

Contro la paura della matematica

Federico Batini, Giulia Toti, Lucia Busti, Federica Filippucci

Abstract – *The results of a process of research-training and educational experimentation, conducted at the comprehensive school “Melanzio-Parini” of Castel Ritaldi, are presented here. In a multiannual relationship of research-training it was decided, with the teachers involved, to introduce and monitor active teaching and for skills. The main idea is to increase the learning of all primary school children, while increasing the motivation to learn, curiosity, involvement and active participation. In this paper we present what has been achieved, over the last year, towards mathematics. This year’s work is a part of a multiannual course of action research, which followed the paradigm of research-training, oriented to the formation/transformation of educational and didactic action and to the promotion of teacher reflexivity, characterized by doing research in school with the full participation of teachers¹. Active didactics, skills teaching, use of games and multiple references to the reality and to the experience of children in first and third grades of primary school, have been implemented. Before and after the didactic intervention the effects in relation to the acquisition of numerical knowledge, the skills related to the written operations, the accuracy and the automation of the procedures to work with numbers were detected. The results in the dimension in question, evaluated by AC-MT 6-11², show an increase in the above mentioned dimensions, suggesting that these didactics may have had a direct effect on the subjects’ learning.*

Riassunto – *Vengono qui presentati i risultati di un processo di ricerca formazione e di sperimentazione didattica condotta presso l’Istituto comprensivo “Melanzio-Parini” di Castel Ritaldi. In un rapporto pluriennale di ricerca formazione si è deciso, con le insegnanti coinvolte, di introdurre e monitorare didattiche attive e per competenze. L’idea guida è quella di incrementare gli apprendimenti di tutti i bambini della scuola primaria accrescendo, al contempo, la motivazione ad apprendere, la curiosità, il coinvolgimento e la partecipazione attiva. In questo contributo, in particolare, viene presentato ciò che è stato realizzato, nel corso dell’ultimo anno, nei confronti della matematica. Il lavoro di quest’anno rientra in un percorso pluriennale di ricerca azione, che ha seguito il paradigma della ricerca formazione, orientata alla formazione/trasformazione dell’agire educativo e didattico e alla promozione della riflessività dell’insegnante, caratterizzata dal fare ricerca nelle scuole con la piena partecipazione degli insegnanti³. Sono stati implementati percorsi di didattica attiva, didattica per competenze, utilizzo di giochi e riferimenti plurimi alla realtà e all’esperienza dei bambini delle classi prime e terze della scuola primaria. Prima e dopo l’intervento didattico sono stati rilevati gli effetti in relazione all’acquisizione di conoscenze numeriche, alle abilità relative alle operazioni scritte, all’accuratezza e all’automatizzazione delle procedure per lavorare con i numeri. I risultati, ottenuti sulle dimensioni citate sono stati valutati attraverso il test AC-MT 6-11⁴ e mostrano un incremento nelle dimensioni sopracitate, suggerendo che tali didattiche possano avere avuto un effetto diretto sugli apprendimenti dei soggetti.*

¹ Cfr. G. Asquini (a cura di), *La ricerca-formazione. Temi, esperienze e prospettive*, Milano, FrancoAngeli, 2018.

² Cfr. C. Cornoldi, D. Lucangeli, M. Bellina, *AC-MT (6-11). Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi – Gruppo MT*, Trento, Erickson, 2012.

³ Cfr. G. Asquini (a cura di), *La ricerca-formazione. Temi, esperienze e prospettive*, cit.

⁴ Cfr. C. Cornoldi, D. Lucangeli, M. Bellina, *AC-MT (6-11). Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi – Gruppo MT*, cit.

Keywords – active teaching, teaching for skills, difficulties in mathematics, motivation, mathematics anxiety

Parole chiave – didattica attiva, didattica per competenze, difficoltà in matematica, motivazione, ansia della matematica

Federico Batini, PhD, è Professore associato presso l'Università di Perugia dove insegna *Pedagogia sperimentale, Metodologia della ricerca educativa, Metodi e tecniche della valutazione scolastica, Educazione alla lettura*. Autore di oltre 300 pubblicazioni scientifiche, dirige la Rivista di classe A "Lifelong Lifewide Learning" e numerose collane editoriali. Con il libro *Dropout* (Fuorionda, 2014) ha vinto il Premio Italiano di Pedagogia 2015; con il libro *Identità sessuale a scuola: un'assenza ingiustificata* (Loescher, 2014) è stato finalista al premio nazionale di Divulgazione Scientifica. Ideatore del metodo dell'orientamento narrativo (1997), ha fondato Pratika (www.pratika.net), Nausika e LaAV (www.narrazioni.it). Tra le ultime pubblicazioni in volume: *Leggimi ancora. Lettura ad alta voce e life skills; Leggere ad alta voce. Metodi e strategie per costruire competenze per la vita* (entrambi editi da Giunti Scuola). Con Simone Giusti, Giusy Marchetta e Vanessa Roghi ha appena pubblicato *La scuola è politica* (Effequ edizioni).

Giulia Toti è Borsista di ricerca presso il Dipartimento di Filosofia, Scienze sociali, Umane e della Formazione (FISSUF) dell'Università di Perugia. Laureata in Valutazione del funzionamento individuale in psicologia clinica e della salute. Collabora con la Rivista "Lifelong Lifewide Learning". I suoi campi di interesse e di ricerca riguardano i processi di lettura, l'ascolto narrativo e l'empowerment cognitivo, la prevenzione e il contrasto della dispersione scolastica. Ha pubblicato articoli scientifici su riviste nazionali e internazionali.

Lucia Busti è Laureata in Scienze della Formazione Primaria, presso l'Università degli Studi di Perugia.

Federica Filippucci è Laureata in Scienze della Formazione Primaria, presso l'Università degli Studi di Perugia.

Il lavoro è il frutto di un gruppo di ricerca, tuttavia possono essere attribuiti a Federico Batini i paragrafi da 1 a 6, a Giulia Toti i paragrafi da 7 a 10, a Lucia Busti i paragrafi 11 e 12, a Federica Filippucci i paragrafi 13 e 14. Una menzione particolare tra le insegnanti che hanno partecipato va a quelle protagoniste dirette della sperimentazione didattica: Nella Propersi, Giorgia Rosati, Giorgia Capaldini ma il nostro ringraziamento si estende a tutte le insegnanti che, anche indirettamente, hanno facilitato lo svolgersi della ricerca formazione.

1. Introduzione

La "conquista del numero" è un'esperienza tra le più affascinanti compiute dai bambini, lo sviluppo dell'intelligenza numerica è un processo che inizia molto presto e che prosegue molto a lungo. Per quali strade i bambini arrivano a riconoscere le quantità, a rappresentarle e utilizzarle attraverso un complesso sistema simbolico?

Come è noto si sono distinte due linee interpretative: da una parte la prospettiva Piagetiana con le successive rielaborazioni, centrata sull'idea di stadi di sviluppo predeterminati; dall'altra

le ricerche contemporanee attente a mettere a fuoco l'interdipendenza cognitiva dei sistemi di elaborazione dei numeri e del linguaggio.

Le ricerche sperimentali condotte a partire dagli anni '80 hanno dimostrato in realtà che una forma di rappresentazione della numerosità è presente fin dalla nascita e che fino ai sei anni può essere corrotta da percezioni visive, come ad esempio la disposizione spaziale e la grandezza degli oggetti dell'insieme.

Una serie di studi, a partire da quelli pionieristici di Starkley nel 1980, ha mostrato la presenza di aspettative matematiche in neonati. Successivamente, si è riusciti a dimostrare, utilizzando il tempo di attenzione come indicatore, come i neonati non soltanto abbiano attese matematiche ma possiedano, sin dai primi giorni di vita, l'abilità di discriminare fra piccole quantità senza bisogno di saper contare. Tale processo percettivo-visivo è limitato al riconoscimento di 3 o 4 elementi ed è definito *subitizing*.

Negli stessi anni altri studi dimostravano la capacità di diversi animali di discriminare tra serie di elementi diversi in base alla loro numerosità.

Le ricerche successive hanno poi dimostrato che, a pochi mesi di vita, i bambini sono in grado di individuare relazioni quantitative di maggioranza, minoranza e uguaglianza: hanno cognizioni di quantità estremamente precoci ed evolute. Non si può parlare di un riconoscimento della numerosità perfetto, ma della capacità di cogliere la quantità nel confronto tra più insiemi.

Pertanto, il bambino passa da abilità di conteggio pre-verbali, innate, come i *subitizing* o il processo di stima, ad abilità di conteggio verbali che dipendono dalla cultura e dal contesto.

2. La matematica e la vita quotidiana

A livello mondiale, l'istruzione risulta essere l'elemento più importante per favorire lo sviluppo economico di un paese, attraverso lo sviluppo di persone autonome e competenti. In questo contesto, l'apprendimento di abilità matematiche di base risulta essere un importante prerequisito per vivere efficacemente, influenzando la partecipazione e il successo in molte carriere⁵, poiché è strettamente correlata alla risoluzione e al processo decisionale praticamente in qualsiasi settore⁶.

Tuttavia, gran parte degli studenti, sin dal loro primo approccio a questa disciplina, la percepiscono come una materia complicata, difficile, complessa e astratta⁷ specialmente perché

⁵ Cfr. S. L. Beilock, E. A. Maloney, *Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored*, in "Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences", 2(1), 2015, pp. 4-12; A. M., Ferguson, E. A. Maloney, J. Fugelsang, E. F. Risko, *On the relation between math and spatial ability: The case of math anxiety*, in "Learning and Individual Differences", 39, 2015, pp. 1-12.

⁶ Cfr. Y. Suleiman, A. Hammed, *Perceived Causes of Students' Failure in Mathematics in Kwara State Junior Secondary Schools: Implication for Educational Managers*, in "International Journal of Educational Studies in Mathematics", 6(1), 2019, pp. 19-33.

⁷ Cfr. H. Dodeen, F. Abdelfatta, S. Alshumrani, *Test-taking skills of secondary students: the relationship with motivation, attitudes, anxiety and attitudes toward tests*, in "South African Journal of Education", 34(2), 2014, pp. 1-18.

strutturata secondo una logica di continuità che prende avvio da nozioni e procedure molto semplici fino ad arrivare a nozioni e procedure notevolmente più complesse.

L'apprendimento della matematica risulta essere un processo interessante in quanto consente di esplicitare ragionamenti e capacità logiche e aiuta gli individui ad agire nella società.

L'apprendimento della matematica ha una ricaduta importante sulle necessità quotidiane, ma non può essere intesa soltanto come un insieme di teoremi, assiomi e algoritmi, piuttosto come un tessuto riccamente intrecciato di connessioni che coinvolge la capacità di visualizzare, immaginare, manipolare, analizzare e astrarre idee associative⁸. Apprendere la matematica non significa utilizzare solo regole imparate a memoria proposte da insegnanti e libri di testo, fare calcoli impensabili, risolvere problemi attraverso passaggi ripetitivi e sempre uguali per ogni situazione (numerosi studi dimostrano come la ripetizione dell'esercizio non solo non genera conoscenza ma la inficia a causa della noia e della mancanza di creatività che ciò comporta)⁹. La matematica oggi viene intesa come una modalità di lettura del quotidiano, come strumento per risolvere situazioni nuove e concrete¹⁰.

Nel contesto scolastico deve avvenire la *ri*-contestualizzazione della nozione: gli allievi si impossessano di nozioni "per farne qualcosa", in questo senso la matematica può essere vista come una delle discipline più importanti del curriculum scolastico¹¹ e costituisce uno strumento fondamentale per l'apprendimento delle discipline scientifiche come tecnologia, astronomia, grafica, industria, ragionamento analitico nella vita quotidiana¹².

Secondo Onwuachu e Nwakonobi¹³ la matematica è la base sulla quale gira l'essenza della vita e la piattaforma per le innovazioni scientifiche e tecnologiche.

La matematica incoraggia l'abitudine all'autosufficienza e aiuta gli studenti a pensare e risolvere i propri problemi da soli¹⁴. Makarfi¹⁵ ha osservato come la matematica abbia svolto un ruolo

⁸ Cfr. A. M. Gbolagade, A. A. Wahead, S. O. Sangoniya, *Demystifying Mathematics phobia in schools for transforming Nigeria in attaining Vision 20:2020* in "International Journal of Academic Research in Business and Social Studies", 3(2), 2013, pp. 188-196.

⁹ Cfr. B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, *Matematica come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*, Firenze, Giunti Scuola, 2012.

¹⁰ G. Kaur, *Math-Phobia: Causes and Remedies* in "International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)", 5, VI, 2017.

¹¹ Cfr. Y. Suleiman, A. Hammed, *Perceived Causes of Students' Failure in Mathematics in Kwara State Junior Secondary Schools: Implication for Educational Managers*, in "International Journal of Educational Studies in Mathematics", 6(1), 2019, pp. 19-33.; A. E. Schwartz, *Axing Math Anxiety*, in "Education Digest", 65(5), 2000, pp. 62-64.

¹² Cfr. M. Fajemidagba, M. Salman, O. Ayinla, *Effect of teachers' instructional strategy pattern on senior secondary school students' performance in mathematics word problems in Ondo State, Nigeria*, in "Journal of Education and Practice", 3, 7, 2012.

¹³ Cfr. W. C. Onwuachu, F. E. Nwakonobi, *Students' Evaluation of Classroom Interaction of their Biology Teachers: Implication for Curriculum Implementation. African Research Review*, in "International Multi Disciplinary Journal", 3(1), 2009, pp. 349-361.

¹⁴ Cfr. O. Adedayo, *Mathematics phobia, diagnosis and prescription*, National Mathematical Centre 1st Annual Lecture, Abuja, 1997.

¹⁵ Cfr. U. M. Makarfi, Keynote Address delivered at the opening ceremony of the 38th Annual Conference of Mathematical Association of Nigeria held in Katsina, 2001.

importante nello sviluppo della società dall'era preistorica ad oggi e come il suo ruolo sia oggi più significativo che mai e lo sarà ancora di più nel futuro.

Tshabalala e Ncube¹⁶ a Sa'ad, Adamu e Sadiq¹⁷ hanno sottolineato che la carenza di insegnanti ben formati, l'inadeguatezza delle strutture didattiche, la mancanza di fondi per l'acquisto delle attrezzature necessarie, la scarsa qualità dei libri di testo, le classi numerose, gli insegnanti scarsamente motivati, la mancanza di laboratori e biblioteche, le attività di supervisione scarsamente presenti e coordinate, il trasferimento e cambiamento incessante di insegnanti e dirigenti, la promozione automatica degli alunni, il ruolo negativo degli esami pubblici sul processo di insegnamento-apprendimento e la disuguaglianza nelle opportunità di istruzione, sono tutti fattori che possono ostacolare l'acquisizione regolare delle conoscenze e abilità matematiche.

3. Il rapporto con la matematica: le risposte delle indagini nazionali

Dal 2006, con la Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio dell'Unione Europea¹⁸ *Competenze chiave per l'apprendimento permanente*, la competenza matematica muta in relazione alle richieste della società, diventa infatti indispensabile fornire agli alunni progressivamente, nei diversi gradi scolastici, quelle competenze chiave che sono necessarie "per la realizzazione e lo sviluppo personali, l'occupabilità, l'inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa in società pacifiche, una gestione della vita attenta alla salute e alla cittadinanza attiva".

Nella Raccomandazione tutte le competenze sono delineate come "una combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto", ponendo così, per quanto riguarda la matematica, l'accento sull'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere problemi (fulcro della progettazione matematica), sul processo e sul linguaggio matematico, senza dimenticare l'importanza di presentare problematiche riconducibili a situazioni di vita quotidiana. Si parla inoltre di "attitudine positiva", termine sostituito nella Raccomandazione Europea e del Consiglio dell'Unione Europea *Competenze chiave per l'apprendimento permanente, del 2018*¹⁹, con la parola atteggiamenti, definiti come "la disposizione e la mentalità per agire o reagire a idee, persone o situazioni".

¹⁶ T. Tshabalala, A. C. Ncube, *The Causes of Poor Performance of Ordinary Level Pupils In Mathematics in Rural Secondary Schools in Nkayi District: Learner's Attritions*, in "Nova Journal of Medical and Biological Sciences", 1, 1, 2012.

¹⁷ Cfr. T.U. Sa'Ad, R.Usman, *The Causes of Poor Performance in English Language Among Senior Secondary School Students in Dutse Metropolis*, <https://www.academia.edu>, 2014.

¹⁸ Cfr. Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio, 18 dicembre 2006, relativa a *Competenze chiave per l'apprendimento permanente*, in <https://eurlex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:39-4:0010:0018:IT:PDF>.

¹⁹ Cfr. Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio, 22 maggio 2018, relativa a *Competenze chiave per l'apprendimento permanente*, in [https://eur-lex.europa.eu/legalcontent/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:3201-8H0604\(01\)&from=EN](https://eur-lex.europa.eu/legalcontent/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:3201-8H0604(01)&from=EN).

I risultati di indagini internazionali come OCSE-PISA del 2015 mostrano come uno studente su cinque abbia gravi difficoltà nell'acquisizione di competenze sufficienti in matematica. Risultati che richiamano l'attenzione e ribadiscono la necessità di migliorare i processi di insegnamento e apprendimento in ambito matematico, senza limitare l'accesso a tali competenze ad una cerchia ristretta di studenti.

I dati TIMSS 2015, che valutano le performance in matematica e scienze degli alunni di quarta elementare e terza media, mostrano un peggioramento poiché presentano dati peggiori rispetto alla rilevazione del 2011. Ciò che preoccupa maggiormente è che gli allievi delle scuole primarie italiane hanno perso terreno rispetto alla maggior parte dei paesi partecipanti all'indagine e dopo quattro anni, in terza media, le cose peggiorano: con 494 punti di score (quattro in meno rispetto alla rilevazione precedente) i ragazzini italiani si collocano sotto la media TIMSS.

Da una parte i documenti ufficiali suggeriscono la necessità di fornire agli studenti di ogni ordine e grado una visione più positiva della matematica, incoraggiandoli a pensarla come una disciplina dinamica, fortemente ancorata alla quotidianità e ricca di stimoli²⁰, dall'altra i risultati delle indagini PISA e TIMSS, evidenziano uno scarso rendimento scolastico in matematica e lo spiegano come fenomeno complesso e con molte cause²¹.

Le ricerche effettuate circa il rapporto degli studenti con la matematica mostrano che in Italia oltre il 20% degli studenti incontra difficoltà nell'apprendimento della matematica²².

Con il termine difficoltà si fa riferimento a quegli ostacoli che qualsiasi studente affronta durante il suo percorso di studi, non a disturbi specifici come la discalculia che riguardano una percentuale di studenti che oscilla da 0,5% all'1%, come riportano i dati IARLD (*International Academy for Research in Learning Disabilities*) del 2005.

4. Le difficoltà che incontrano gli studenti

Ci sono molte ragioni per spiegare la difficoltà incontrata dagli studenti in matematica, che possono variare da curriculum a curriculum e da argomento a argomento: le difficoltà riguardano il come si costruiscono i concetti matematici, la dicotomia astratto-concreto, ci sono le difficoltà connesse a quello che è stato definito come linguaggio *denso* della matematica, fino ad arrivare alle difficoltà nella gestione dell'errore e nel suo utilizzo ai fini di apprendimento sia da parte dell'insegnanti che dei bambini.

Il Kerala Curriculum framework del 2007 presenta diversi motivi di difficoltà in matematica. Tra questi vi è la difficoltà nell'immaginazione dei principi di base, le difficoltà teoriche che la

²⁰ Cfr. Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della scuola dell'Infanzia e del primo ciclo d'Istruzione*, D. M. 254 del 16 Novembre 2012.

²¹ Cfr. Eurydice, *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*, 201; I.V.S. Mullis, M.O. Martin, P. Foy, *TIMSS 2007 International Mathematics Report Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*, Chestnut Hill, MA, Boston College, TIMSS and PIRLS international Study Center, 2008.

²² Cfr. D. Lucangeli, M. Dupuis, E. Genovese, G. Rulli, *L'apprendimento difficile*, Quaderni del Centro Nazionale di Documentazione e analisi per l'infanzia e l'adolescenza, Firenze, Istituto degli Innocenti, 2006.

matematica presenta, la natura ripetitiva degli esercizi per acquisire competenza nei calcoli matematici, la discrepanza spesso presente tra la matematica nella vita quotidiana e la matematica a scuola, l'introduzione improvvisa di molte cifre e segni matematici e l'importanza data ai metodi di calcolo prestabiliti²³.

Nello studio di Tambychik e Meerah del 2010²⁴ è stato evidenziato come gli studenti delle scuole primarie mancassero di comprensione di termini matematici e gli studenti delle scuole secondarie mancassero di comprensione del linguaggio matematico, il che causa ostacoli nella comprensione dell'obiettivo del problema e influisce sulla capacità di risolverlo. Gli stessi autori riportano altre difficoltà rispetto alla risoluzione di compiti matematici elencati già da Garnett²⁵ che includono la padronanza incompleta dei fatti numerici, la debolezza dell'abilità computazionale, l'incapacità di collegare aspetti concettuali della matematica, l'inefficienza nel trasferire la conoscenza, la difficoltà a stabilire una connessione significativa tra le informazioni, l'incompetenza nel trasformare le informazioni in una forma matematica, un'incompleta comprensione del linguaggio matematico e difficoltà nel comprendere e visualizzare concetti matematici.

Il linguaggio matematico rappresenta dunque una delle cause delle difficoltà incontrate dagli alunni e dagli studenti in matematica, anche perché espressioni come "tracciare la circonferenza" o "sovrapporre due esagoni", sono tutte metafore nelle quali vengono usate parole che si riferiscono alla realtà concreta, pur parlando di oggetti ideali, astratti, ben lontani dalla concretezza e spesso, senza mai avvisare gli stessi studenti di ciò che si sta facendo.²⁶

Allo stesso modo, alcune problematiche possono essere determinate da lacune precedenti nell'apprendimento matematico che impediscono gli apprendimenti di concetti più avanzati²⁷. Questa tipologia di difficoltà può sorgere quando gli studenti non riescono ad accedere a determinati concetti a causa di trasferimenti, malattie o altri motivi personali²⁸.

Le difficoltà incontrate nella costruzione dei concetti e nell'ambiguità del linguaggio da parte degli alunni generano errori.

Una delle convinzioni che maggiormente ostacolano l'apprendimento della matematica e impauriscono gli studenti è rappresentata dal fatto che la matematica venga presentata come una disciplina in cui c'è sempre una e un'unica soluzione. Se il risultato non è corretto ci si limita a segnare l'errore che rappresenterà, per il bambino, un elemento esterno da evitare a tutti i costi, un ostacolo che non può avere conseguenze positive²⁹. Questa prospettiva rischia di far perdere di vista le cause che hanno contribuito a generare l'errore e a non lavorare sul

²³ Cfr. Kerala Curriculum Framework, SCERT Kerala, 2007

²⁴ T. Tambychik, T.S.M. Meerah, *Students' difficulties in mathematics problem-solving: what do they say?*, in "Procedia-Social and Behavioral Sciences", 8, 2010, pp. 142-151.

²⁵ Cfr. K. G. Garnett, *Maths Learning Disabilities*, in "Journal of CEC", 1998, Retrieved on 3rd Feb 2009 from http://www.idonline.org/ld_indepth/math_skill/garnet.html.

²⁶ Cfr. B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, *Matematica come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*, cit.

²⁷ Cfr. E. F. Farrell, *Taking anxiety out of the equation* in "Chronicle of Higher education", 52(19), 2006, pp. 41-42.

²⁸ Cfr. M. Freiberg, *Math- that four-letter word!* In "Academic Exchange Quarterly", 9(3), 2005, pp. 7-11.

²⁹ Cfr. P. Di Martino, R. Zan, *Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional*, in *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Ankara, Middle East Technical University, 2013.

ragionamento che il bambino ha messo in atto, inevitabilmente si ripercuoterà sulla percezione che il bambino ha delle proprie abilità, sulla visione della matematica e sulla motivazione ad apprendere³⁰. Occorre iniziare a ragionare sull'errore come aspetto connotato di valenza positiva, spostando l'attenzione sui processi di apprendimento che l'alunno attiva, sui suoi sforzi, le sue difficoltà e sugli stessi errori³¹. L'errore è occasione di scoperta e di esplorazione per costruire nuove conoscenze³², non bisogna generare la "paura di sbagliare" che determina atteggiamenti negativi nei confronti della matematica che si trasformano in "paura" della matematica medesima³³.

Lo studio portato avanti da Di Martino e Zan³⁴ circa l'atteggiamento degli alunni nei confronti della matematica mostra come negli elaborati degli studenti si possano rintracciare delle costanti: la visione della matematica, la disposizione emotiva nei confronti della disciplina e la percezione degli studenti di essere in grado o meno di saper fare. Il modo in cui questi elementi sono interconnessi tra loro implica una visione negativa o positiva della matematica, ma possono convivere entrambe le concezioni. Molto spesso l'espressione mi piace/non mi piace è associata alla convinzione di essere capaci/non essere capaci in matematica.

Un'altra interessante ricerca è stata portata avanti da Rosetta Zan³⁵ in una classe seconda di un liceo pedagogico. Gli studenti avevano evidenziato difficoltà, errori e fallimenti nonostante i ripetuti interventi didattici che erano stati messi in atto. Indagando più in profondità tale problematica i risultati ottenuti sono stati molto interessanti perché hanno evidenziato che un intervento mirato al recupero delle abilità matematiche, siano la risoluzione di problemi o l'applicazione di formule, deve essere anche in grado di scardinare le convinzioni che lo studente ha di fallire perché si crede incapace e deve intervenire sulla sua visione della matematica, probabilmente influenzata dalla visione dell'insegnante.

Nelle risposte degli studenti si coniugano quindi: le convinzioni che hanno su se stessi, la percezione di non riuscire a controllare la disciplina, uno scarso senso di autoefficacia.

³⁰ Cfr. C. Coppola, P. Di Martino, *Il problem solving come strategia per una diversa gestione dell'errore nell'educazione matematica al primo ciclo*, in "Annali online della Didattica e della Formazione Docente", 9, 14, 2017, pp. 76-90.

³¹ Cfr. R. Zan, *Difficoltà in matematica: Osservare, Interpretare, Intervenire. Convergenze*, Milano, Springer-Verlag Italia, 2007.

³² Cfr. C. Coppola, P. Di Martino, *Il problem solving come strategia per una diversa gestione dell'errore nell'educazione matematica al primo ciclo*, cit.

³³ Cfr. P. Di Martino, R. Zan, *Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional*, cit.

³⁴ P. Di Martino, R. Zan, *Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students' narratives*, in "Journal of Mathematics Teacher Education", 13(1), 2010, pp. 27-48.

³⁵ R. Zan, *Difficoltà in matematica: 1ª puntata osservare, 2ª interpretare, 3ª intervenire*, in B. D'Amore (a cura di), *Atti del convegno nazionale. La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*, Lecce, Tricase, 2014.

Questo tipo di atteggiamento viene definito da Seligman, già nel 1967 “impotenza appresa”, ed è caratterizzato da un senso di incapacità/impotenza, acquisito per effetto di ripetute esperienze di fallimento³⁶. Il concetto in ambito matematico sta ad indicare la situazione di un soggetto che, esposto a ripetute situazioni di insuccesso legato alla disciplina, apprende di non essere capace. Lo studente attribuisce l'insuccesso a fattori esterni su cui non può agire e ciò lo conduce ad uno stato d'animo di rassegnazione, di passività che si estende alle situazioni analoghe a quelle vissute oppure attribuisce l'insuccesso a una propria insanabile incapacità nei confronti della disciplina medesima.

5. Fobia della matematica e trasmissione della paura

Una delle maggiori cause di scarso rendimento in matematica tra gli studenti è la paura/fobia nei confronti di questa disciplina, osservata già in bambini di 6-7 anni, indipendentemente dal background etnico³⁷.

La fobia della matematica può essere definita come una sensazione di ansia che impedisce di affrontare efficacemente i problemi matematici. Molti studenti hanno un atteggiamento negativo nei confronti della matematica che influenza il loro approccio alla risoluzione di problemi matematici che possono sfociare in fobia che a sua volta determina ulteriori prestazioni scarse nell'area disciplinare. Per Tobias e Weissbrod³⁸ la fobia matematica corrisponde a manifestazioni di panico, impotenza, paralisi e disorganizzazione mentale che si manifestano in alcune persone quando sono tenuti a risolvere un problema matematico. Gier e Bisanz³⁹ vedono invece il costrutto come un sentimento di tensione e ansia che interferiscono con la manipolazione dei numeri e la risoluzione di problemi matematici in un'ampia varietà di situazioni di vita ordinaria e accademiche.

Resta il fatto che la sensazione prolungata di fobia per la matematica ha un impatto negativo sull'interesse degli studenti per la materia, poiché produce “una risposta negativa specifica all'apprendimento o sullo svolgimento di attività matematiche che interferiscono con le prestazioni”⁴⁰. Tuttavia, Devine e colleghi⁴¹ esaminando un campione di circa 1.800 bambini delle

³⁶ Cfr. L. Y. Abramson, M. E. P. Seligman, J. D. Teasdale, *Learned helplessness in humans: Critique and reformulation*, in “Journal of Abnormal Psychology”, 87, 1978, pp. 49-74.

³⁷ Cfr. K. Kucian, U. McCaskey, R.O'G. Tuura, M. Von Aster, *Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children*, in “Translational Psychiatry”, 8, 2018; R. R. Harari, R. K. Vukovic, S. P. Bailey, *Mathematics anxiety in young children: an exploratory study*, in “J. Exp. Educ.”, 8, 2013, pp. 538-555; E. Aarnos, P. Perkkila, *Early signs of mathematics anxiety?*, in “Social and Behavioral Sciences”, 46, 2012, pp. 1495-1499.

³⁸ Cfr. S. Tobias, C. Weissbrod, *Anxiety and mathematics: an update*, in “Harvard Educational Review”, 50(1), 1980, pp. 63-70.

³⁹ Cfr. M.J. Gierl, J. Bisanz, *Anxiety and attitude related to Mathematics in grade 3 and 6* in “The Journal of Experimental Education”, 63(2), 1995, pp. 139-158.

⁴⁰ Cfr. J. M. Whyte, *Maths anxiety: The what, where, and how. Unpublished Masterate research report*, Palmerston North, Massey University, 2009, p.4

⁴¹ A. Devine, F. Hill, E. Carey, D. Szucs, *Cognitive and emotional math problems largely dissociate: prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety*, in “J Educ Psychol”, 110, 2018, pp. 431-444.

scuole primarie e secondarie di primo grado, hanno evidenziato come il 77% dei bambini presenti ansia nei confronti della matematica, ma solo il 20% ottenga punteggi scarsi in matematica e inoltre una recente meta-analisi ha evidenziato una maggiore correlazione tra ansia nei confronti della matematica e compiti matematici complessi⁴².

L'ansia matematica può avere origini multiple e, come notato da Shields⁴³, può essere perpetuata in casa, nella società, ma soprattutto in classe. Studi di ricerca⁴⁴ suggeriscono che, in combinazione con i fattori genitoriali e sociali, l'ansia verso la matematica può avere le sue radici nell'insegnamento e negli insegnanti stessi.

Difatti nonostante i bambini che iniziano la scuola abbiano, per la maggior parte, competenze matematiche iniziali ben sviluppate in matematica, è evidente come sia la classe il luogo in cui l'ansia e la fobia verso la matematica possono svilupparsi e prosperare. Alcune ricerche evidenziano l'importanza dell'insegnamento e degli insegnanti stessi⁴⁵.

L'ansia e la paura nei confronti della matematica che sperimentano gli insegnanti porta a conseguenze sullo studente stesso poiché spesso, gli insegnanti più ansiosi verso la matematica presentano minori convinzioni di essere in grado di svolgere l'insegnamento con successo⁴⁶. L'insegnamento di questi insegnanti è caratterizzato dall'eccessiva dipendenza da attività didattiche tradizionali: assegnare lo stesso lavoro a tutti; insegnare unicamente attraverso il libro di testo; insistere sull'esistenza di una sola procedura corretta per risolvere un problema; fornire le stesse istruzioni alla classe intera; valutare prevalentemente attraverso prove scritte⁴⁷. Questi insegnanti influiscono così negativamente sull'apprendimento della matematica dei propri studenti. Sono numerosi gli studi che evidenziano correlazione negativa tra l'ansia degli insegnanti verso la matematica e i risultati in matematica dei loro studenti⁴⁸. Pertanto, appare

⁴² Cfr. J. Namkung, P. Peng, X. Lin, *The Relation Between Mathematics Anxiety and Mathematics Performance Among School-Aged Students: A Meta-Analysis*, in "Review of Educational Research Month", XX, X, 2019, pp. 1-38.

⁴³ Cfr. D. J. Shields, *Teachers have the power to alleviate math anxiety*, in "Academic Exchange Quarterly", 9(3), 2005, pp. 326-331.

⁴⁴ M. Peker, *Pre-Service Teachers' Teaching Anxiety about Mathematics and Their Learning Styles*, in "Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education", 5(4), 2009, pp. 335-345; B. M. Vinson, *A comparison of preservice teachers' mathematics anxiety before and after a methods class emphasizing manipulatives*, in "Early Childhood Education Journal", 29(2), 2001, pp. 89-94.

⁴⁵ Cfr. B. M. Vinson, *A comparison of preservice teachers' mathematics anxiety before and after a methods class emphasizing manipulatives*, cit.

⁴⁶ Cfr. A.B. Bates, N.I. Latham, J.-A. Kim, *Do I Have to Teach Math? Early Childhood Pre-Service Teachers' Fears of Teaching Mathematics*, Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, v. 5, 2013; G. Gresham, *Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary pre-service teachers*, in "Teaching Education", 19, 2008, pp. 171-184; M. Bursal, L. Paznokas, *Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science*, in "School Science and Mathematics", 106, 2006, pp. 173-179.

⁴⁷ Cfr. S. P. Gurganus, *Math instruction for students with learning problems*, Boston, Pearson Education, 2007; D. J. Shields, *Teachers have the power to alleviate math anxiety*, cit.

⁴⁸ Cfr. E. A., Maloney, G. Ramirez, E.A. Gunderson, S.C. Levine, S.L. Beilock, *Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety* in "Psychological Science", 26(9), 2015, pp. 1480-1488; Cfr. K.M. Hadley, J. Dorward, *Investigating the relationship between elementary teacher mathematics anxiety, mathematics instructional practices, and student mathematics achievement*, in "Journal of Curriculum and

evidente che le azioni e i comportamenti degli adulti possano influire negativamente sull'apprendimento, le prestazioni e la costanza nello studio⁴⁹.

Beilock e colleghi⁵⁰ addirittura hanno evidenziato lo stesso tipo di correlazione in relazione allo stereotipo di genere secondo il quale le donne sarebbero meno brave in matematica. Nel loro studio emerge come le studentesse di sesso femminile, osservando le insicurezze delle loro insegnanti, arrivavano a credere che in quanto donne non sarebbero mai state brave in matematica.

Studi recenti⁵¹ hanno indagato la correlazione tra prestazioni matematiche e l'ansia verso questa materia di ragazzi e ragazze. Sebbene ragazzi e ragazze mostrassero livelli molto simili di ansia in matematica, solo nelle ragazze si evidenziava una correlazione negativa significativa dell'ansia con le prestazioni matematiche.

La cultura della classe, inoltre, può contribuire all'ansia e alla fobia nei confronti della matematica. Le esperienze di apprendimento in classi strutturate e rigide, che prevedono poche opportunità di dibattito o discussione, in cui si è invitati a concentrarsi sulla ricerca dell'unica risposta giusta, si offre un limitato incoraggiamento a riflettere, in cui ci si aspetta risposte rapide e vengono enfatizzati i test a tempo, contribuiscono a sviluppare la paura della matematica⁵².

6. Evitamento

Spesso gli studenti che manifestano ansia nei confronti di una specifica materia e che presentano una scarsa autostima o insicurezza possono sviluppare e attuare strategie differenti che deviano l'attenzione dalle loro capacità, tra queste ad esempio evitare la ricerca di aiuto, evitare il giudizio pubblico, evitare nuovi modi di risolvere i problemi o evitare, per quanto possibile, la disciplina stessa.

Instruction", 5(2), 2011, pp. 27-44; S. L. Beilock, E. A. Gunderson, G. Ramirez, S. C. Levine, *Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement*, in "Proceedings of the National Academy of Sciences", 107(5), 2010, pp. 1860-1863.

⁴⁹ Cfr. K. J. Stoehr, *Mathematics anxiety: One size does not fit all*, in "Journal of Teacher Education", 68(1), 2017, pp. 69-84; M. Vansteenkiste, J. Simons, W. Lens, K. M. Sheldon, E. L. Deci, *Motivating learning, performance, and persistence: the synergistic effects of intrinsic goal contents and autonomy-supportive contexts*, in "Journal of Personality and Social Psychology", 87(2), 2004, pp. 246-260.

⁵⁰ S. L. Beilock, E. A. Gunderson, G. Ramirez, S. C. Levine, *Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement*, cit.

⁵¹ H. I. Van Mier, T. Schleepen, F. Van den Berg, *Gender Differences Regarding the Impact of Math Anxiety on Arithmetic Performance in Second and Fourth Graders*, in "Frontiers in psychology", 9, 2690, 2019; T.M. Schleepen, H. I. Van Mier, *Math anxiety differentially affects boys' and girls' arithmetic, reading and fluid intelligence skills in fifth graders*, in "Psychology", 7, 2016, pp. 1911-1920; E. Zakaria, M.N. Norazah, *The Effects of Mathematics Anxiety on matriculation Students as Related to Mitivation and Achievement*, in "Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education", 4(1), 2007, pp. 27-30; X. Ma, J. Xu, *The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis*, in "Journal of Adolescence", 27(2), 2004, pp. 165-179.

⁵² Cfr. D. J. Shields, *Teachers have the power to alleviate math anxiety*, cit.

Alcuni studi evidenziano come gli individui che presentano ansia o fobia nei confronti della matematica spesso presentano anche comportamenti di evitamento che li portano a partecipare a un numero inferiore di lezioni di matematica (nei paesi in cui la matematica non è obbligatoria nella scuola secondaria di secondo grado) e partecipare meno attivamente alle lezioni, anche laddove possiedano adeguate abilità matematiche⁵³. L'esperienza dell'insuccesso produce il timore di poter sbagliare ancora, il quale a sua volta determina l'evitamento della situazione e può pertanto influenzare l'apprendimento della matematica⁵⁴.

Il legame teorico tra ansia matematica e successivo evitamento ha implicazioni significative per le prestazioni matematiche, in quanto porta alla creazione di un circolo vizioso che si traduce in una filiera di questo tipo: pratica limitata della matematica che da luogo a scarse prestazioni matematiche le quali determinano un aumento dell'ansia e in conclusione i comportamenti di evitamento⁵⁵.

Recentemente Choe e colleghi⁵⁶ hanno dimostrato che gli individui ansiosi nei confronti della matematica spesso evitano di esercitare sforzi in matematica anche se altamente ricompensati perché percepiscono i costi di un impegno in matematica tanto forti da superare i benefici.

L'ambiente che si crea in classe risulta essere un importante fattore predittivo dell'evitamento. Turner e colleghi⁵⁷ hanno dimostrato che tale comportamento è una classica risposta comportamentale ai professori il cui stile di insegnamento è freddo e di scarso supporto, sin dal primo giorno di scuola⁵⁸. Gli studenti che non ricevono contatto visivo, ad esempio hanno maggiore probabilità di mettere in campo risposte di evitamento: questo comportamento mina le prestazioni e contribuisce alla svalutazione dell'apprendimento e, progressivamente, all'abbandono scolastico.

⁵³ Cfr. K. W. Choe, J. Jenifer, C. Rozek, M. Berman, S. L. Beilock, *Calculated Avoidance: Math Anxiety Predicts Math Avoidance in Effort-Based Decision-Making*, in "Science Advances", 2019; G. Ramirez, T. S. Stacy, A. M. Erin, *Math Anxiety: Past Research, Promising Interventions, and a New Interpretation Framework*, In "Educational Psychologist", 53, 3, 2018, pp.145-164; R. Zan, *Difficoltà in matematica: Osservare, Interpretare, Intervenire. Convergenze*, Milano, Springer-Verlag Italia, 2007.

⁵⁴ Cfr. H. P. Douglas, J. LeFevre, *Exploring the influence of basic cognitive skills on the relation between math performance and math anxiety*, in "J Num Cog", 3, 2017, pp. 642-666; K. M. Finnigan, K. S. Corker, *Do performance avoidance goals moderate the effect of different types of stereotype threat on women's math performance?*, in "Journal of Research in Personality", 63, 2016, pp. 36-43; A. Dowker, A. Sarkar, C. Y. Looi, *Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years?*, in "Frontiers in psychology", 7, 508, 2016; B. Caponi, C. Cornoldi, G. Falco, R. Focchiatti, D. Lucangeli, *MeMa. Valutare la metacognizione, gli atteggiamenti negativi e l'ansia in matematica*, Trento, Erickson, 2012.

⁵⁵ Cfr. X. Ma, J. Xu, *The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis*, cit.

⁵⁶ K. W. Choe, J. Jenifer, C. Rozek, M. Berman, S. L. Beilock, *Calculated Avoidance: Math Anxiety Predicts Math Avoidance in Effort-Based Decision-Making*, cit.

⁵⁷ J. C. Turner, D. K. Meyer, E. M. Anderman, C. Midgley, G. Margaret, Y. Kang, *The Classroom Environment and Students' Reports of Avoidance Strategies in Mathematics: A Multimethod Study*, in "Journal of Educational Psychology", 94, 1, 2002, pp. 88-106.

⁵⁸ Cfr. H. Patrick, J. C. Turner, D. K. Meyer, C. Midgley, *How Teachers Establish Psychological Environments During the First Days of School: Associations With Avoidance in Mathematics*, in "Teachers College Record", 105(8), 2004, pp. 1521-1558.

Riconoscere, indagare e combattere la paura nei confronti della matematica è fondamentale per prevenire un'elusione della materia che potrebbe avere effetti per tutta la vita⁵⁹.

7. Le Sperimentazioni sul campo

Quanto qui viene presentato riguarda esclusivamente gli effetti sulle competenze matematiche di approcci didattici attivi rivolti ai bambini della scuola primaria, ma rientra in un percorso pluriennale di ricerca azione, che ha seguito il paradigma della ricerca formazione, orientata alla formazione/trasformazione dell'agire educativo e didattico e alla promozione della riflessività dell'insegnante caratterizzata dal fare ricerca nelle scuole e con gli insegnanti⁶⁰ dell'Istituto comprensivo "Melanzio-Parini" di Castel Ritaldi.

Tale approccio ha previsto un confronto continuo e sistematico fra i partecipanti alla ricerca, a cadenza mensile (con un'intensificazione nelle fasi iniziali e terminali di ogni anno scolastico), al fine di negoziare, chiarire e tarare obiettivi di apprendimento e didattiche, scelte valoriali e metodologiche a partire dall'esperienza dell'anno precedente. Le attenzioni metodologiche hanno riguardato l'attivazione e il coinvolgimento diretto dei bambini, l'utilizzo di giochi e di attività legate all'esperienza e alla vita quotidiana, l'alternanza di momenti di riflessione e momenti legati all'azione diretta, l'apprendimento come inteso anche come conquista, divertimento e l'errore come tappa naturale e normale dell'apprendimento, momento prezioso e rivelatore. Isolare una porzione di attività e concentrarsi su esiti determinati risulta quindi un artificio che non riesce a restituire la complessità della ricerca formazione nel suo complesso.

Questo segmento di ricerca partiva dall'ipotesi che l'utilizzo di didattiche attive e per competenze nella scuola primaria, con forte attenzione al coinvolgimento e alla motivazione possa aiutare gli alunni ad accrescere la propria motivazione ad apprendere, la curiosità, il coinvolgimento spontaneo e la partecipazione attiva, producendo, pertanto, effetti positivi sulla qualità e sulla generalizzazione degli apprendimenti.

La progettazione didattica, della quale sono state protagoniste le insegnanti e le laureande Busti e Filippucci, coautrici dell'articolo, è stata condotta in costante dialogo con il gruppo di ricerca e ha previsto più revisioni successive. Tutte le attività disciplinari sono state organizzate attraverso un lavoro di squadra che ha consentito di definire obiettivi di apprendimento pluridisciplinari, al punto che nella prima parte dell'anno non c'è stata distinzione di discipline o ore specifiche. Successivamente si è iniziato a suddividere il lavoro, mantenendo comunque un coordinamento e una condivisione di intenti in ogni attività. Il contributo si concentra, tuttavia, sui processi e sugli esiti relativi al lavoro svolto per l'acquisizione delle competenze matematiche.

⁵⁹ Cfr. E. Aarnos, P. Perkkilä, *Early signs of mathematics anxiety?*, cit.

⁶⁰ Cfr. G. Asquini (a cura di), *La ricerca-formazione. Temi, esperienze e prospettive*, cit.

8. Campionamento

La ricerca formazione è stata condotta su un campione non probabilistico, individuato in base alle classi aderenti spontaneamente al progetto.

Le sperimentazioni si dividono dunque in due macro-gruppi nei quali sono stati effettuati due tipi di intervento didattico diversi: un gruppo di classi prime e un gruppo di classi terze.

La prima sperimentazione, avviata nel mese di dicembre 2018 e conclusa nel mese di maggio 2019, ha visto il coinvolgimento di studenti appartenenti alle classi prime della scuola Primaria di Castel Ritaldi, formate entrambe da 15 bambini, che costituivano il gruppo sperimentale e di studenti appartenenti alle classi prime della scuola Primaria di Bastardo, rispettivamente composte da 15 e da 18 alunni.

La seconda sperimentazione, avviata nel mese di gennaio 2019 fino a fine maggio 2019, ha visto il coinvolgimento di studenti appartenenti a classi terze, composte rispettivamente da 12 e 13 alunni.

9. Ipotesi di ricerca

Come già documentato nei paragrafi precedenti sono numerose le ricerche che hanno evidenziato come la matematica rappresenti una disciplina che mette in difficoltà molti studenti. Una delle problematiche che accompagna tale disagio riguarda la motivazione ad apprendere la disciplina, motivazione che talvolta viene azzerata da feedback negativi in successione ricevuti dall'insegnante, dall'utilizzo esclusivo di una didattica frontale monologante e tradizionale (l'insegnante spiega e gli alunni ascoltano) e dal luogo comune che definisce la matematica come una disciplina molto difficile.

Facile che si sviluppi, allora, un rapporto conflittuale in cui la paura di sbagliare, la convinzione di non riuscire e il rimanere passivi nei confronti dei processi di pensiero sollecitati dalla disciplina, rappresentano alcuni dei possibili atteggiamenti assunti dagli studenti nei confronti della disciplina.

L'idea di mostrare la matematica da altre prospettive e imparare a guardarla con occhi diversi ha informato di sé il lavoro condotto dal gruppo di ricerca insieme alle insegnanti. L'ipotesi era che questo approccio potesse produrre risultati di apprendimento significativi.

Il percorso di ricerca ha previsto una somministrazione iniziale dei test AC-MT per sondare le capacità di calcolo e di risoluzione dei problemi di ciascun bambino, delineare le criticità su cui lavorare e i punti fermi da cui ripartire.

Le analisi dei risultati del test iniziale combinate con quelli che sono i profili delineati dalle insegnanti di classe, ci hanno permesso di progettare una didattica adeguata che avesse chiari gli obiettivi in termini di recupero e di potenziamento. I test hanno permesso di definire la situazione in ordine all'intelligenza numerica all'interno dei gruppi sperimentali, al fine di poter colmare le difficoltà e ottenere un ulteriore miglioramento.

Dal punto di vista metodologico, sono state proposte attività ludiche, di problem solving, legate all'esperienza quotidiana o con forte attinenza con la realtà, per coinvolgere i bambini e

renderli attivi nella co-costruzione della conoscenza. Al termine delle attività sono stati somministrati nuovamente i test per veder se gli interventi didattici messi in atto siano stati funzionali al raggiungimento dell'obiettivo.

10. Gli strumenti di rilevazione

Per le classi campione sono stati somministrati i test AC-MT 6-11 - *Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione dei problemi*⁶¹. Si tratta di una prova oggettiva, di rapida somministrazione, dotata di buone proprietà psicometriche, che ha come finalità principale l'accertare il livello di apprendimento del calcolo (valutazione di base) e verificare eventuali difficoltà nel calcolo matematico per poter progettare specifici interventi di recupero.

Il test di calcolo AC-MT è una prova strutturata che si compone di tre parti distinte: una prima parte definita "carta e matita" che può essere somministrata al singolo bambino, ad un gruppo di bambini o al gruppo classe; una seconda parte da somministrare individualmente e un'ultima parte che riguarda invece la soluzione di problemi aritmetici prevista solo a partire dalla terza classe (aggiunta nell'ultima edizione del test). A ciascuna di queste parti è assegnato un punteggio che si differenzia secondo 4 livelli: livello ottimale, livello sufficiente, richiesta d'attenzione e richiesta d'intervento. I punteggi sono divisi in quattro fasce di prestazione: la fascia "ottimale" interessa i bambini che padroneggiano completamente l'abilità, la "sufficiente" riguarda i bambini che hanno intrapreso un corretto percorso nell'apprendimento, la "richiesta d'attenzione", invece, è riferita a bambini che presentano delle difficoltà, infine, la "richiesta d'intervento" interessa i bambini che presentano gravi difficoltà e richiedono un'attenta e immediata attenzione. Questa fascia è stata definita al quinto percentile. La prestazione "ottimale" è assegnata in mancanza di errori cioè ad una prestazione *perfetta*. Questa fascia di assegnazione dei punteggi risulta (nel caso particolare di questa ricerca) poco tollerante e adeguata considerando l'età dei bambini e i tempi di somministrazione del test.

La prova "carta e matita" viene presentata ai bambini collettivamente. È formata da operazioni scritte (addizioni, sottrazioni, divisioni e moltiplicazioni), giudizio di numerosità, trasformazione in cifre, ordinamento di numerosità dal minore al maggiore e ordinamento di numerosità dal maggiore al minore. Lo scopo di questa prima parte è di indagare le competenze del singolo alunno ma anche l'andamento generale della classe circa le abilità di calcolo.

Nella prova individuale oltre alla correttezza degli esercizi proposti è importante misurare il tempo impiegato per risolvere gli esercizi proposti. Le prove riguardano il calcolo mentale, il calcolo scritto, l'enumerazione da 100 a 50, il dettato di numeri e il recupero di fatti numerici. In questa fase si va ad indagare in modo più approfondito le componenti implicite delle abilità di calcolo.

⁶¹ Cfr. C. Cornoldi, D. Lucangeli, M. Bellina, *AC-MT (6-11). Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi – Gruppo MT*, cit.

Per quanto riguarda la prova relativa alla soluzione di problemi, è composta da 5 problemi in cui tutti hanno un quesito esplicito e 4 hanno anche un quesito implicito. In questa prova viene valutata l'abilità di problem solving del bambino, la sua capacità di ragionare e mettere in atto una strategia funzionale alla risoluzione del problema.

L'uso delle prove AC-MT 6-11⁶² risulta ottimale per la valutazione delle singole abilità poiché si ottengono indici su quattro aspetti fondamentali come il calcolo scritto, la conoscenza numerica, l'accuratezza e la velocità.

11. I percorsi didattici delle due sperimentazioni

Sperimentazione nelle classi prime

I percorsi didattici progettati, sono stati proposti ai soli gruppi sperimentali, durante le ore curriculari, mentre i gruppi di controllo hanno seguito la didattica tradizionale.

La metodologia che ha caratterizzato tutto il progetto è stata quella *laboratoriale* applicata a piccoli o grandi gruppi, in cui il *gioco* è stato presente molto spesso. Il gioco e/o la dinamica ludica sono stati usati come mezzo di approccio alle conoscenze, come campo d'azione per mettere in atto le competenze specifiche, e come esperienza nella quale socializzare, essere inclusi, avere un ruolo, aderire, senza avere la sensazione di fare qualcosa perché obbligati a farlo, ma solo per il gusto di imparare giocando.

L'intervento specifico ha avuto la durata complessiva di 60 ore per ogni sezione distribuiti in due incontri settimanali da due ore per un totale di quindici settimane, ha previsto due modalità di intervento: momenti individuali e momenti collettivi.

I momenti individuali sono stati pensati per stimolare attività di metacognizione e riflessione con il bambino sul percorso personale, sui miglioramenti raggiunti e su ciò che doveva ancora essere potenziato. Per la parte collettiva sono state progettate attività didattiche svolte con l'intero gruppo classe o a piccoli gruppi.

Le attività inserite nella progettazione didattica sono state finalizzate al potenziamento delle competenze di base dell'asse matematico, in particolare lavorando sul sistema del numero, sul calcolo a mente, su spazio e figure, relazioni, dati e previsioni, tecnologia, il gioco, le regole e il fair play.

Sperimentazione nelle classi terze

L'intervento, della durata complessiva di 20 ore per ogni sezione, ha proposto attività, volte ad intervenire su quegli aspetti che il test iniziale aveva rilevato come critici, proponendo per-

⁶² Cfr. C. Cornoldi, D. Lucangeli, M. Bellina, *AC-MT (6-11). Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi – Gruppo MT*, cit.

tanto attività di potenziamento delle abilità di calcolo e di problem solving in chiave ludica, presentate ogni lunedì ad entrambe le classi terze. In questa sperimentazione sono state previste due modalità di intervento: momenti a coppie e momenti collettivi, che coinvolgevano l'intero gruppo classe.

Le attività proposte, presentano una difficoltà crescente sia dal punto di vista dei meccanismi di gioco sia per le competenze richieste ai bambini. Un percorso graduale che è partito da attività in cui non era necessario avere una strategia personale perché le regole del gioco stabilivano in modo chiaro ogni passaggio, ad altre in cui veniva lasciato spazio all'iniziativa del bambino e all'elaborazione delle strategie, alla sua capacità di compiere scelte e motivarle, ad attivare abilità di logica e capacità di previsione. Un ruolo fondamentale è stato quello del feedback degli alunni rispetto alle dinamiche di gioco. Oltre al potenziamento delle competenze di base dell'asse matematico, si è lavorato in particolare sui concetti di peso lordo, peso netto e tara (calandoli nei contesti di vita quotidiana), sulla conoscenza delle tabelline, della moltiplicazione dei numeri fino a 10, sulle abilità di eseguire operazioni con i numeri naturali con gli algoritmi scritti usuali, sul consolidamento delle abilità del calcolo scritto con numeri naturali e decimali, sulla conoscenza dei multipli e sottomultipli del grammo, metro e litro attraverso lo svolgimento di equivalenze e sulle abilità di problem solving. Anche in questa sperimentazione, ovviamente adattando l'attività alla classe coinvolta si è lavorato sul consolidamento dei meccanismi di calcolo mentale. Le attività proposte in entrambe le sperimentazioni hanno inoltre cercato di agire in maniera trasversale sulla motivazione ad apprendere degli studenti e allo stesso tempo su costrutti come autostima e autoefficacia, anche se non sono poi stati direttamente misurati, attraverso appositi strumenti.

12. Risultati Sperimentazione classi prime

Inizialmente sono stati analizzati i test in entrata delle classi del gruppo sperimentale e di controllo, analizzando nel dettaglio i quattro possibili indici relativi ai relativi aspetti fondamentali (calcolo scritto, conoscenza numerica, l'accuratezza e velocità), in relazione alle fasce di prestazione.

Immagine 1 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Castel Ritaldi in relazione all'indice "Operazioni scritte"

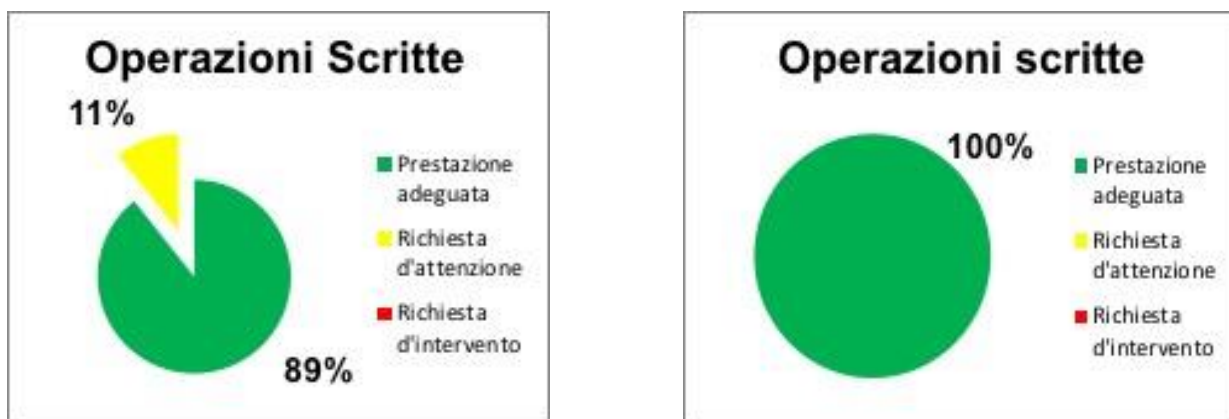
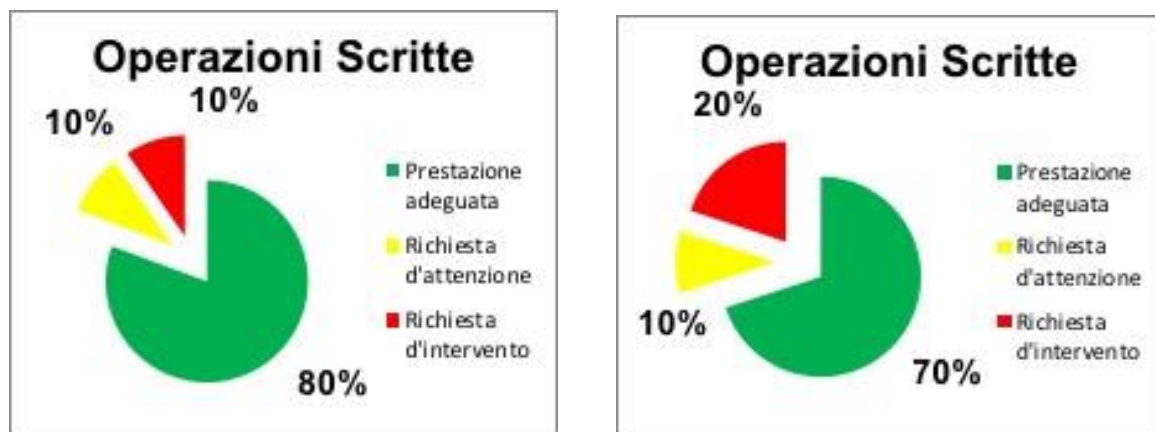


Immagine 2 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Bastardo in relazione all' indice "Operazioni scritte"



In relazione alle operazioni scritte, dalle immagini si può notare senz'altro un differente livello di partenza nei due gruppi, ma allo stesso tempo si evidenzia un netto miglioramento nei test in uscita, esclusivamente per il gruppo sperimentale che vede collocarsi tutti gli studenti nella fascia di prestazione adeguata, a differenza del gruppo di controllo nel quale si evidenzia un aumento di 10 punti percentuali di studenti che si collocano nella fascia di richiesta d'intervento, con conseguente diminuzione della fascia di studenti con prestazione adeguata. Nello stesso periodo in cui quindi il gruppo sperimentale evidenzia un netto miglioramento il gruppo di controllo marca un peggioramento visibile.

Immagine 3 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Castel Ritaldi in relazione all'indice "Conoscenza numerica"

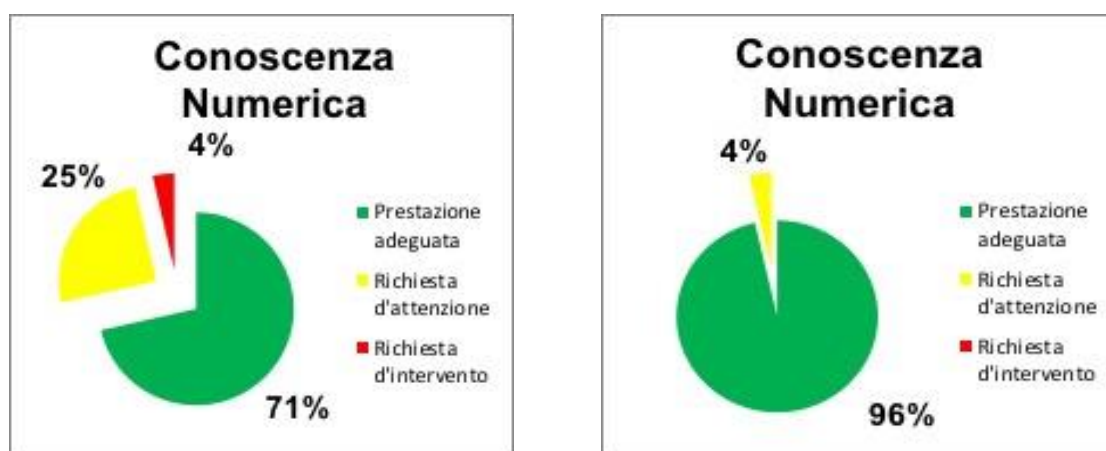
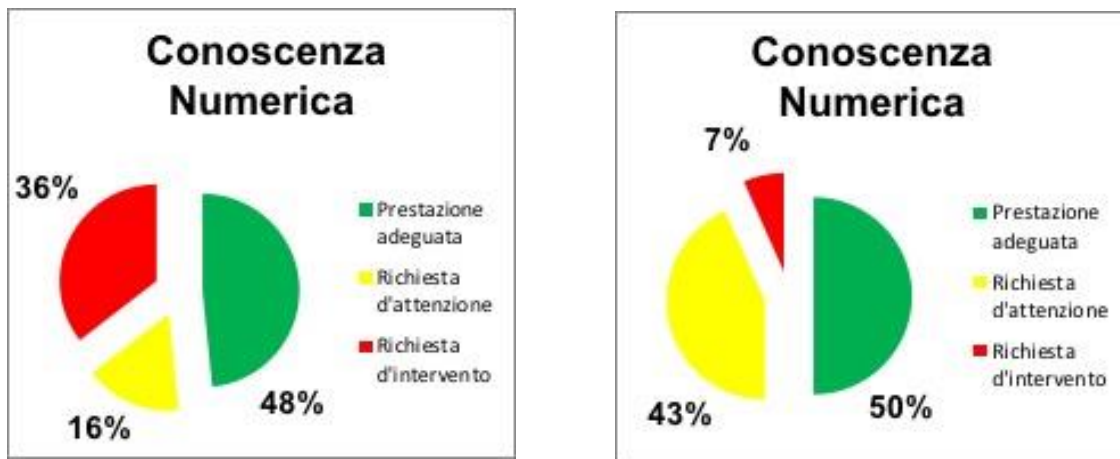


Immagine 4 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Bastardo in relazione all' indice "Conoscenza numerica"



Relativamente al gruppo sperimentale l'indice di conoscenza numerica evidenzia un interessante miglioramento. In particolare, è possibile notare che il 25% dei soggetti che si collocavano nella fascia di richiesta d'attenzione nella somministrazione iniziale passano nella fascia con prestazione adeguata, che passa così da 71% al 96%. Solo il 4% che in fase iniziale manifestava esiti da richiesta di intervento (nei test iniziali) si colloca invece, nel test in uscita nella fascia con richiesta di attenzione. Questo risultato evidenzia sicuramente un miglioramento, negli studenti, relativo al possesso degli elementi di base del mondo del numero (aspetti lessicali, semantici, sintattici).

Il gruppo di controllo evidenzia miglioramenti seppur la fascia di prestazione adeguata venga incrementata soltanto del 2%, ma ciò che va ad aumentare significativamente è la fascia con richiesta di attenzione che da un 16% nei test in entrata, arriva ad un 43% in uscita assorbendo molti dei soggetti che in entrata richiedevano un intervento (permane un 7% che rientra nella fascia richiesta di intervento).

Immagine 5 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Castel Ritaldi in relazione all' indice "Accuratezza"

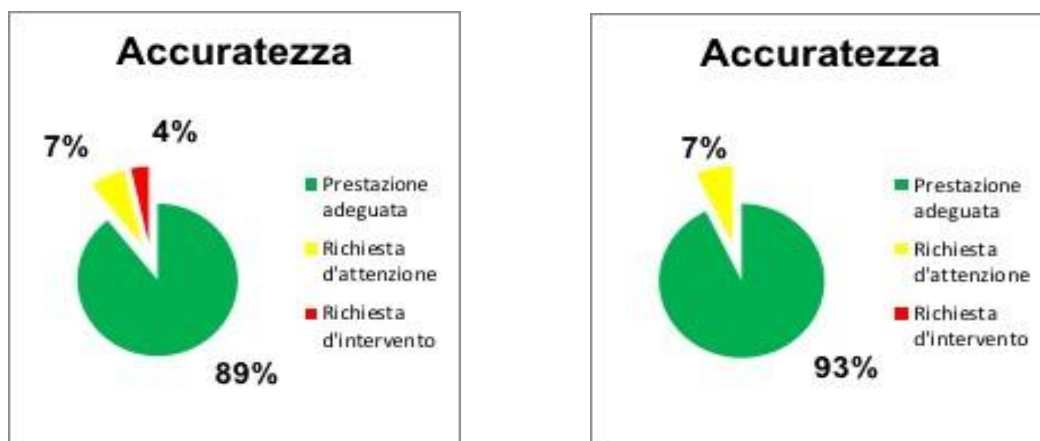
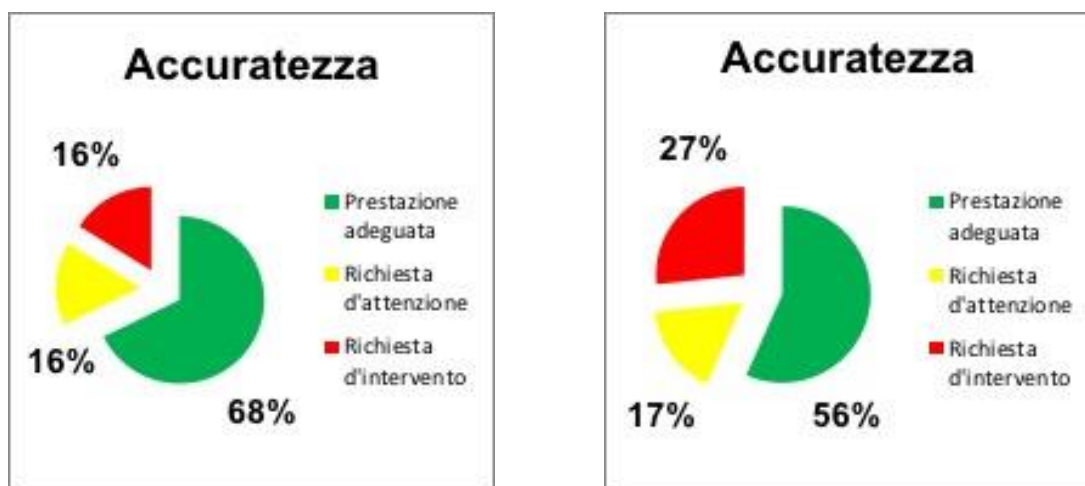


Immagine 6 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Bastardo in relazione all' indice "Accuratezza"



L'indice relativo all'accuratezza, che informa di quanto il bambino sappia lavorare con i numeri, evidenzia un miglioramento in quanto le prestazioni adeguate, nel gruppo sperimentale, aumentano del 4% con una scomparsa delle richieste d'intervento. Nel gruppo di controllo, invece, emerge un decremento della fascia di prestazioni adeguate del 12% con conseguente incremento delle altre due fasce.

Immagine 7 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Castel Ritaldi in relazione all' indice "Tempo totale"

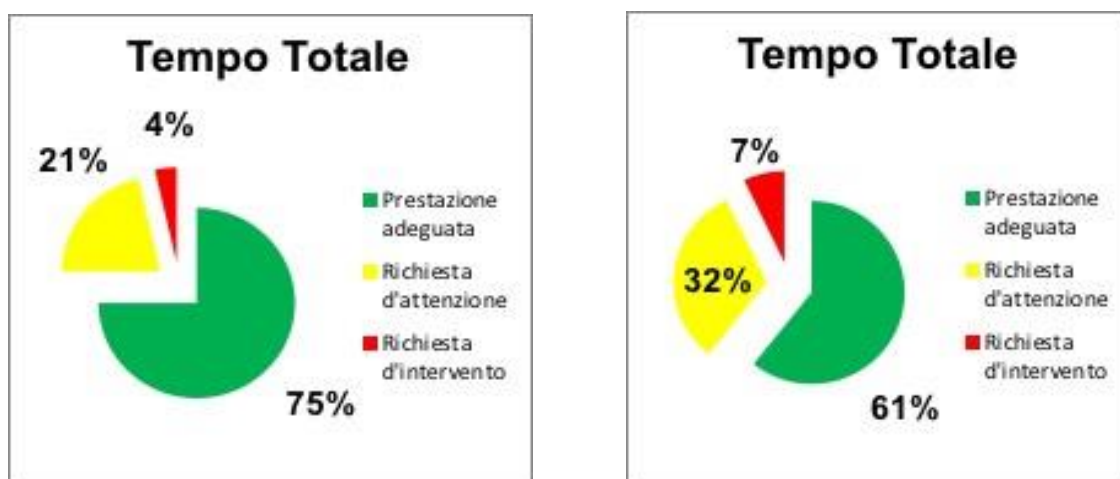
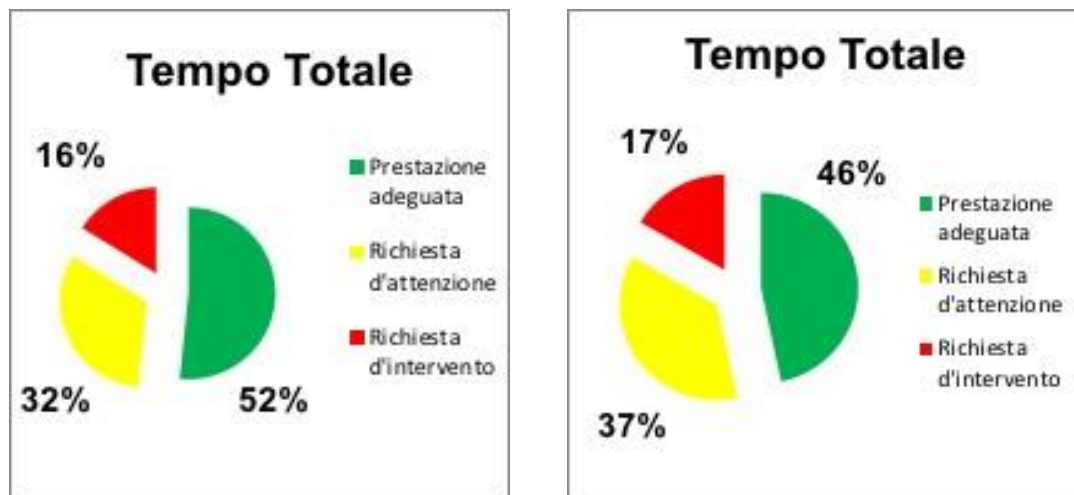


Immagine 8 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi prime della Scuola primaria di Bastardo in relazione all' indice "Tempo totale"



In relazione al tempo totale, ovvero l'indice che ci informa su quanto sia automatizzata la competenza di lavorare con i numeri, sia il gruppo sperimentale che il gruppo di controllo subiscono un decremento delle fasce di prestazione adeguata.

Analizzando i risultati attraverso un test del chi quadro, è emerso che le dimensioni di indagine del test AC-MT non raggiungono significatività statistica, sebbene dai grafici si evinca un abbassamento sensibile dei soggetti che alla prima rilevazione si collocavano nelle fasce di richiesta d'attenzione e richiesta d'intervento. La scarsa numerosità del campione è il fattore che determina questo risultato.

Si raggiunge una differenza statisticamente significativa nella dimensione della conoscenza numerica ($\chi^2 = 6.543$, $p < 0,05$) a favore del gruppo sperimentale.

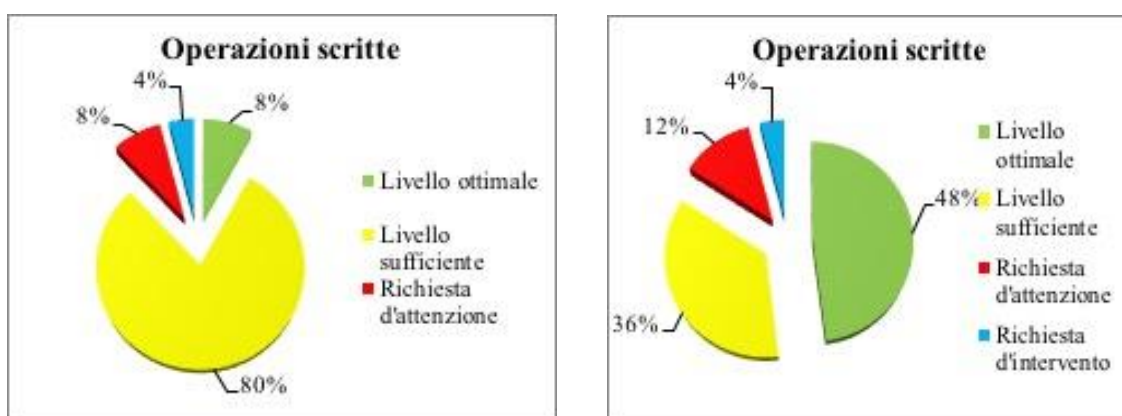
Gli indici di accuratezza e rapidità devono essere letti considerando l'età dei bambini e il periodo dell'anno scolastico, in quanto l'automatizzazione dei processi e quindi la tempistica, sono aspetti in fieri dell'intero processo relativo all'intelligenza numerica. L'accuratezza indica il grado di conoscenza del dominio specifico da parte del bambino, la rapidità indica invece quanto tale conoscenza è stata automatizzata e si esprime rapidamente.

L'indicatore più rilevante, a nostro parere e a parere degli insegnanti con cui abbiamo lavorato, è proprio la conoscenza numerica in quanto è dato dalla somma dei punteggi ottenuti nei giudizi di numerosità e nell'ordinamento di serie (dal maggiore al minore e dal minore al maggiore). Queste ultime abilità sono alla base delle abilità di conteggio, da cui derivano le abilità di calcolo scritto e/o a mente

13. Risultati Sperimentazione classi terze

Relativamente alla sperimentazione nelle classi terze, sono stati analizzati e confrontati i risultati ottenuti nelle somministrazioni ex-ante rispetto a quelli ottenuti nelle somministrazioni ex-post non avendo a disposizione altre classi terze che fungessero da gruppo di controllo.

Immagine 9 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi terze in relazione all'indice "Operazioni scritte"

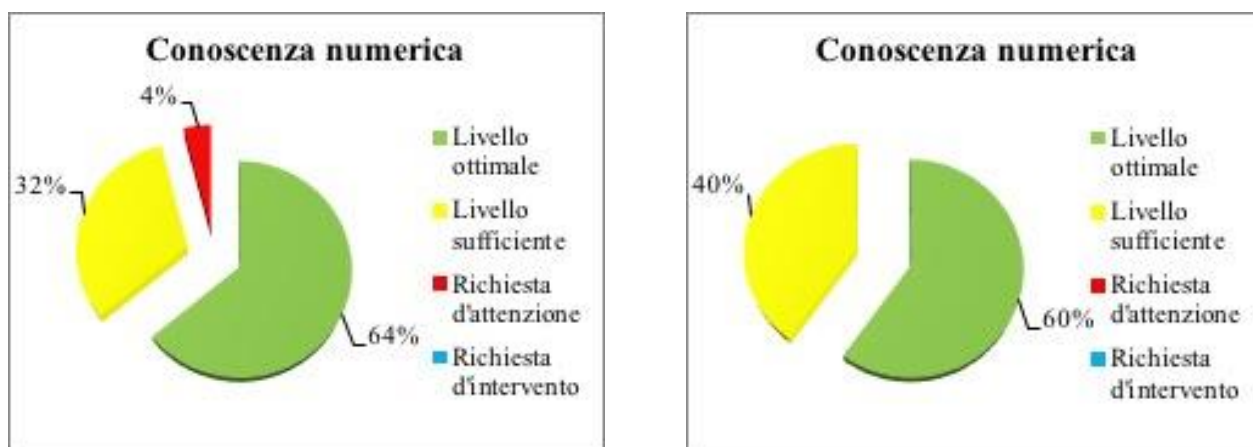


Partendo dal primo campo riguardante le operazioni scritte in colonna, i bambini che nella misurazione ex-ante avevano raggiunto un livello ottimale erano l'8%, nella misurazione ex-post sono diventati il 48%.

Al momento della somministrazione del primo test da parte dell'insegnante la divisione era stata affrontata da poco infatti se in una classe i bambini che hanno svolto correttamente tutte le operazioni erano soltanto 2, nell'altra nessuno ha portato a termine correttamente tutta la prova. Nel test in uscita, invece, le prestazioni dei due gruppi si sono livellate e in entrambi i casi sei bambini hanno calcolato in modo esatto le operazioni. Il livello sufficiente è diminuito drasticamente mentre la richiesta di attenzione è aumentata dall'8% al 12%.

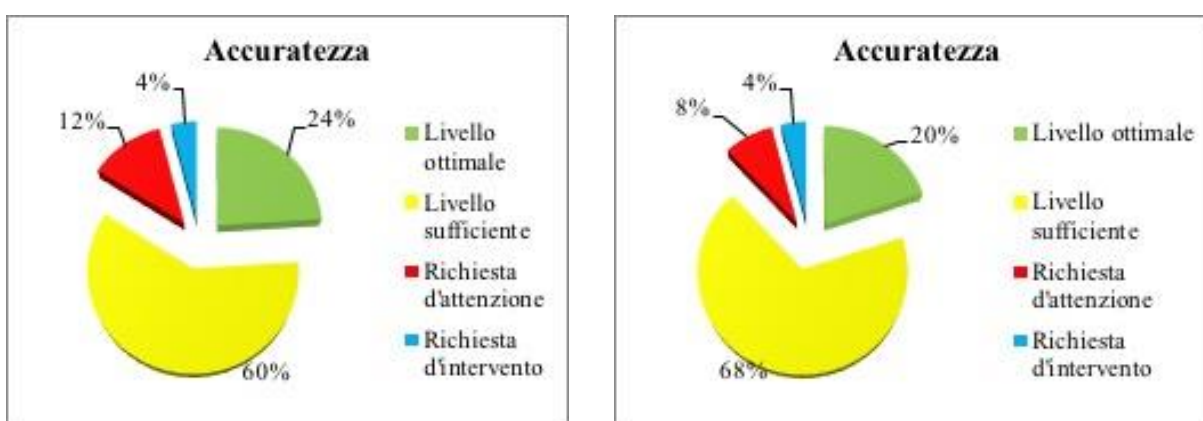
Le classi già partivano con una buona capacità di conteggio, ma nella seconda parte dell'anno si sono automatizzate le pratiche e il livello generale è aumentato notevolmente, mostrando riduzioni significative anche nei valori sotto soglia.

Immagine 10 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi terze in relazione all'indice "Conoscenza numerica"



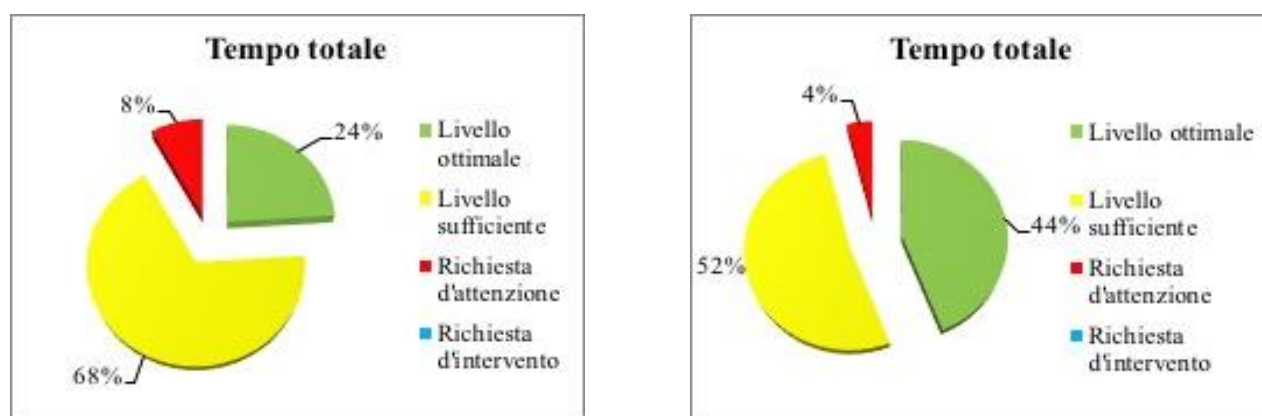
Per quanto concerne la conoscenza numerica nella misurazione ex-post, il dato complessivo che emerge è molto confortante infatti, tutti i bambini si collocano nei livelli ottimale (60%) e sufficiente (40%). Il 4% dei bambini che si collocava nella fascia di richiesta di attenzione nella misurazione ex-ante, è stato inglobato nel livello sufficiente. Le classi pertanto, al termine dell'anno non presentano alcuna problematicità rilevante in questo ambito.

Immagine 11 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi terze in relazione all'indice "Accuratezza"



L'accuratezza, ovvero il numero di errori fatti nelle prove individuali, che comprende gli esercizi di calcolo a mente, calcolo scritto, enumerazione, dettato di numeri e recupero dei fatti numerici, ha subito una minima variazione, seppur gli alunni che si collocano nella fascia di prestazione ottimale abbiano subito un lieve decremento del 4% (dal 24% al 20%). Aumenta la percentuale dei bambini presenti nella fascia sufficiente (dal 60% al 68%), diminuiscono i bambini che presentano una richiesta d'attenzione mentre rimane invariata la fascia della richiesta d'intervento (4%).

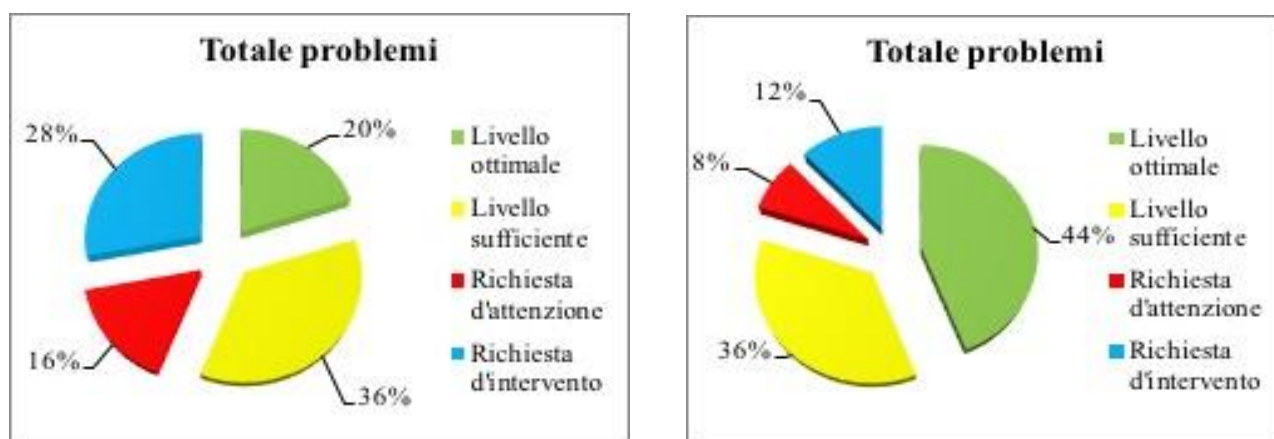
Immagine 12 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi terze in relazione all'indice "Tempo totale"



Anche per quanto riguarda il tempo totale impiegato nella prova individuale (gli esercizi che prevedevano la registrazione del tempo impiegato erano: il calcolo mentale, scritto e l'enumerazione) i risultati ottenuti sono stati molto soddisfacenti. In entrambe le classi c'è stato un sensibile innalzamento della velocità di prestazione, ciò comporta una maggiore capacità di controllo sul processo, un'abilità di calcolo maggiore e un conseguente incremento delle capacità di utilizzare strategie funzionali ed economiche dal punto di vista del tempo e dello sforzo cognitivo.

La maggior parte dei bambini ha migliorato la sua prestazione in termini di tempo e lo si può evincere chiaramente dalle percentuali ottenute nella misurazione ex-post: nel livello ottimale si collocano il 44% dei bambini (rispetto al 24% iniziale), nel livello sufficiente il 52% (inizialmente c'erano il 60% dei bambini), infine anche la fascia di richiesta d'attenzione si è dimezzata (da 8% a 4%).

Immagine 13 – Confronto test in entrata e in uscita delle classi terze in relazione all'indice "Totale Problemi"



Le classi inizialmente presentavano un consistente numero di casi problematici nella risoluzione dei problemi, ad un'analisi più accurata le cadute si acuivano quando il problema era scritto. Questo dato era in disaccordo con gli altri, quindi, si è pensato che la difficoltà fosse a livello di decodifica e analisi del testo scritto. Si è pertanto pensato di strutturare attività che andassero a rinforzare processi di analisi e decodifica del testo facendo attenzione alle parole chiave, alla richiesta esplicita del problema e in alcuni casi usando ancora la forma grafica per la rappresentazione della situazione problematica. Questo processo ha consentito di far rientrare le difficoltà in maniera significativa.

A posteriori dunque si può rilevare un notevole miglioramento della capacità di problem solving, di ragionamento matematico, di pensiero logico, metacognizione e capacità di strutturazione di percorsi più brevi per arrivare all'obiettivo. Il grafico complessivo mostra come il 44% degli alunni (il 24% in più rispetto alle misurazioni ex-ante) ha raggiunto un livello di prestazione ottimale cioè ha svolto correttamente almeno 5 problemi su 6. La percentuale degli alunni che si trova nella fascia di prestazione sufficiente è rimasta invariata e si conferma del 36%. Si è dimezzata la fascia di richiesta d'attenzione (dal 16% all'8%) e si è ridotto notevolmente il livello più basso, la richiesta di intervento, che è passato dal 28% al 12%.

Come mostrano i grafici riportati, dal confronto tra le misurazioni ex-ante ed ex-post del gruppo sperimentale sono emersi numerosi miglioramenti da parte dei bambini in tutte le aree di interesse del test, riducendo il numero di bambini situati nel livello di richiesta d'attenzione e richiesta d'intervento. Gli alunni hanno ottimizzato le loro conoscenze, le loro abilità e le loro competenze e seppur il test in questione non rilevi la motivazione all'apprendimento, le insegnanti hanno rilevato qualitativamente il miglioramento della relazione con la disciplina verbalizzata dai bambini. I miglioramenti si sono evidenziati anche proattivamente: i bambini hanno

prodotto giochi matematici in totale autonomia, hanno elaborato e ideato strategie adeguate per la soluzione di problemi reali.

14. Conclusioni e sviluppi

Gli esiti qui presentati, inserite in un progetto di ricerca formazione pluriennale più ampio, hanno analizzato gli effetti relativi ad alcuni indicatori di competenze matematiche di interventi di una progettazione didattica centrata su metodi attivi e didattiche per competenze, con un monitoraggio costante, con la verbalizzazione e condivisione degli obiettivi di apprendimento con i bambini, al fine di motivare maggiormente gli alunni all'apprendimento della matematica.

La letteratura conferma che l'utilizzo di didattiche attive e coinvolgenti, anche in matematica, incrementa l'attivazione di processi cognitivi degli alunni e facilita lo sviluppo del pensiero matematico attraverso la costruzione del proprio apprendimento per tentativi ed errori (senza che questi ultimi siano vissuti come impedimento o segnale negativo). In questa ottica dunque l'errore acquisisce valore formativo con la funzione di approfondire la comprensione dei concetti, di rilevare quali equivoci ci sono sulle procedure, di evidenziare eventuali percorsi logici con qualche falla.

I risultati esposti, analizzati attraverso la comparazione della situazione iniziale con quella finale, indicano un sostanziale effetto del training in entrambe le sperimentazioni.

In particolare, nella sperimentazione delle classi prime la differenza riscontrata, tra gruppo sperimentale e gruppo di controllo, risulta statisticamente significativa per la conoscenza numerica. La conoscenza numerica è data dalla somma dei punteggi ottenuti nel giudizio di numerosità e nell'ordinamento di serie (dal maggiore al minore e dal minore al maggiore). Queste ultime abilità sono alla base dell'acquisizione delle abilità di conteggio, da cui derivano le abilità di calcolo scritto e/o a mente. Altri dati invece, ottenuti in altri indici, come l'accuratezza e la rapidità non possono essere considerati del tutto rilevanti, considerata l'età dei bambini, in quanto l'automatizzazione dei processi e quindi la tempistica, sono aspetti in fieri dell'intero processo relativo all'intelligenza numerica.

Nella sperimentazione delle classi terze l'importante miglioramento che è stato rilevato nello sviluppo delle differenti aree che il test andava ad indagare, è andato di pari passo con un aumento della motivazione nei bambini che non solo hanno appreso ma hanno attribuito un significato ai propri apprendimenti, sono stati in grado di rifletterci ed esprimere il proprio pensiero. Facendo particolare riferimento ai giochi matematici proposti, ne hanno saputo cogliere le dinamiche interne e hanno capito come un lavoro a coppie o in piccoli gruppi sia funzionale alla crescita delle abilità cognitive e sociali. Medesimi risultati, sempre avvalendosi dell'utilizzo di giochi che coinvolgessero anche le abilità matematiche, sono stati dimostrati in un recente studio pilota⁶³.

⁶³ Cfr. F. Mattioli, M. Bartolucci, F. Batini, *Un'esperienza di ricerca-azione basata sulle didattiche attive, nell'Istituto Comprensivo Melanzio – Parini di Castel Ritaldi*, in press.

La tipologia di intervento didattico proposto ha dimostrato anche in sperimentazioni precedenti⁶⁴ di avere effetti anche sulla dimensione motivazionale e strategica connessa allo studio, così come sul funzionamento di abilità cognitive di base.

L'ipotesi formulata inizialmente, pertanto, trova conferma in quest'analisi e la ricerca ha permesso di evidenziare come gli alunni coinvolti attivamente nella costruzione delle conoscenze sviluppino una maggiore consapevolezza degli apprendimenti raggiunti.

Sarebbe interessante in futuro indagare se un tale approccio trovi riscontro anche in un potenziamento delle strategie di studio e un potenziamento delle abilità cognitive, come dimostrato da precedenti ricerche⁶⁵.

Un possibile sviluppo di tale ricerca potrebbe implementare tale approccio in maniera più strutturata all'interno delle ore curriculari e indagare maggiormente aspetti strettamente correlati come l'ansia e la paura nei confronti della matematica.

Per la natura dell'approccio della ricerca formazione utilizzato la sperimentazione proseguirà anche negli anni successivi con il reciproco stimolo tra insegnanti e gruppo di ricerca.

19. Bibliografia di riferimento

Aarnos E., Perkkila P., *Early signs of mathematics anxiety?*, in "Social and Behavioral Sciences", 46, 2012, pp. 1495-1499.

Abramson L.Y., Seligman M. E. P., Teasdale J. D., *Learned helplessness in humans: Critique and reformulation*, in "Journal of Abnormal Psychology", 87, 1978, pp. 49-74.

Adedayo O., *Mathematics phobia, diagnosis and prescription*, National Mathematical Centre 1st Annual Lecture, Abuja, 1997.

Asquini G. (a cura di), *La ricerca-formazione. Temi, esperienze e prospettive*, Milano, FrancoAngeli, 2018.

Bates A. B., Latham N. I., Kim J.-A., *Do I Have to Teach Math? Early Childhood Pre-Service Teachers' Fears of Teaching Mathematics*, Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, v. 5, 2013.

Batini F., Bartolucci M., De Carlo E., *I feel good at school! Reducing school discomfort levels through integrated interventions*, in "Athens Journal of Education", X(Y), 2017, pp. 1-13.

⁶⁴ Ivi.; I. D. M. Scierri, G. Toti, G. Trapani, *Didattica attiva e orientamento narrativo: un approccio integrato per favorire autostima, autoefficacia e resilienza*, in "Ricerche di Pedagogia e Didattica – Journal of Theories and Research in Education", 14, 1, 2019; I. D. M. Scierri, M. Bartolucci, F. Batini, *Il successo formativo per prevenire la dispersione: gli effetti di una didattica attiva sul potenziamento delle strategie di studio nella scuola secondaria di primo grado*, in "Ricerche di Pedagogia e Didattica – Journal of Theories and Research in Education", 13(1), 2018, pp. 1-28; F. Batini, M. Bartolucci, E. De Carlo, *I feel good at school! Reducing school discomfort levels through integrated interventions* in "Athens Journal of Education", X(Y), 2017, pp. 1-13.

⁶⁵ Cfr. F. Mattioli, M. Bartolucci, F. Batini, *Un'esperienza di ricerca-azione basata sulle didattiche attive*, cit.; W. Estes, *Handbook of Learning and Cognitive Processes (Volume 3): Approaches to Human Learning and Motivation*, Psychology Press, 2014.

Beilock S. L., Maloney E. A., *Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored*, in "Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences", 2(1), 2015, pp. 4-12.

Beilock S. L., Gunderson E. A., Ramirez G., Levine S. C., *Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement*, in "Proceedings of the National Academy of Sciences", 107(5), 2010, pp. 1860-1863.

Bursal M., Paznokas L., *Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science*, in "School Science and Mathematics", 106, 2006, pp. 173-179.

Caponi B., Cornoldi C., Falco G., Focchiatti R., Lucangeli D., *MeMa. Valutare la metacognizione, gli atteggiamenti negativi e l'ansia in matematica*, Trento, Erickson, 2012.

Choe K. W., Jenifer J., Rozek C., Berman M., Beilock S.L., *Calculated Avoidance: Math Anxiety Predicts Math Avoidance in Effort-Based Decision-Making*, in "Science Advances", 2019.

Coppola C., Di Martino P., *Il problem solving come strategia per una diversa gestione dell'errore nell'educazione matematica al primo ciclo*, in "Annali online della Didattica e della Formazione Docente", 9, 14, 2017, pp. 76-90.

Cornoldi C., Lucangeli D., Bellina M., *AC-MT (6-11). Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzione di problemi – Gruppo MT*, Trento, Erickson, 2012.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., *Matematica come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*, Firenze, Giunti Scuola, 2012.

Devine A., Hill F., Carey E., Szucs D., *Cognitive and emotional math problems largely dissociate: prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety*, in "J Educ Psychol", 110, 2018, pp. 431-444.

Di Martino P., Zan R., *Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students' narratives*, in "Journal of Mathematics Teacher Education", 13(1), 2010, pp. 27-48.

Di Martino P., Zan R., *Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional*, in *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Ankara, Middle East Technical University, 2013.

Dodeen H., Abdelfatta F., Alshumrani S., *Test-taking skills of secondary students: the relationship with motivation, attitudes, anxiety and attitudes toward tests*, in "South African Journal of Education", 34(2), 2014, pp. 1-18.

Douglas H.P., LeFevre J., *Exploring the influence of basic cognitive skills on the relation between math performance and math anxiety*, in "J Num Cog", 3, 2017, pp. 642-666.

Dowker A., Sarkar A., Looi C.Y., *Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years?*, in "Frontiers in psychology", 7, 508, 2016.

Estes W., *Handbook of Learning and Cognitive Processes (Volume 3): Approaches to Human Learning and Motivation*, Psychology Press, 2014.

Eurydice, *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*, 2011.

Fajemidagba M., Salman M., Ayinla O., *Effect of teachers' instructional strategy pattern on senior secondary school students' performance in mathematics word problems in Ondo State, Nigeria*, in "Journal of Education and Practice", 3, 7, 2012.

Farrell E. F., *Taking anxiety out of the equation*, in "Chronicle of Higher education", 52(19), 2006, pp. 41-42.

Ferguson A. M., Maloney E. A., Fugelsang J., Risko E. F., *On the relation between math and spatial ability: The case of math anxiety*, in "Learning and Individual Differences", 39, 2015, pp. 1-12.

Finnigan K. M., Corker K.S., *Do performance avoidance goals moderate the effect of different types of stereotype threat on women's math performance?*, in "Journal of Research in Personality", 63, 2016, pp. 36-43.

Freiberg M., *Math- that four-letter word!* In "Academic Exchange Quarterly", 9(3), 2005, pp. 7-11.

Garnett K. G., *Maths Learning Disabilities*, in "Journal of CEC", 1998, Retrieved on 3rd Feb 2009 from http://www.idonline.org/ld_indepth/math_skill/garnet.html.

Gbolagade A. M., Wahead A. A., Sangoniya S. O., *Demystifying Mathematics phobia in schools for transforming Nigeria in attaining Vision 20:2020*, in "International Journal of Academic Research in Business and Social Studies", 3(2), 2013, pp. 188-196.

Gierl M. J., Bisanz J., *Anxiety and attitude related to Mathematics in grade 3 and 6*, in "The Journal of Experimental Education", 63(2), 1995, pp. 139-158.

Gresham G., *Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary pre- service teachers*, in "Teaching Education", 19, 2008, pp. 171-184.

Gurganus S. P., *Math instruction for students with learning problems*, Boston, Pearson Education, 2007.

Hadley K. M., Dorward J., *Investigating the relationship between elementary teacher mathematics anxiety, mathematics instructional practices, and student mathematics achievement*, in "Journal of Curriculum and Instruction", 5(2), 2011, pp. 27-44.

Harari R. R., Vukovic R. K., Bailey S. P., *Mathematics anxiety in young children: an exploratory study*, in "J. Exp. Educ.", 8, 2013, pp. 538-555.

Kaur G., *Math-Phobia: Causes and Remedies*, in "International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)", 5, VI, 2017.

Kerala Curriculum Framework, SCERT Kerala, 2007.

Kucian K., McCaskey U., Tuura R. O'G., Von Aster M., *Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children*, in "Translational Psychiatry", 8, 2018.

Lucangeli D., Dupuis M., Genovese E., Rulli G., *L'apprendimento difficile*, Quaderni del Centro Nazionale di Documentazione e analisi per l'infanzia e l'adolescenza, Firenze, Istituto degli Innocenti, 2006.

Lucangeli D., *La discalculia e le difficoltà in aritmetica*, Firenze, Giunti, 2016.

Ma X., Xu J., *The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis* in "Journal of Adolescence", 27(2), 2004, pp. 165-179.

Makarfi U.M., Keynote Address delivered at the opening ceremony of the 38th Annual Conference of Mathematical Association of Nigeria held in Katsina, 2001.

Maloney E. A., Ramirez G., Gunderson E. A., Levine S. C., Beilock S.L., *Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety*, in "Psychological Science", 26(9), 2015, pp. 1480-1488.

Mattioli F., Bartolucci M., Batini F., *Un'esperienza di ricerca-azione basata sulle didattiche attive, nell'Istituto Comprensivo Melanzio – Parini di Castel Ritaldi*, in press.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, *Indicazioni Nazionali per il Curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, D.M. 254 del 16 Novembre 2012.

Mullis I. V. S., Martin M. O., Foy P., *TIMSS 2007 International Mathematics Report Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*, Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS and PIRLS international Study Center, 2008.

Namkung J., Peng P., Lin X., *The Relation Between Mathematics Anxiety and Mathematics Performance Among School-Aged Students: A Meta-Analysis*, in "Review of Educational Research Month", XX, X, 2019, pp. 1-38.

Onwuachu W. C., Nwakonobi F. E., *Students' Evaluation of Classroom Interaction of their Biology Teachers: Implication for Curriculum Implementation. African Research Review*, in "International Multi-Disciplinary Journal", 3(1), 2009, pp. 349-361.

Patrick H., Turner J. C., Meyer D. K., Midgley C., *How Teachers Establish Psychological Environments During the First Days of School: Associations With Avoidance in Mathematics*, in "Teachers College Record", 105(8), 2004, pp. 1521-1558.

Peker M., *Pre-Service Teachers' Teaching Anxiety about Mathematics and Their Learning Styles*, in "Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education", 5(4), 2009, pp. 335-345.

Ramirez G., Stacy T. S., Erin A. M., *Math Anxiety: Past Research, Promising Interventions, and a New Interpretation Framework*, in "Educational Psychologist", 53, 3, 2018, pp. 145-164.

Sa'Ad T. U., Usman R., *The Causes of Poor Performance in English Language Among Senior Secondary School Students in Dutse Metropolis*, <https://www.academia.edu>, 2014.

Schleepen T. M., Van Mier H. I., *Math anxiety differentially affects boys' and girls' arithmetic, reading and fluid intelligence skills in fifth graders*, in "Psychology", 7, 2016, pp. 1911-1920.

Schwartz A. E., *Alleviating Math Anxiety*, in "Education Digest", 65(5), 2000, pp. 62-64.

Scierrì I. D. M., Bartolucci M., Batini F., *Il successo formativo per prevenire la dispersione: gli effetti di una didattica attiva sul potenziamento delle strategie di studio nella scuola secondaria di primo grado*, in "Ricerche di Pedagogia e Didattica – Journal of Theories and Research in Education", 13(1), 2018, pp. 1-28.

Scierrì I. D. M., Toti G., Trapani G., *Didattica attiva e orientamento narrativo: un approccio integrato per favorire autostima, autoefficacia e resilienza*, in "Ricerche di Pedagogia e Didattica – Journal of Theories and Research in Education" 14, 1, 2019.

Shields D. J., *Teachers have the power to alleviate math anxiety*, in "Academic Exchange Quarterly", 9(3), 2005, pp. 326-331.

Stoehr K. J., *Mathematics anxiety: One size does not fit all*, in "Journal of Teacher Education", 68(1), 2017, pp. 69-84.

Suleiman Y., Hammed A., *Perceived Causes of Students' Failure in Mathematics in Kwara State Junior Secondary Schools: Implication for Educational Managers*, in "International Journal of Educational Studies in Mathematics", 6(1), 2019, pp. 19-33.

Tambychik T., Meerah T.S.M., *Students' difficulties in mathematics problem-solving: what do they say?*, in "Procedia-Social and Behavioral Sciences", 8, 2010, pp. 142-151.

Tobias S., Weissbrod C., *Anxiety and mathematics: an update*, in "Harvard Educational Review", 50(1), 1980, pp. 63-70.

Tshabalala T., Ncube A.C., *The Causes of Poor Performance of Ordinary Level Pupils In Mathematics in Rural Secondary Schools in Nkayi District: Learner's Attritions*, in "Nova Journal of Medical and Biological Sciences", 1, 1, 2012.

Turner J. C., Meyer D. K., Anderman E. M., Midgley C., Margaret G., Kang Y., *The Classroom Environment and Students' Reports of Avoidance Strategies in Mathematics: A Multi-method Study*, in "Journal of Educational Psychology", 94, 1, 2002, pp. 88-106.

Van Mier H. I., Schleepen T., Van den Berg F., *Gender Differences Regarding the Impact of Math Anxiety on Arithmetic Performance in Second and Fourth Graders*, in "Frontiers in psychology", 9, 2690, 2019.

Vansteenkiste M., Simons J., Lens W., Sheldon K. M., Deci E. L., *Motivating learning, performance, and persistence: the synergistic effects of intrinsic goal contents and autonomy-supportive contexts*, in "Journal of Personality and Social Psychology", 87(2), 2004, pp. 246-260.

Vinson B. M., *A comparison of preservice teachers' mathematics anxiety before and after a methods class emphasizing manipulatives*, in "Early Childhood Education Journal", 29(2), 2001, pp. 89-94.

Whyte J. M., *Maths anxiety: The what, where, and how*, Unpublished Masterate research report, Palmerston North, Massey University, 2009.

Zakaria E., Norazah M. N., *The Effects of Mathematics Anxiety on matriculation Students as Related to Motivation and Achievement*, in "Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education", 4(1), 2007, pp. 27-30.

Zan R., *Difficoltà in matematica: 1^a puntata osservare, 2^a interpretare, 3^a intervenire*, in B. D'Amore (a cura di), *Atti del convegno nazionale. La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*, Lecce, Tricase, 2014.

Zan R., *Difficoltà in matematica: Osservare, Interpretare, Intervenire. Convergenze*, Milano, Springer-Verlag Italia, 2007.

Received September 3, 2019

Revision received September 8/October 15, 2019

Accepted October 16, 2019