica, che ci manifestano la fecondità e la potenza di questa scienza. [...] La matematica, come le altre scienze, procede anche per approcci incerti, per tentativi ed errori, per esperimenti a volte fruttuosi, a volte sterili, fino a raggiungere una forma più matura, sebbene sempre perfettibile. La nostra educazione matematica dovrebbe cercare di riflettere questi

[5] Una ampia trattazione del laboratorio di matematica con le macchine matematiche si trova in Bartolini Bussi & Maschietto (2007).

[6] Una prima riflessione trasversale sull'apprendimento della matematica di base in età infantile e i modi per comunicare questa disciplina in corsi universitari di base è stata presentata all'International Symposium "Numeracy and beyond: transforming mathematics for primary education", 5th International Congress Educational Sciences and Development, Palacio de la Magdalena, Santander (Spagna), 27 maggio 2017 nella relazione dal titolo *Towards a better understanding of hands-on approaches in maths education: A reflection from compared experiences in higher, secondary and primary education* (a cura di P.Magrone e A. Millán Gasca).

[7] Si veda Millán Gasca & Vale (2021).

tratti profondamente umani, guadagnando in tal modo accessibilità, potere dinamico, interesse e attrattiva[8].

In particolare, come lo stesso de Guzmán ha mostrato, le proprietà geometriche, avrebbero bisogno di essere liberate dall'esclusivo trattamento algebrico, che troppo spesso le offusca; gli aspetti che riguardano forma e configurazione, facendo appello all'intuizione (visiva, tattile, motoria), sono da preferire per una prima comprensione o, come ha scritto René Thom (1979), per porgere il significato che poi si consolida con il rigore del trattamento algebrico, indispensabile inoltre per le applicazioni che richiedono una soluzione numerica al computer. Il dialogo tra la versione algebrica e quella geometrica dello stesso oggetto, anche quando si tratta di argomenti elementari, è cruciale, a maggior ragione perché si sta lavorando sulla formazione di futuri architetti.

2. Metodologia della ricerca: progettazione, valutazione e sperimentazione

Si è deciso di seguire la metodologia di tipo Design-Based Research (DBR nel seguito; si veda, per esempio Barab & Squire, 2004)[9] prevedendo quindi le fasi che descriviamo nel seguito e affrontando da un lato il problema didattico del coinvolgimento degli studenti e dall'altro il problema disciplinare della relazione tra formulazione geometrica e algebrica di un ente geometrico. Dopo aver identificato i problemi evidenziati nel paragrafo precedente è iniziata la fase di progettazione basata sulle esperienze pregresse relative ai corsi di matematica di base ad architettura (si vedano le note 3 e 4 del paragrafo precedente); in questa fase si è scelto anche l'argomento curricolare e la modalità laboratoriale hands-on. Successivamente, il percorso è stato sperimentato nei corsi di Istituzioni di Matematiche per l'architettura di Roma Tre e del Politecnico di Torino[10], realizzato nelle ore curricolari con due gruppi di 75 studenti nelle due sedi, nel periodo 2021-2022. La proposta parallela in due corsi analoghi erogati in diversi atenei ha permesso di ampliare le riflessioni sulla sperimentazione. Durante la sperimentazione sono

[8] Traduzione a cura delle autrici.

[9] "[...] the goal of design-based research is to lay open and problematize the completed design and resultant implementation in a way that provides insight into the local dynamics. This involves not simply sharing the designed artifact, but providing rich descriptions of context, guiding and emerging theory, design features of the intervention, and the impact of these features on participation and learning" (Barab & Squire, 2004, p. 8). Si può fare riferimento anche al lavoro di Ann L. Brown (Brown, 1992), considerato il punto di inizio della metodologia DBR.

[10] Il corso di Laurea di Architettura del Politecnico di Torino nasce nel 2010-11 a seguito di un processo di razionalizzazione delle due facoltà di Architettura precedentemente esistenti. A partire dall'a.a. 2019-20 è stata formalizzata una nuova offerta formativa. Attualmente è previsto l'accesso di circa 500 matricole suddivise in 4 corsi (3 in italiano e 1 inglese). Ogni corso prevede una ulteriore suddivisione in 2 filiere per le discipline che prevedono attività pratiche (come Disegno e Rappresentazione, Composizione). Il Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura dell'Università Roma Tre nella sua attuale organizzazione nasce nel 2009. L'accesso è a numero programmato e prevede 200 matricole; i corsi sono divisi in due canali, tranne i laboratori di Progettazione (uno per ciascuna annualità del CdL) che sono suddivisi in tre canali. L'attività descritta in questo articolo è stata svolta in un canale del corso di Istituzioni di Matematiche, primo anno, di entrambe le sedi.

stati raccolti alcuni feedback degli studenti, visti da noi non solo come soggetti della ricerca ma come co-partecipanti, e numerose note d'aula.

In particolare, la fase di progettazione ha portato a ideare un'officina matematica (hands-on workshop) di 4 ore. L'argomento scelto per il workshop è stato quello della parabola, poiché questa curva permette una visione unificatrice di temi classici: la descrizione analitica della curva (utile, per esempio, per la modellazione parametrica) viene correlata a quella geometrica (indispensabile per le applicazioni tecnologiche e architettoniche).

Abbiamo individuato tre obiettivi didattici di natura diversa:

1) Obiettivo generale (coinvolgimento e partecipazione)
2) Obiettivo relativo alla competenza disciplinare
3) Obiettivo relativo alla competenza trasversale

L'obiettivo generale (OG, nel seguito) era quello di coinvolgere gli studenti attivamente, sia grazie all'approccio hands-on, sia mostrando loro applicazioni tecnologiche concrete (basate sulle proprietà focali) e applicazioni a problemi[11], in cui la curva è utilizzata come strumento di risoluzione.

L'obiettivo trasversale era quello di offrire un esempio di rivisitazione di concetti con cui si è già entrati in contatto attraverso approcci diversi e con nuovi esiti: esso incide su una competenza trasversale (OT, nel seguito) spendibile sia nel percorso di studio sia in quello lavorativo.

L'obiettivo disciplinare (OD, nel seguito) consiste nello svelamento del nesso tra l'algebra e la geometria e la "scoperta" in prima persona, per mezzo dell'attività manipolativa, di alcune proprietà geometriche.

Nel paragrafo 3 descriviamo in dettaglio la struttura dell'officina e le metodologie didattiche adoperate.

La sperimentazione era intesa come un modo per raccogliere osservazioni utili per riflettere sull'esperienza didattica proposta, e per progettare future proposte simili. Precisiamo che non era tra gli obiettivi mettere in campo prove o test per la valutazione dell'apprendimento degli studenti, riguardo agli argomenti trattati nell'officina. Abbiamo tuttavia fatto delle considerazioni, grazie al lavoro in aula con gli studenti di Roma, e ai lavori consegnati dagli studenti di Torino, riguardo alle criticità emerse; la più evidente riguarda, come descritto più nel dettaglio nel paragrafo 4, la difficoltà nel capire la relazione tra equazione canonica e posizione della parabola rispetto agli assi. L'obiettivo di questo primo esperimento era coinvolgere, quasi intrigare, gli studenti in una attività su un tema di matematica che li spingesse a mettere da parte sentimenti di distacco e rifiuto. Nelle future implementazioni di questa officina proporremo anche un test di valutazione dell'apprendimento da svolgere alla fine dell'attività, mentre il questionario descritto di seguito, ha permesso di valutare qualitativamente la *percezione* dell'apprendimento da parte degli studenti.

Abbiamo individuato due strumenti per valutare la sperimentazione:

[11] Problemi che nei tradizionali libri di calcolo americani vengono chiamati problemi di parole – word problems – e che recentemente sono indicati come problemi di realtà, in diversi testi di scuola superiore.

– uno strumento qualitativo: le note di campo del docente, incentrate sul gradimento, coinvolgimento, espressione degli studenti (anche in termini di diversità), partecipazione e conversazione matematica

– un questionario proposto alla fine del workshop, da compilare in forma anonima, attraverso un modulo Google, in aula e con la possibilità di compilarlo entro la fine della giornata, per un'analisi quantitativa e qualitativa (Tavola 1)

D1 - (OG, OT) Avevi mai piegato prima una parabola? D2 - (OD, OT) Quanto ti è stato utile per capire: a) la definizione geometrica? b) l'equazione canonica? c) l'importanza della scelta del sistema di riferimento? d) la proprietà di riflessione? D3 – (OG) Mi suggeriresti di ripetere l'attività il prossimo anno?

Tavola 1 – Questionario in tre domande proposto alla fine dell'officina della parabola, con indicazione della pertinenza ai tre obiettivi didattici formulati per essa. Le domande D1 e D3 sono dicotomiche, mentre il gruppo di domande D2, relative ai contenuti disciplinari, sono a scala numerica asimmetrica a 5 valori (1 = niente, 2 = poco, 3 = abbastanza, 4 = molto, 5 = moltissimo).

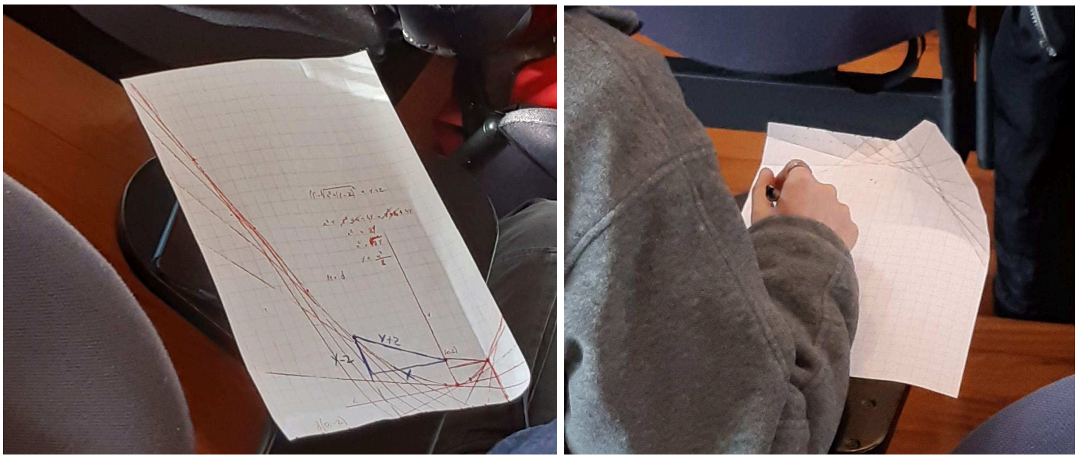

Figura 1 – Studenti al lavoro in aula a Roma, gennaio 2022, foto di Paola Magrone.

Con questo articolo si vuole condividere l'esperienza con un duplice obiettivo. Il primo è quello di fornire uno spunto di riflessione sulla relazione tra descrizione geometrica e algebrica di alcuni oggetti matematici, utilizzando la prima per comprendere il significato e la seconda per la trattazione numerica. L'altro obiettivo è quello di descrivere l'officina "Parabola e piega" perché possa essere riproposta e adattata in altri contesti, come è suggerito in Barab & Squire

(2004), divenendo quindi una sorta di workshop prototipo. L'accezione di prototipo è qui duplice: non solo un modello di lezione relativo alla parabola da collaudare e perfezionare per le realizzazioni successive ma anche un esempio che possa dare luogo ad una tradizione di workshop da inserire nella progettazione didattica che evidenzino le connessioni tra geometria e algebra.

3. Struttura della officina "Parabola in piega" e metodologie didattiche

In questo paragrafo viene descritto in modo puntuale il laboratorio, strutturato in quattro attività, suddivise in momenti, mentre tutte le osservazioni didattiche sono discusse nel paragrafo 4.

All'interno di ogni momento si combinano varie metodologie: uso di materiali fisici (carta), conversazione matematica, lavoro alla lavagna, cercando di creare un ritmo in un crescendo che parte dall'attesa iniziale e si risolve "scenicamente" con le conclusioni matematiche.

Il laboratorio si apre dalla nota piegatura della carta per ottenere la parabola[12]; rispetto alla piega tradizionale, la novità introdotta nell'officina è quella di usare la carta a quadretti che permette di passare, nella terza attività, alla descrizione algebrica del luogo di punti. Tra le due attività citate si inserisce la verifica, mediante la piegatura della carta, della proprietà focale della parabola, idea originale della seconda autrice. Il workshop si chiude con un'applicazione nel campo dell'architettura.

(i) Prima attività: *La parabola come inviluppo delle sue tangenti*

1. Il primo momento è dedicato alla piegatura della parabola.

Il docente distribuisce un foglio A4 (o A5) a quadretti e gli studenti scelgono un lato del foglio che avrà il ruolo della retta direttrice r e un punto F interno al foglio, che sarà il fuoco. Si tratta di piegare più volte il bordo del foglio, portando di volta in volta un punto di r sul fuoco F, come mostra la Figura 2. Dopo aver prodotto almeno una decina di pieghe, si può "cogliere" visivamente sul foglio la traccia di una curva (Figura 3).

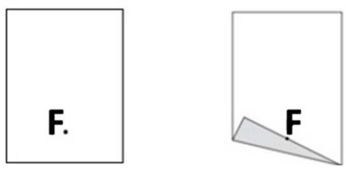

Figura 2 – La prima piega della sequenza

[12] L'idea della piegatura (origami) è stata proposta da Sundara Row già nel 1893 in Row (1893). Per approfondire la storia feconda tra matematica e origami si rimanda a Friedman (2018).

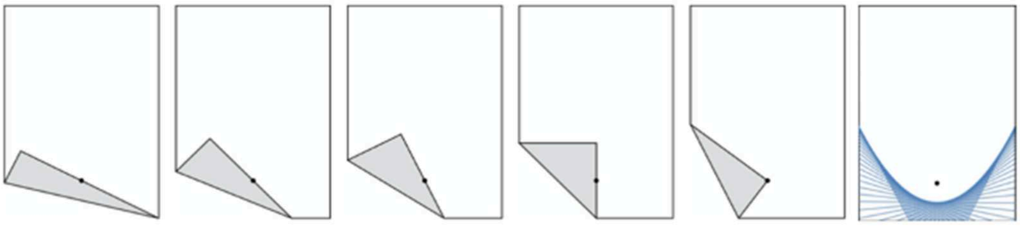

Figura 3 – La sequenza di piegatura; nell'ultima la visualizzazione della curva è evidente

Gli studenti eseguono la costruzione senza sapere che curva si stia cercando; questa scelta è fatta per creare un effetto sorpresa e incoraggiare la discussione che seguirà subito dopo.

2. Il docente inizia una breve conversazione[13] matematica con i presenti, per lasciare che le idee emergano senza forzarle e ciascun partecipante arrivi a capire con i suoi tempi. In questa fase il docente pone domande, alcune strutturate e altre all'impronta, visto che le reazioni degli studenti saranno diverse e anche imprevedibili, per incoraggiare l'espressione da parte degli studenti stessi; quindi si tratta di una fase in cui per i discenti c'è spazio per la discussione, per (ri)formulare idee, anche sbagliate, per rimanere interdetti e successivamente arrivare al discernimento, insieme con i propri pari e con il docente, che, sì conduce, ma allo stesso tempo si cala nell'aula "facendosi un po' ignorante" (Enriques, 1921).

La discussione si focalizza sul concetto di inviluppo e sulla dimostrazione che ciò che compare attraverso le linee di piegatura sia matematicamente l'inviluppo delle tangenti della parabola. In particolare, si possono guidare gli studenti a ragionare e discutere ponendo queste domande:
– cosa rappresentano le tracce lasciate sul foglio?
La risposta corale è generalmente - una parabola-, cioè una curva piana.
– come può essere una curva se abbiamo tracciato solo linee rette (le pieghe della carta)?
Qualcuno dopo aver riflettuto, azzarda la parola "tangente": ricordiamo che questo concetto dovrebbe essere chiaro dai percorsi scolastici precedenti, più o meno approfondito, e per alcuni già rivisto in termini di calcolo differenziale.

Tavola 2 – Scenario di una discussione

3. La domanda sull'inviluppo

Una volta svelata l'identità della curva e delle sue tangenti, il docente accenna al concetto di inviluppo; senza scendere nel dettaglio della definizione, che sarebbe fuori dagli scopi della

[13] Osserviamo che nelle pagine dedicate al Laboratorio di Matematica del documento CIIM (Anichini et al., 2004) trova posto come parte integrante della metodologia del laboratorio, la *discussione matematica*.

officina, si può pensare che la curva sia stata descritta tracciando, punto per punto, le sue rette tangenti.

Si tratta ora di fare emergere l'esigenza del passo conclusivo, che consisterà nel dimostrare che quella che sembra una parabola lo sia effettivamente. A questo scopo, il docente ricorda la definizione di parabola:

"la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso F detto fuoco e da una retta r anch'essa fissa, detta direttrice, è costante"

Il docente chiede: - una volta capito che quello tracciato potrebbe essere l'inviluppo delle tangenti della curva, come dimostrare che è una parabola?

Questa domanda permette di osservare la differenza tra la percezione visuale della forma e la sua natura matematica. Questo è interessante e cruciale, dal punto di vista disciplinare ed anche architettonico; infatti, molte volte nell'osservare oggetti costruiti può capitare di interpretare una data curva erroneamente, scambiare ellissi con ovali policentrici o archi di parabole per archi di catenarie, forme che ad un primo sguardo sono simili. Nell'analizzare accuratamente un profilo di una forma architettonica è invece necessario capire quale sia la vera geometria osservata, perché la forma porta con sé proprietà strutturali: per esempio, alcuni archi, come quello di Saint Louis, possono venire scambiati per parabole, a prima vista, mentre la curva soggiacente è una catenaria, come mostrato in Calter (2006). Le proprietà strutturali esulano da un corso di matematica, ma quello che si può instillare è l'atteggiamento critico di ritenere necessario verificare se una curva sia effettivamente quello che sembra, o meno, usando geometria, algebra e analisi.

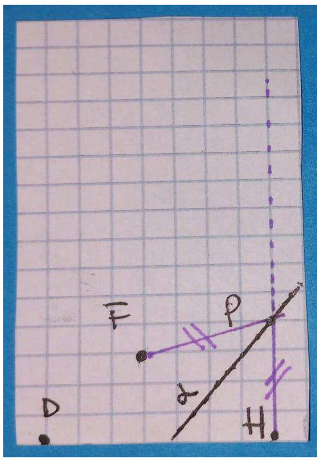

Figura 4 – La dimostrazione del fatto che ogni piega è effettivamente una tangente alla stessa parabola

La dimostrazione è visualizzata nella Figura 4; ogni studente la può eseguire partendo da un foglio pulito, che contenga una sola piega detta $\boldsymbol{\alpha}$, e segnando con la lettera H il punto della direttrice r che è stato piegato sul fuoco tramite $\boldsymbol{\alpha}$. Si osservi che $\boldsymbol{\alpha}$ è l'asse del segmento HF, quindi tutti i suoi punti sono equidistanti da F e H. Occorre determinare un punto P di $\boldsymbol{\alpha}$ per il quale la distanza PH rappresenti la distanza tra P e la retta r. Per questo si introduce la piega per H, perpendicolare ad r. Questa piega incontra la linea $\boldsymbol{\alpha}$ nel punto P. Si tracci con una penna il segmento PF, e il segmento PH, che, essendo perpendicolare alla direttrice, rappresenta la distanza tra P e la direttrice stessa. Si ha che PH = PF perché P appartiene all'asse del segmento FH; si può verificarlo ripiegando su $\boldsymbol{\alpha}$ e osservando che i due segmenti PH e PF si sovrappongono perfettamente. Dalla relazione PH = PF, e ricordando la definizione di parabola, si deduce che il punto P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice r. Quindi, se si ripetesse il procedimento, si troverebbe un unico punto appartenente alla medesima parabola su ognuna delle tangenti che abbiamo piegato.

(ii) Seconda attività: *La proprietà focale della parabola piegando la carta*

La parabola possiede una importante proprietà geometrica, legata al suo fuoco, che ha innumerevoli applicazioni nella tecnologia: i raggi che arrivano paralleli all'asse di simmetria vengono riflessi nel fuoco o, dualmente, i raggi uscenti dal fuoco vengono riflessi parallelamente all'asse di simmetria. Questa proprietà di riflessione, applicabile con raggi luminosi o segnali sonori[14], molte volte non viene presentata alle scuole superiori o non è recepita come rilevante o interessante.

Poiché non è semplice da dimostrare con tecniche algebriche, il docente propone una modalità di verifica hands-on, tramite la piegatura della carta. Prima di procedere, il docente introduce due semplici definizioni di pieghe origami, le pieghe a monte e a valle, che sono mostrate nella Figura 5.

La piega a monte è una piega della carta che ricorda la sommità del tetto di una casa, mentre la piega a valle è essenzialmente una piega della carta che ricorda un avvallamento.

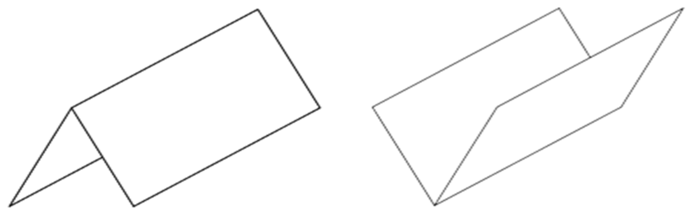

Figura 5 – Piega a monte e valle, rispettivamente

[14] Entrambi modellati geometricamente come linee rette.

Il docente distribuisce un foglio (Figura 6, fotogramma 1) sul quale è stato tracciato il grafico di una parabola, il suo fuoco F, e la tangente in uno dei suoi punti (l'esperimento è poi ripetibile tracciando tangenti a piacere). Come nella piegatura dell'inviluppo, l'asse di simmetria è la retta per il fuoco parallela ai lati del foglio, in questo caso a quelli corti. I fotogrammi della Figura 6 rappresentano la sequenza di pieghe che il docente propone: 2. piegare a monte la retta tangente; 3. piegare a valle la perpendicolare alla retta tangente passante per P, portando la retta tangente su sé stessa; 4. riaprire (nella figura è evidenziata in azzurro l'ultima piega fatta); 5. piegare a monte una retta per P parallela ai lati corti (e quindi all'asse di simmetria) che rappresenta il raggio da riflettere: per fare questo basta piegare a monte facendo in modo che il lato lungo si sovrapponga a sé stesso, con la piega passante per P; 6. riflettere il raggio (colorato di rosso in figura), ripiegando sulla retta azzurra. Si ottiene che il raggio riflesso passa per il fuoco.

Oltre alla verifica della proprietà geometrica, gli studenti possono sperimentare un ulteriore metodo dimostrativo, che si aggiunge a quelli da loro visti con la geometria sintetica e analitica.

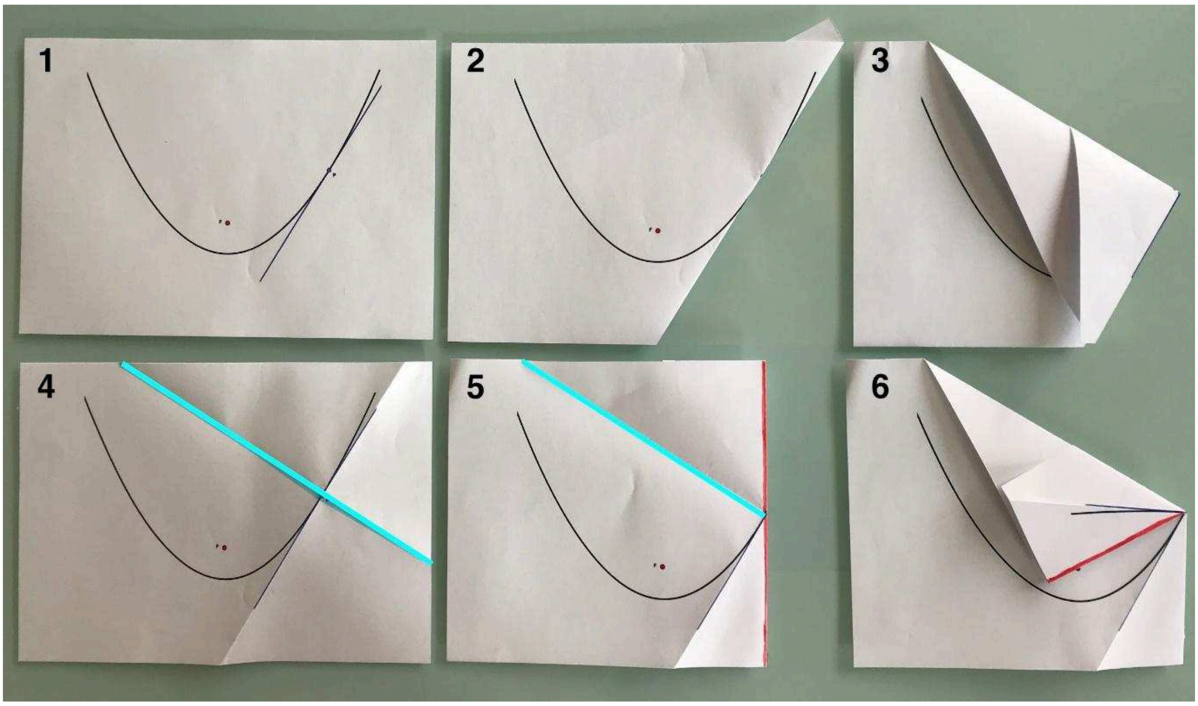

Figura 6 – Sequenza di piegatura per verificare la riflessione

(iii) Terza attività: *Descrizione algebrica della parabola*

La piegatura della parabola è stata proposta su di un foglio a quadretti, proprio per poter legare in questa terza fase, la parabola “prodotta” geometricamente con la sua espressione algebrica, che in parte dipende dalla scelta del riferimento.

Il docente invita/guida gli studenti a scegliere e tracciare due diversi sistemi di riferimento sullo stesso foglio (a quadretti) su cui hanno piegato le tangenti alla parabola; quindi, chiede loro di scrivere le equazioni dell’oggetto geometrico (la parabola) piegato, nei due diversi sistemi di riferimento.

Lo scopo di questa attività è di suscitare una riflessione sul sistema di riferimento, volta a fare emergere il fatto che a volte sceglierlo opportunamente è cruciale per una descrizione algebrica snella ed efficace. Non di rado gli studenti vedono il sistema di riferimento come qualcosa di stabilito quasi per un principio di autorità, fissato una volta per tutte nello spazio e nel tempo.

Nel seguito si riporta, in un caso esemplificativo che fa riferimento alla Figura 7, il semplice calcolo delle equazioni delle parabole perché le diverse forme che assumono le equazioni sono centrali per la discussione relativa ai sistemi di riferimento.

Primo caso: sistema di riferimento “privilegiato” con origine nel vertice della parabola. Si inserisce un sistema di riferimento cartesiano con asse y perpendicolare alla direttrice (il bordo inferiore del foglio) e passante per il fuoco, asse x passante per il vertice. Il vertice va individuato ricordando la definizione stessa della curva: essendo anch’esso un punto appartenente alla parabola, deve trovarsi alla medesima distanza da fuoco e direttrice; quindi, è il punto medio del segmento che parte dal fuoco e interseca la direttrice con un angolo retto. A questo punto il sistema di riferimento è stabilito, la carta a quadretti permette di scrivere le coordinate del fuoco e l’equazione della retta direttrice; il problema posto si riduce a “scrivere l’equazione di una parabola dati fuoco e direttrice”. In Figura 7 il fuoco, contando i quadretti, ha coordinate F (0,4), la direttrice ha equazione $y = -4$, il generico punto P (x y) appartenente alla parabola deve soddisfare l’equazione PF = PH dove H è la proiezione ortogonale di P sulla direttrice r. Calcolando le distanze a quadrato, $PF^2 = (y-4)^2 + x^2$, $PH^2 = (y+4)^2$, e eguagliandole, con pochi conti si ottiene l’equazione canonica

$$(1) \quad y = x^2/16.$$

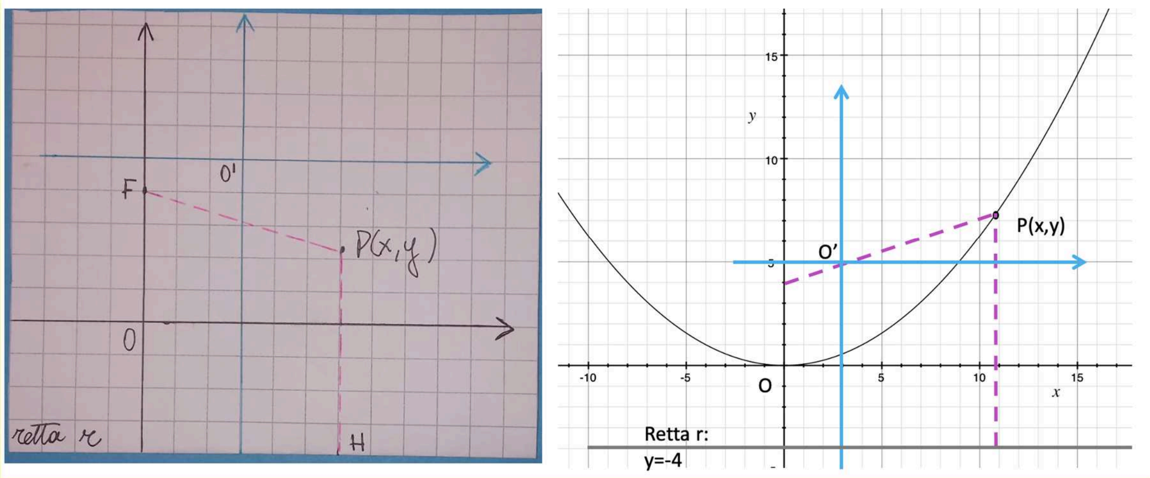

Figura 7 – Disegno hands-on e digitale della parabola e dei due riferimenti scelti

Secondo caso: sistema di riferimento traslato rispetto al vertice. Si scrive l'equazione della stessa parabola traslando l'origine del sistema di riferimento in entrambe le direzioni x e y; in altre parole, sia ascissa che ordinata della nuova origine dovranno essere entrambe diverse da zero. Per esempio, la nuova origine è stata posta nel punto (3,5). Dalla figura si osserva (sempre contando i quadretti) che il fuoco si verrà a trovare in F' (-3,-1), la retta r' avrà equazione y = -9. Procedendo come nel primo caso, si ottiene la seguente equazione, completa anche dei termini di grado zero e uno

$$(2)\quad y = x^2/16 + \tfrac{3}{8}\, x - 71/16.$$

Confrontando le equazioni (1) e (2), il docente fa osservare ai discenti che il termine quadratico rimane lo stesso nelle due equazioni: è infatti il coefficiente di tale termine che stabilisce quanto una parabola sia "aperta o chiusa" (ne stabilisce la curvatura) e se abbia la la concavità rivolta verso l'alto o verso il basso.

(iv) Quarta attività: *Applicazione ad un problema architettonico*

Con l'idea di coinvolgere aspetti applicativi (diversi da quelli riguardanti le proprietà focali, già evidenziati) il docente propone un semplice problema che consiste nel determinare le misure della finestra di un sottotetto affinché sia massima l'illuminazione. Il problema è proposto graficamente in Figura 8, assegnando i dati e suggerendo l'incognita da utilizzare.

Una possibile risoluzione: si trova una relazione tra i due lati del rettangolo, impostando la proporzione tra i triangoli simili ABC e EDB, 12 : (12 – x)= 8 : ED, si ottiene ED = ⅔ (12 – x).

Pertanto, l'area del rettangolo, scritta in funziona di x vale $A(x) = -\frac{2}{3} x^2 + 8x$.

Osservando il grafico della parabola y = A(x) si deduce che il valore massimo è raggiunto nel vertice, che ha coordinate V (6,24). Tale valore massimo si può calcolare anche utilizzando la derivata prima e trovandone l'unico zero. A questo punto le misure della finestra che rende massima l'illuminazione sono AD = 6 e ED = 4.

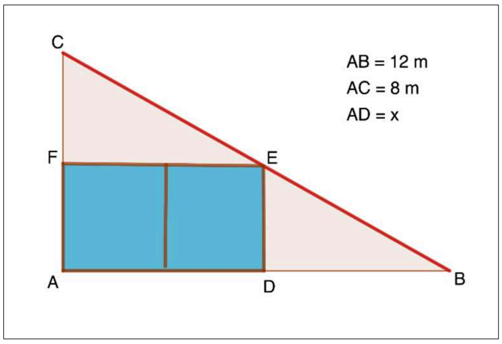

Figura 8 – Il quesito di realtà in forma grafica

4. Sperimentazione: note di campo

Le prime due attività sono state proposte in aula sia a Roma sia a Torino, per una durata di circa 2 ore complessive. Per i restanti due momenti sono state fatte scelte diversificate: a Roma si è deciso di guidare la soluzione corale in aula (2 ore), mentre a Torino è stato assegnato un lavoro facoltativo da svolgere individualmente a casa e consegnare successivamente.

Ripercorrendo i vari momenti descritti nella sezione precedente, discutiamo alcuni spunti interessanti emersi dal confronto con gli studenti.

(i) Piegatura della parabola
Tutti gli studenti sono stati in grado di seguire con successo le istruzioni di piegatura. Vogliamo notare che la discussione sulla parabola come inviluppo delle tangenti è stata condotta nelle due sedi rispettando il diverso background matematico, relativo ai contenuti erogati nel corso fino a quel momento. A Roma si è privilegiato il richiamo alle rette tangenti ad un grafico, che i ragazzi avevano visto mediante l'introduzione della derivata prima di una funzione. A Torino, poiché la piegatura è stata proposta nella prima parte del corso dedicata alla geometria, è

stato richiamato il concetto sintetico di tangente ad una curva, come posizione limite delle secanti. Quindi il laboratorio può essere svolto anche senza competenze relative alla derivazione di funzioni di una variabile.

(ii) Proprietà focale

In entrambe le sedi nessuno dei presenti conosceva la proprietà focale della parabola. Questo probabilmente dipende dal fatto che nelle scuole secondarie di secondo grado si privilegia la descrizione algebrica mediante la quale la verifica di tale proprietà non è banale. È stato quindi importante svelare questa peculiarità e la piegatura della carta ha permesso di farlo senza l'utilizzo ingombrante dei conti; non si è trattato di una dimostrazione, ma di una verifica esperienziale. A Torino, è stato anche condiviso con gli studenti un artefatto fisico che ha permesso di "giocare" con questa proprietà, prima ancora di discuterne. È stato infatti lasciato a disposizione, durante un intervallo, un piccolo biliardo parabolico (si veda la Figura 9) con l'indicazione di lanciare la biglia sul profilo parabolico per colpire di rimbalzo un birillo posizionato opportunamente nel fuoco (in generale in questo modo non si riusciva a fare cadere il birillo, data la difficoltà del tiro di sponda); successivamente è stato inserito uno scivolo che indirizzava la biglia parallelamente all'asse di simmetria. In questo caso, anche spostandosi lungo il bordo del rettangolo, traslando lo scivolo, la biglia abbatte sempre il birillo; questa dimostrazione ha suscitato grande interesse e stupore tra gli studenti.

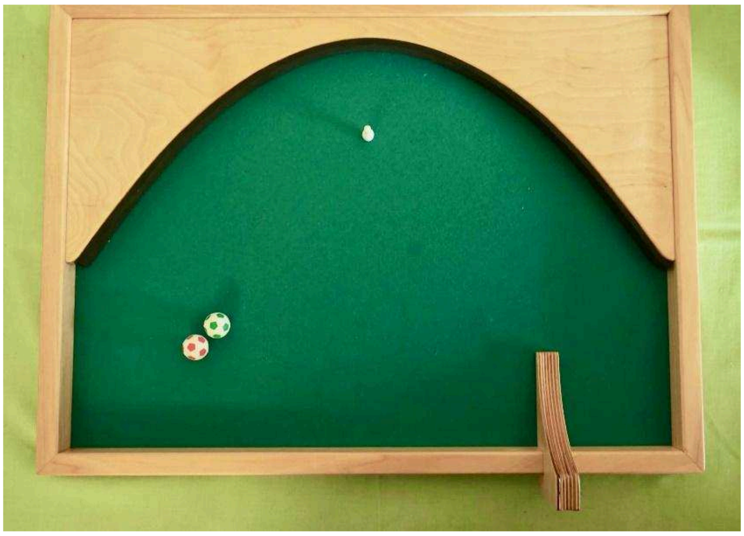

Figura 9 – Il biliardo parabolico

(iii) Descrizione algebrica

A Roma i ragazzi hanno svolto in aula tutte le fasi del laboratorio, in particolare sono stati guidati nella scelta del sistema che permette di ottenere la forma canonica, cioè l'equazione algebricamente più semplice ($y = ax^2$): l'asse delle ordinate coincide con l'asse di simmetria e quello delle ascisse con la retta ortogonale all'asse, passante per il vertice. Una seconda scelta del riferimento, sempre con assi paralleli ai precedenti, è stata lasciata al singolo studente, al fine di ottenere un'equazione del tipo $y = ax^2+bx+c$. Si è poi discusso in aula la tipologia delle equazioni relative alle diverse scelte ed è emersa una considerevole difficoltà degli studenti nello scrivere la seconda equazione, con l'origine traslata.

A Torino invece è stato assegnato come compito da svolgere in orario extracurricolare. L'osservazione che è uscita dalla lettura degli elaborati è che, benché sia nota la forma canonica e l'abbinamento di tale forma con la scelta sopra riportata degli assi, tutti gli studenti hanno scelto l'asse delle ordinate coincidente con quello di simmetria, ma non è stata fatta la scelta dell'asse delle ascisse che portasse alla forma canonica (si veda, come esempio, la Figura 10). Questo fa riflettere sul fatto che l'uso dell'algebra non basata su una lettura geometrica copre alcuni significati (fuoco e direttrice) e ne svuota altri (equazioni canoniche).

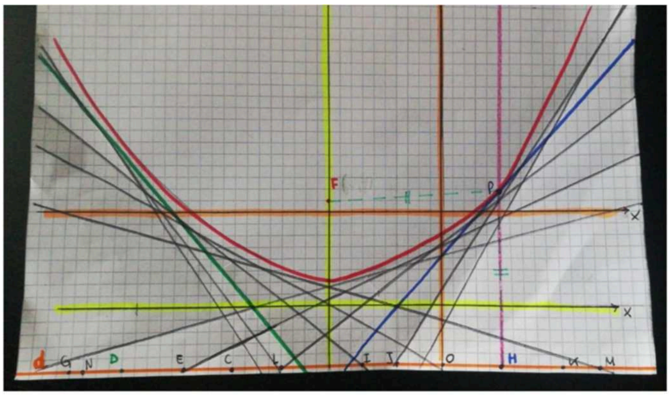

Figura 10 – I sistemi di riferimento scelti Elisa Venturelli, studentessa torinese (che ringraziamo per la gentile concessione)

Entrambe le scelte didattiche hanno messo in luce come allo stesso oggetto geometrico, ottenuto in questo caso concretamente da un atto manipolativo, possa essere abbinata più di una descrizione algebrica.

Poiché può non essere immediato (pur essendo stato studiato e ristudiato nelle scuole secondarie di secondo grado) cogliere quale/i termini dell'equazione descrivono le proprietà geometriche intrinseche della curva, si è colta l'occasione, in aula a Roma, per riflettere su come la curvatura sia collegata al coefficiente del termine di secondo grado e gli altri due coefficienti alla posizione della parabola nel piano cartesiano. Gli studenti torinesi ne hanno discusso con la docente in occasione della consegna dell'elaborato.

(iv) Applicazione ad un problema concreto

Come per il momento precedente, a Roma gli studenti hanno lavorato coralmente in aula, mentre a Torino hanno completato il lavoro individualmente e in autonomia. L'obiettivo era quello di mostrare come la forma geometrica della parabola permette di leggere la soluzione di un problema reale.

Ricordiamo che è stato assegnato lo schema di una finestra inserita in un sottotetto (si veda Figura 8) nella quale erano segnati alcuni dati e indicata l'incognita da utilizzare. La richiesta era quella di "determinare le dimensioni della finestra che garantiscono una maggior luminosità del sottotetto".

In Figura 11 compare la soluzione di una studentessa torinese: è molto comunicativa la relazione grafica da lei impostata per mostrare la relazione tra la parabola, che è uno strumento algebrico risolutivo, e la geometria reale del problema. La soluzione cercata corrisponde al valore massimo della curva, che è chiaramente visibile in figura, e calcolabile attraverso le coordinate del vertice. Inoltre, il punto di massimo si proietta verticalmente esattamente nel punto D, estremo della finestra cercata. E ancora, i due zeri della parabola (intersezioni con l'asse x nei punti $x = 0$ e $x = 6$) corrispondono ai due casi estremi del problema, quando la finestra ha area nulla e il rettangolo viola si riduce ad un segmento.

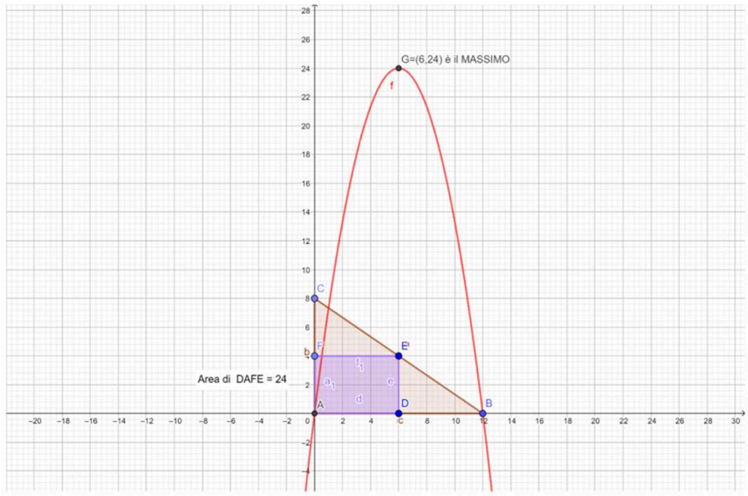

Figura 11 – La soluzione del problema concreto a cura di Elisa Venturelli, studentessa torinese (che ringraziamo per la gentile concessione)

5. Discussione delle risposte al questionario[15]

Hanno risposto 46 studenti di Torino e 44 di Roma, su 75 partecipanti di ogni sede (circa il 60%). Le risposte sono raccolte nella Figura 12.

[15] I risultati dei questionari non sono da intendersi come statisticamente rilevanti in alcun modo, del resto le domande non sono state progettate con questo intento.

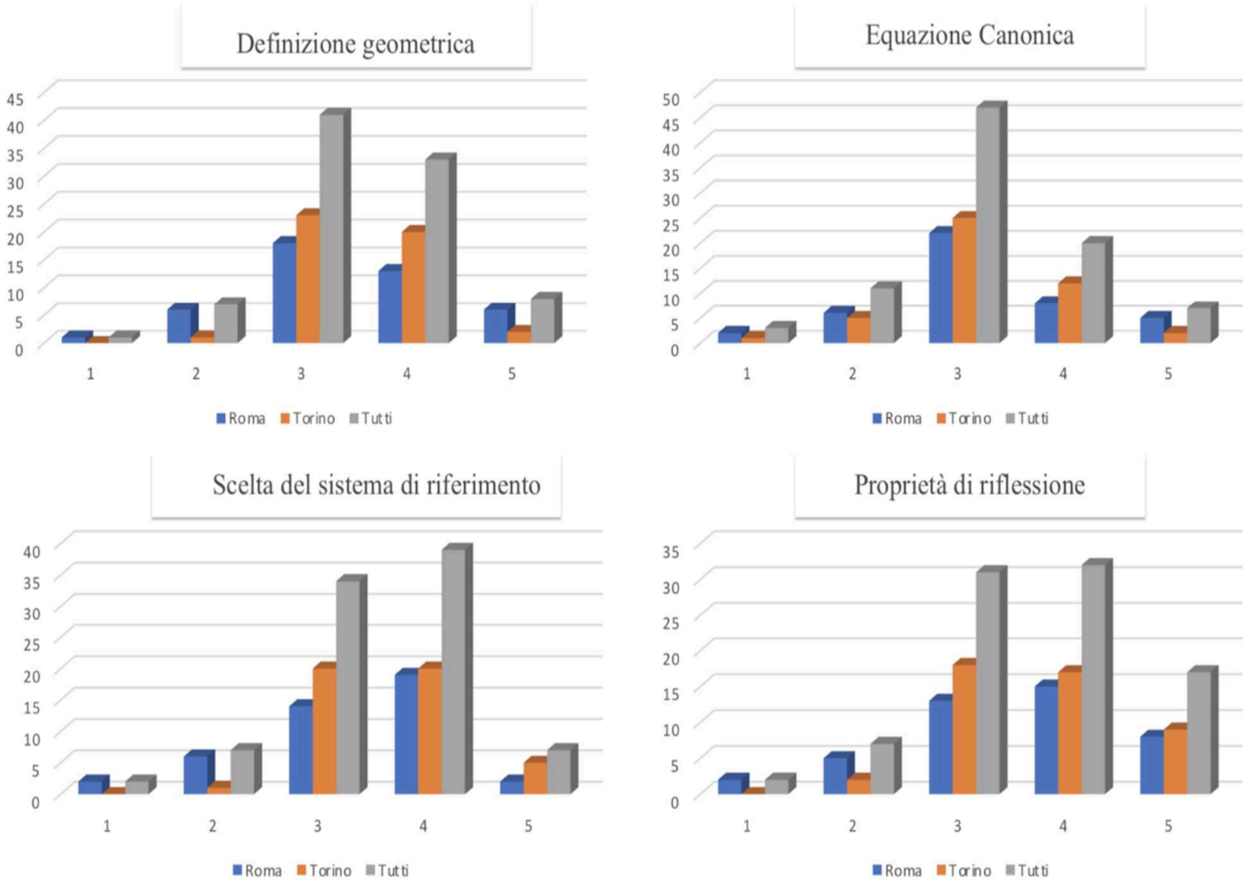

Figura 12 – Risposte alla domanda D2, per ognuno dei concetti considerati, divise per sedi e globali: in blu i dati relativi a Roma; in arancione quelli relativi a Torino; in grigio il totale delle due sedi

Discutiamo le risposte alle domande del questionario (si veda la Tavola 1 del paragrafo 2) relative ai tre obiettivi generale (OG), trasversale (OT) e disciplinare (OD).

Le domande D1 e D3 (OG) restituiscono un'informazione relativa al coinvolgimento. Per la quasi totalità di studenti che hanno risposto al questionario si è trattato di un'esperienza nuova. Il 100% degli studenti che hanno risposto (anche i due di Torino che dichiarano di conoscere già la piegatura della parabola) consigliano di ripetere l'attività alle future matricole; questo fatto induce a dedurre che gli studenti siano stati incuriositi, coinvolti e stimolati e ci fa ben sperare sull'avere raggiunto un obiettivo di tipo generale (OG) di coinvolgimento.

Per quanto riguarda gli obiettivi testati con i quattro item della domanda D2 (Figura 12), per gli item a-c-d circa il 50% degli intervistati ha dato un punteggio tra 4 e 5 e la percentuale si alza oltre l'80% aggiungendo la valutazione 3. Per quanto riguarda l'item b (equazione canonica), le due sedi sono percentualmente allineate, nonostante il lavoro sia stato svolto in aula a Roma e in autonomia a Torino: solo il 31% valuta 4 e 5 l'attività, anche se, aggiungendo le risposte "abbastanza", la percentuale sale all'82%.

I risultati, pur leggermente diversi nelle due sedi, sono incoraggianti. Il dato che si distacca maggiormente è quello relativo alla forma canonica, come avevamo già avuto modo di cogliere attraverso le note di campo.

Questo dato evidenzia il fatto che, pur avendo già studiato l'equazione della parabola alle scuole superiori, la forma canonica non è colta nel suo significato di descrizione algebrica privilegiata. Osserviamo che, nel percorso scolastico, in generale si parte dall'equazione algebrica per poi tracciare la curva, mentre nell'officina abbiamo voluto capovolgere la situazione, concentrando l'attenzione sulla costruzione geometrica e poi usando l'algebra come uno strumento per descrivere: la descrizione geometrica, prima, quella algebrica, poi.

Più precisamente, se viene assegnata un'equazione del tipo $y = ax^2$ tutti gli studenti sanno che rappresenta una parabola con vertice nell'origine. Ma, viceversa, data la traccia di una parabola, se si chiede loro di disegnare un sistema di riferimento perché venga una forma algebrica la più semplice possibile (quella canonica) non è loro chiaro che devono individuare il vertice e disegnare gli assi passanti per esso: uno coincidente con l'asse di simmetria e l'altro perpendicolare ad esso. La comprensione è superficiale e a senso unico.

Si legge dunque dalle risposte la fatica fatta dagli studenti a far "parlare tra di loro" i due approcci e questo indica anche a noi docenti la necessità futura di insistere ad esplicitare ancora meglio questa relazione.

6. Conclusioni

I corsi di Istituzioni di Matematiche ad Architettura devono confrontarsi non di rado con l'ostacolo di partenza di studenti poco motivati e coinvolti, con preconcetti negativi sulla matematica. Dal punto di vista disciplinare, questi studenti faticano anche a conciliare aspetti geometrici e algebrici di enti geometrici già incontrati nel loro percorso di studio.

Abbiamo quindi sviluppato un'attività laboratoriale volta a incidere sia sugli aspetti cognitivi sia su quelli metacognitivi (coinvolgimento e consapevolezza), nella quale gli studenti potessero sperimentare hands-on, porre domande, aprirsi a nuovi approcci di indagine e apprendimento, in una disciplina ritenuta troppe volte cristallizzata.

L'officina matematica prototipo ha riguardato la parabola, argomento noto a tutti gli studenti ma qui presentato in maniera nuova. L'ideazione ha tenuto conto sia degli aspetti applicativi nell'ambito dell'architettura, sia di aspetti prettamente disciplinari: è stata un'occasione per svelare il legame tra l'oggetto geometrico e le sue rappresentazioni algebriche, legame che troppe volte viene scisso nella scuola secondaria.

La piegatura tradizionale di Sundara Row, che rende tangibile il luogo geometrico e aiuta gli studenti nel passaggio all'astrazione, è stata rielaborata su carta quadrettata per legare significato geometrico e descrizione algebrica. Inoltre, è stata introdotta una nuova sequenza di pieghe per verificare, sempre tangibilmente, la proprietà di riflessione della parabola.

Gli studenti si sono lasciati coinvolgere e le loro reazioni, commenti o risposte alle domande/attività proposte, unite al questionario, ci hanno dato modo di fare alcune considerazioni. In primo luogo, abbiamo constatato che l'approccio prevalentemente algebrico proposto nella scuola secondaria relativo a una curva copre i significati geometrici, i quali hanno quindi bisogno di riprendere il loro posto. Si tratta di un fatto quasi paradossale: nella scuola secondaria gli aspetti geometrici vengono per la maggior parte presentati come accessori, quasi delle curiosità, mentre sono fondanti da un punto di vista storico ed epistemologico. In secondo luogo, e relativamente agli aspetti generali e trasversali, crediamo che l'officina ha avuto un notevole gradimento e di aver mostrato agli studenti come uno stesso argomento possa essere affrontato in modo diverso ed inaspettato, migliorandone e cogliendone aspetti applicativi. È emersa una criticità in relazione alla comprensione dell'equazione canonica, di cui intendiamo occuparci in una futura riformulazione dell'officina.

Osserviamo che, in questa prima sperimentazione, non sono stati somministrati test per la valutazione dell'apprendimento, che verrà presa in considerazione nelle prossime edizioni.

Sulla falsariga di questo prototipo – un approccio diverso ad una tematica classica – ci proponiamo di sviluppare laboratori sulle altre coniche o su altri argomenti curriculari legati alle funzioni.

7. Bibliografia di riferimento

Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., & Robutti O. (Eds.). (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario*. Lucca, Matteoni Stampatore.

Barab S., & Squire K., (2004). Designed-Based Research: Putting a Stake in the Ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.

Brown A.L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178.

Calter P. (2006). Gateway to Mathematics Equations of the St. Louis Arch. *Nexus Netw J*, 2, 8, 53-66.

Carlini A., & Tedeschini Lalli L. (2012). *Interrogare lo spazio. Esperienze di matematica ad Architettura*. Roma, Gangemi.

Ceragioli F., & Spreafico M.L. (2020). Tangible Tools in Mathematics for Engineering Students: Experimental Activity at Politecnico di Torino. *Digital Experiences in Mathematics Education,* 6, 244-256.

Consiglieri L. & Consiglieri V. (2003) A Proposed Two-Semester Program for Mathematics in the Architecture Curriculum. *Nexus Netw J* 5**,** 127–134.

Cumino C., Pavignano M., Spreafico M.L., & Zich U. (2019). Teaching Geometry and Surfaces Evaluation Through Graphic Representation and Dynamic Paper Models. In: L. Cocchiarella (Ed.), *ICGG 2018 - Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics, AISC 809,* (pp. 1523-1532). Cham, Springer International.

Enriques F. (1921). Insegnamento dinamico. *Periodico di Matematiche*, IV, 1, 6-16.

Farroni L., & Magrone P. (2014). Mathematical drawing machines: historic drawing from a parametric point of view. The case of conic curves. In S. Barba (Ed.), *Proceedings of V Congreso Internacional de Expresión Gráfica en Ingeniería, Arquitectura y Carreras Afines y XI Congreso Nacional de Profesores de Expresión Gráfica en Ingeniería, Arquitectura y Carreras Afines, Héctor Carlos Lomonaco, Rosario (Argentina)*, (pp. 130-137). Rosario, CUES.

Farroni L., & Magrone P. (2016). A multidisciplinary approach to teaching mathematics and architectural representation: Historical drawing machines. Relations between mathematics and drawing. In L. Radford, F. Furinghetti, T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics, Montpellier (Francia)*, (pp. 641-651). IREM de Montpellier.

Friedman M. (2018). *A History of Folding in Mathematics*. Basilea, Birkhauser.

Magrone P., & Millán Gasca A. (2017). Towards a better understanding of hands-on approaches in maths education: a reflection from compared experiences in higher, secondary and primary education. Abstract in T. Ramiro-Sánchez et al. (Eds.), *Proceedings 5th International Congress of Educational Sciences and Development, Santander (Spain)*, p. 434.

Magrone P., Massenzi S., & Millán Gasca A. (2019). Rhythmical pulsation: art, mimesis and mathematics in primary school following Mary Everest Boole. *Journal of Mathematics & the Arts*, special issue on Education, 13, (1&2), 100-111.

Millán Gasca A., & Vale P. (2021). Re-placing mathematics into cultural heritage: a path for educational and social inclusion. In A. Poce (a cura di), *Veicolare l'inclusione attraverso il patrimonio, Alcuni risultati del progetto Inclusive Memory dell'Università Roma Tre,* (pp. 195-232). Napoli, ESI.

Morando P., & Spreafico M.L. (2022). Origami e strategie di apprendimento. *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 11, 121-134.

Ostrowska-Wawryniuk K., Strzała M. & Słyk J. (2022) Form Follows Parameter: Algorithmic-Thinking-Oriented Course for Early-stage Architectural Education. *Nexus Netw J* 24, 503–522.

Pagano A., & Tedeschini Lalli L. (2005). Università di Roma Tre, 1995-2005 Architecture and Mathematics. *Nexus Netw J*, 7, 89-97.

Pedemonte O. (2001) Mathematics for Architecture: Some European Experiences. *Nexus Netw J* 3, 129–135.

Richtáriková D. (2015). Mathematics Preparatory Course and its Effectiveness. In D. Velicova et al. (Eds.), *Aplimat 2015 - Proceedings of 14th Conference on Applied Mathematics, Bratislava*, (pp. 672-681). New York, Curran Associates.

Richtáriková D. (2016). Supporting Methods in Mathematics Effectiveness of Mathematics Workshops. In L. Balko et al (Eds), *Aplimat 2016 - Proceedings of 15th Conference on Applied Mathematics, Bratislava,* (pp. 959-966). New York, Curran Associates.

Row S. (1893). *Geometric exercises in paper folding*. Madras, Addison and Co.

Spadafora G. (2020). Modelli reali e virtuali per l'insegnamento della geometria descrittiva. *Annali online della didattica e formazione docente*, 13 (20), 125-142.

Thom R. (1979). La Matematica moderna, esiste?. In C. Sitia (a cura di) *La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche e orientamenti* (pp. 111-129). Bologna, Pitagora.

Spreafico M.L. (2022). Creatively Contextualizing the Math course for Architecture Freshmen. Apparirà in *Proceedings of 14th International Conference on Education and New Learning Technologies.* Valencia, lated Academy.

Data di ricezione dell'articolo: 28 aprile 2022
Date di ricezione degli esiti del referaggio in doppio cieco: 26 maggio e 8 giugno 2022
Data di accettazione definitiva dell'articolo: 25 ottobre 2022