“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 394-411 – ISSN 2038-1034

Quadrilateri in un ambiente di Geometria dinamica: un’esperienza didattica per supportare abilità visuo-spaziali

Elisa Miragliotta

Abstract – *This paper describes a teaching experience aimed at facilitating processes of visualization and prediction using a Dynamic Geometry Environment. It is part of a wider research effort to build a theoretical framework to be leveraged for the investigation of the role played by some visuo-spatial abilities in learning Euclidean Geometry. Firstly, the paper frames the investigation work within the international research scenario, by quickly outlining the relevant theoretical framework and by mentioning results of the latest studies on spatial reasoning and visualization. Then, it focuses on the teaching activities performed, describing both content and underlying hypothesis and emphasizing the crucial role played by the Dynamic Geometry Environment. Finally, it briefly presents the results of a preliminary pilot test and outlines future directions of research in this field.*

Riassunto – *In questo lavoro descriveremo un’esperienza didattica volta a favorire processi di visualizzazione e previsione, implementata in un ambiente di geometria dinamica. Essa fa parte di una ricerca più ampia, volta alla costruzione di un quadro teorico utile per indagare il ruolo di alcune abilità cognitive di natura visuo-spaziale nell’apprendimento della geometria euclidea. L’articolo inquadrerà l’indagine nello scenario internazionale, citando i risultati più recenti delle ricerche sul pensiero spaziale e la visualizzazione e descrivendo brevemente il quadro teorico. Successivamente si concentrerà sulle attività didattiche, descrivendone contenuto e ipotesi fondanti e sottolineando il ruolo cruciale dato all’ambiente di geometria dinamica. Infine, si accennerà ai risultati i un primo studio pilota e alle prospettive di ricerca future.*

Keywords – visualization, geometry, visuo-spatial abilities, quadrilaterals, dynamic geometric environment

Parole chiave – visualizzazione, geometria, abilità visuo-spaziali, quadrilateri, ambiente di geometria dinamica

Elisa Miragliotta è studentessa di Dottorato in Matematica all’interno del programma di dottorato consortile delle Università di Modena-Reggio Emilia, Ferrara e Parma. I suoi interessi di ricerca si inseriscono nell’ambito della Didattica della Matematica e nello specifico al legame tra le abilità cognitive di natura spaziale e l’apprendimento della geometria, con particolare attenzione per l’apprendimento degli studenti con bisogni educativi speciali. Tra le pubblicazioni: *Visuo-spatial abilities and geometry: a first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization* (Miragliotta e Baccaglini-Frank, 2017).

1. Introduzione: ricerca internazionale/inquadramento o contesto teorico della ricerca

La *visualizzazione* e il *pensiero spaziale* (*spatial reasoning*) sono temi di ricerca condivisi da diverse discipline. Storicamente gran parte della ricerca sullo sviluppo dei concetti geometrici e del pensiero spaziale si colloca nel dominio della Psicologia ed è sovente legata al costrutto chiamato *mental imagery.* Con l'avvento della Psicologia cognitiva e delle Neuroscienze contemporanee, la comunità scientifica ha elaborato un modello che descrive le componenti che intervengono nel processo immaginativo e ha collezionato un elenco di abilità cognitive coinvolte in tale processo (Cornoldi e Vecchi, 2004), chiamate *abilità visuo-spaziali*.

Oggi il ruolo della visualizzazione e del pensiero spaziale nella risoluzione di compiti matematici è largamente riconosciuto (es. Giaquinto, 2007; Duval, 1998). Secondo Hadamard (1944) il modo di pensare matematico è essenzialmente di natura spaziale. Inoltre, studi in cui sono stati intervistati matematici (es. Sfard, 1994) mettono in luce come questi si affidino fortemente all'immaginazione. Secondo Wheatley (1997), le immagini hanno un ruolo centrale nel ragionamento matematico, tanto da affermare che gli studenti che le utilizzano nel loro ragionamento risolvono problemi non routinari più efficacemente rispetto chi adopera un approccio procedurale. Tuttavia, solo a partire dagli anni '80 del secolo scorso la visualizzazione e i processi ad essa collegati sono diventati oggetto di indagine della ricerca in Didattica della Matematica. Traendo le mosse dal lavoro fondativo di Alan Bishop (1980), che ha teorizzato due abilità spaziali diverse che intervengono nei processi di visualizzazione nel dominio specifico della matematica, Norma Presmeg (1986) ha dato un contributo sostanziale alla ricerca, classificando le diverse strategie immaginative utilizzate sia dagli insegnanti di matematica che dagli studenti. Inoltre, i suoi studi hanno intercettato un filone di ricerca volto a declinare le caratteristiche di due tipi di solutori: *visualizers* e *non-visualizers* (Presmeg, 2006). Tali studi sono stati influenzati dal lavoro di Krutetskii (1976), il quale distingue tre tipi di pensiero matematico sulla base della dominanza della componente logico-verbale o visivo-figurale: *analitico*, *geometrico* e *armonico*. Più tardi, le ricerche di Presmeg hanno informato il lavoro di Owens (1999), incentrato sulla classificazione delle strategie immaginative utilizzate dagli studenti nel dominio specifico della geometria. Infatti, sebbene il pensiero spaziale sia utile e utilizzato in diversi campi della matematica, sicuramente interviene notevolmente nei processi di risoluzione di compiti geometrici e, per estensione, nell'insegnamento-apprendimento della geometria. Questo ambito di ricerca è stato esplorato da studi volti a sviluppare costrutti teorici, utili per comprendere come gli studenti percepiscono le figure geometriche e progrediscono nell'apprendimento della geometria (Fischbein, 1993; Mariotti, 1996; Battista, 2007).

Recentemente l'interesse di ricerca sul pensiero spaziale è cresciuto in parte perché ne è stato riconosciuto il ruolo importante all'interno degli studi e carriere che coinvolgono le STEM (science, technology, engineering, math) (es. Wai, Lubinski, e Benbow, 2009). Gli studi (es. Newcombe, 2010) hanno richiamato l'attenzione sull'impatto positivo dello sviluppo precoce delle abilità spaziali sullo sviluppo matematico a tutti i livelli scolari. Da un lato le ricerche in Psicologia mostrano come persone con buone abilità spaziali tendono a manifestare buone prestazioni matematiche; dall'altro, spesso scarse abilità spaziali influenzano negativamente i progressi in matematica degli studenti (Clements e Sarama, 2011). Un ulteriore impulso alla ricerca è derivato dalla crescente evidenza che il pensiero spaziale e le competenze correlate sono malleabili a qualsiasi età, sviluppabili fin dall'infanzia e modificabili nel tempo, anche nel contesto scolastico attraverso una varietà di attività geometriche svolte da insegnanti (Mulligan e Mitchelmore, 2013; Bruce e Hawes, 2015; Candeloro, Del Zozzo, Bettini, Poli e Baccaglini-Frank, 2015) e che le competenze associate sono fortemente correlate non solo al successo nelle STEM, ma in tutti i settori (Newcombe, 2010; Uttal *et al.*, 2013).

Dall'analisi della letteratura recente, emergono alcuni punti di interesse per la ricerca in Didattica della Matematica. Da un lato l'importanza di promuovere lo sviluppo di abilità cognitive di natura spaziale, che possono rivelarsi utili non solo in ambito scolastico e accademico, ma anche nella vita di tutti i giorni (si pensi a quante operazioni spaziali compiamo mentalmente quando dobbiamo orientarci utilizzando la cartina di una città). Dall'altro, emerge la possibilità di modificare tali abilità anche nell'ambito scolastico, attraverso attività mirate di risoluzione di compiti geometrici. Tuttavia, per un insegnante di Matematica può essere difficile tradurre, nell'ambito dell'apprendimento della disciplina matematica e nella propria prassi didattica, i costrutti sviluppati dalla Psicologia. Spesso tali costrutti sembrano dare poca rilevanza alla componente concettuale che è insita nella risoluzione di compiti geometrici e fondamentale nella cognizione geometrica.

Proprio a partire da quest'ultima istanza più pragmatica ha preso le mosse il lavoro di ricerca in cui si inserisce questo articolo. Si è indagata la possibilità di tradurre nell'ambito dell'apprendimento della geometria euclidea piana alcune delle abilità visuo-spaziali già classificate dalla letteratura e a nostro parere maggiormente coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici, utilizzando costrutti sviluppati dalla ricerca in Didattica della Matematica. Il quadro teorico che ne è derivato ha rappresentato uno strumento utile per guidare l'elaborazione sia di un test per valutare le abilità degli studenti nella risoluzione di compiti geometrici ad alto potenziale visuo-spaziale, sia di un intervento didattico volto a sperimentare la possibilità di modificare le abilità scelte, attraverso la risoluzione di compiti geometrici in un ambiente di geometria dinamica. Inoltre, ha fornito una lente teorica per leggere a priori e posteriori i comportamenti degli studenti, durante la risoluzione del test e dei problemi posti nel corso dell'attività didattica.

In questo articolo ci si concentrerà in particolar modo sul contenuto dell'intervento didattico, esplicitando le ipotesi che hanno guidato l'elaborazione dei quesiti e sottolineando quale ruolo cruciale si sia dato all'ambiente di geometria dinamica (AGD)[1].

2. Costruzione del quadro teorico

Secondo gli studi in Psicologia cognitiva, la generazione ed elaborazione di immagini mentali avviene all'interno di un complesso processo di acquisizione e uso di competenze, tra le quali abilità cognitive chiamate *abilità visuo-spaziali*. Tali abilità intervengono in tutte le fasi del

[1] Per i dettagli relativi alla composizione del test e alla trasposizione delle abilità visuo-spaziali si rimanda rispettivamente a Miragliotta, 2016 e a Miragliotta, Baccaglini-Frank e Tomasi, 2017, in cui si descrive il lavoro di tesi, realizzato nel 2016 sotto la supervisione della prof.ssa Anna Baccaglini-Frank e del prof. Luigi Tomasi. Per un esempio riguardante l'utilizzo della lente teorica per leggere le produzioni degli studenti si rimanda a Miragliotta e Baccaglini-Frank, 2017.

processo immaginativo[2]: a partire dalla generazione dell'immagine, passando per il suo mantenimento nel *taccuino visuo-spaziale* e alla sua manipolazione (ad esempio per rotazione), fino alla comunicazione verbale o scritta. Ad oggi la comunità scientifica non è pervenuta ad una definizione condivisa di tali abilità, tuttavia la letteratura ne offre una classificazione (es. Cornoldi e Vecchi, 2004, p. 16). Nella trasposizione delle abilità visuo-spaziali nell'ambito del ragionamento geometrico nel particolare dominio della geometria euclidea, abbiamo operato mantenendo invariata la classificazione delle abilità visuo-spaziali e scegliendone alcune, a nostro parere maggiormente coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici:

– Organizzazione visiva;
– Scansione visiva;
– Abilità visiva ricostruttiva;
– Abilità di generare immagini;
– Abilità di manipolare immagini;
– Memoria a breve termine spaziale sequenziale;
– Memoria spaziale a lungo termine.

Inoltre, quando un solutore risolve un problema geometrico, egli può interagire con immagini visive o mentali in modi diversi, sollecitando alcune delle abilità sopra elencate. Un processo che sembra verificarsi spesso è immaginare la conseguenza delle manipolazioni (mentali) su una figura. Tale processo può avvenire grazie alla combinazione di alcune abilità visuo-spaziali, ma spesso accade in maniera così istantanea e automatica da consentire di identificarlo come un'abilità a sé stante. Abbiamo parlato in questi casi di *previsione geometrica*, intendendo il prodotto di un processo di visualizzazione avente come scopo l'individuazione di proprietà o configurazioni particolari di una figura. Tale costrutto teorico appare coerente con i costrutti di *immagine anticipatoria* (Piaget e Inhelder, 1966) e di *schemi anticipatori* (Neisser, 1976), che suggeriscono l'esistenza nell'individuo di una sorta di capacità di previsione, che orienta sia la percezione sia l'immaginazione, in presenza di uno scopo preciso.

La trasposizione nell'ambito del dominio del pensiero geometrico rappresenta un tentativo di dialogo tra costrutti teorici elaborati in settori disciplinari diversi, ma legati dall'interesse per temi di ricerca comuni, al fine di elaborare uno strumento utile sia per le indagini del ricercatore in Didattica della matematica che per la pratica didattica dell'insegnante di matematica.

Nel dominio dell'insegnamento-apprendimento della geometria la *Teoria dei concetti figurali* spiega quale sia la peculiarità delle figure geometriche che le distingue, dal punto di vista psicologico, sia dai meri concetti che dalle immagini: esse rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali (Fischbein, 1993). Infatti, "The objects to which we refer – points, sides, angles and the operations with them – have only an ideal existence. They are of a conceptual nature. At the same time, they have an intrinsic figural nature: only while referring to images one may consider operations like detaching, re-

[2] Per un approfondimento sulle componenti del processo immaginativo si veda: Mammarella, Pazzaglia e Cornoldi, 2008 e Guarnera, Castellano e Di Nuovo, 2013.

versing or superposing. As a matter of fact, the triangle to which we refer and its elements cannot be considered either pure concepts or mere common images" (*ibidem*, p. 140).

L'entità mentale, che si aggiunge alle immagini e ai concetti nel caso particolare del pensiero geometrico e che possiede simultaneamente proprietà concettuali e figurali, viene chiamata da Fischbein *concetto figurale*. Le due componenti possono essere in conflitto nel corso dell'evoluzione del pensiero geometrico, ma si armonizzano quando si raggiunge la costruzione del concetto figurale: un'entità figurale-concettuale complessa, nella quale la sintesi tra le due componenti tende ad essere perfetta e i vincoli formali diventano rigorosamente dominanti, ma non esclusivi (Mariotti, 1996). Tale armonia non rappresenta una conquista spontanea, ma dipende dall'intervento didattico dell'insegnante (Mariotti e Fischbein, 1997).

Dunque, sembra emergere l'importanza degli aspetti teorici nella capacità di dominare le proprietà di una figura geometrica e modificare la componente figurale coerentemente con i vincoli formali imposti dalla sua componente concettuale. La nostra ipotesi è che, rendendo più efficace e stabile il *controllo teorico* (Mariotti, 1996) che uno studente riesce ad esercitare sulle figure geometriche, egli possa dominarne meglio le proprietà durante una manipolazione o trasformazione (anche mentale) e che in tal modo sia possibile influire su competenze di natura visuo-spaziale. In altre parole, avanziamo l'ipotesi che un controllo teorico fine sulle figure possa sostenere le abilità cognitive di natura visuo-spaziale, coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici.

3. Il ruolo dell'Ambiente di Geometria Dinamica

Per esplorare la nostra ipotesi abbiamo messo a punto e realizzato un ciclo di attività didattiche in una classe I di un Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate del nord Italia. L'attività è ha avuto inizio ad ottobre con la conoscenza degli allievi e si è conclusa a dicembre con l'ultimo test. L'intervento didattico ha per oggetto alcuni quadrilateri e le loro proprietà ed è stato implementato nell'ambiente di geometria dinamica *GeoGebra*.

La scelta di collocarsi in un AGD è sostenta da diversi studi a sostegno dell'efficacia dell'utilizzo di contesti di tal sorta nel favorire lo sviluppo di modi di pensare matematici (es. Laborde e Strässer, 1990; Hadas, Hershkowitz e Schwarz, 2000; Mariotti, 2005; Baccaglini-Frank, 2010, 2012; Leung, Baccaglini-Frank e Mariotti, 2013; Antonini e Baccaglini-Frank, 2015).

Ricerche recenti hanno mostrato come le tecnologie digitali che promuovono interazioni visive e cinetiche possano aiutare l'insegnamento-apprendimento della geometria (es. Battista 2007; Bruce et al. 2011; Clements e Sarama, 2011). Grazie alla possibilità di trasformare le figure senza modificarne le proprietà di costruzione, gli AGD mostrano almeno due vantaggi: aiutano gli studenti a vedere e costruire una vasta gamma di esempi di figure geometriche; aiutano gli studenti ad apprezzare alcuni aspetti delle relazioni inclusive, perché ad esempio è possibile trasformare un certo parallelogramma in un rettangolo (Sinclair e Bruce, 2015). Attraverso costruzioni passo a passo (come faremmo su carta con riga e compasso), software di questo tipo consentono di costruire figure geometriche che hanno la caratteristica di essere dinamiche. Infatti, è possibile trascinarne un elemento (es. i punti) mantenendo invariate tutte le proprietà determinate dalle relazioni geometriche che, per mezzo dei comandi del software, l'utente ha deciso di conferire alla figura e tutte le proprietà che sono loro conseguenza logica all'interno della teoria della geometria euclidea (Laborde e Strässer, 1990). Il *trascinamento* o *dragging* è una delle modalità di interazione con le figure dinamiche e consiste nel selezionare con il mouse un elemento di una figura dinamica e muoverlo sullo schermo.

Il dinamismo e la coerenza logica che mantengono le figure dinamiche consentono di osservare gli *invarianti* di una figura ovvero le proprietà che essa assume in maniera stabile durante il trascinamento e le proprietà indotte con il trascinamento, ove mai esso segua opportune traiettorie (Antonini e Baccaglini-Frank, 2015). La percezione di *invarianti per trascinamento* può facilitare il riconoscimento e la definizione di un quadrilatero non tanto sulla base della sua componente figurale, quanto sulla base delle proprietà che lo definiscono (componente concettuale), e prevedere se e in quali condizioni sia possibile trasformarlo in un altro quadrilatero. A nostro parere, operare in un AGD potrebbe favorire l'armonizzazione tra la componente figurale e la componente concettuale delle figure geometriche.

4. Descrizione dell'attività didattica

La trasposizione in ambito geometrico della abilità visuo-spaziali è stato uno strumento utile per guidare l'elaborazione dei quesiti inclusi nell'intervento didattico. Ogni consegna è stata costruita sulla base dell'abilità o della combinazione di abilità sollecitate secondo la nostra analisi a priori.

Insieme al trascinamento e alla percezione di invarianti per trascinamento, di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo, nella costruzione dell'intervento didattico abbiamo sfruttato altri due costrutti, elaborati dalla letteratura e peculiari degli ambienti di geometria dinamica: la differenza tra punti *base* e punti *dipendenti* (Antonini e Baccaglini-Frank, 2015), la differenza tra costruzioni *stabili* e *instabili* (Baccaglini-Frank, 2012). Poiché le figure dinamiche mantengono invariate le proprietà di costruzione, è possibile distinguerne i punti in base al loro grado di libertà sul piano dello schermo:

– liberi di muoversi ovunque nel piano;
– vincolati ad altri oggetti geometrici (punto su un oggetto);
– punti che non è possibile muovere attraverso un trascinamento diretto.

Chiameremo i primi *punti base*, cioè costruiti come nuovi punti sullo schermo; gli altri due punti *dipendenti*, cioè costruiti a partire da altri elementi con cui sono in relazione. Inoltre, se un processo di costruzione geometrica conferisce alla figura dinamica le proprietà sufficienti per essere un particolare tipo di quadrilatero, tale figura dinamica sarà una rappresentazione *stabile* di quel quadrilatero. Le figure dinamiche che rappresentano in modo stabile un quadrato, per esempio, possono derivare da diverse procedure di costruzione. Nel seguito, chiameremo *stabile* o *robusta* una figura dinamica che mantiene le proprietà che la caratterizzano, quando uno qualsiasi dei suoi punti base viene trascinato. Altrimenti diremo la figura *instabile*.

Durante l'attività didattica guidata dallo sperimentatore, gli studenti hanno lavorato in coppie, formate sulla base dei risultati del pre-test, appaiando studenti con prestazioni analoghe. L'intervento ha coinvolto 8 studenti, scelti tra quelli della classe che hanno mostrato le prestazioni più basse nel pre-test, e si è svolto in 5 incontri della durata di 2 ore circa ciascuno. L'argomento curricolare scelto riguarda l'esplorazione delle proprietà di alcuni quadrilateri ed è stato affrontato in una classe prima durante il primo quadrimestre. Sebbene tale argomento venga solitamente affrontato durante il secondo quadrimestre, ci sembra ragionevole supporre che, nei precedenti livelli scolari, gli studenti abbiano già incontrato tali figure e ne conoscano alcune proprietà. L'argomento e le modalità di intervento si inseriscono pienamente nei suggerimenti contenuti nelle *Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici con opzione Scienze Applicate* (MIUR, 2010). Infatti, nella sezione del documento dedicata alla geometria, si legge che: *Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica… Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza. La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.*

Attività	**Contenuto**
Attività 1	– Esplorazione e previsione con configurazioni semplici – Introduzione alla differenza tra punti *base* e punti *dipendenti*
Attività 2	– Introduzione al trascinamento – Differenza tra costruzioni *stabili* e *instabili*
Attività 3	– Esplorazione delle proprietà del quadrato – Carta d'identità del quadrato
Attività 4	– Esplorazione delle proprietà del parallelogramma – Carta d'identità del parallelogramma
Attività 5	– Esplorazione delle proprietà del rombo – Carta d'identità del rombo

Tabella 1 – Sintesi del contenuto dell'attività didattica

Gli incontri hanno seguito lo schema riportato in Tabella 1. Le attività sono state guidate dallo sperimentatore attraverso un'intervista contenente il canovaccio di una serie di quesiti e lasciando piena libertà di approfondire aspetti emersi dallo scambio tra gli studenti non previsti a priori. La modalità di svolgimento è stata descritta agli studenti, dicendo loro che avrebbero avuto libertà di confrontarsi sulle risposte, che sarebbe stato possibile essere in disaccordo e che alla fine avrebbero dovuto dare ciascuno una propria risposta. Prima di iniziare si sono illustrati i comandi base della barra delle funzioni di *GeoGebra* e si è lasciato del tempo ad ogni coppia per esplorare liberamente il software. Infatti, la maggior parte degli studenti non aveva mai svolto lezioni o risolto problemi in questo ambiente.

In riferimento alla Tabella 1, vediamo che lo scopo della prima parte dell’*Attività 1* è realizzare esplorazioni e previsioni con configurazioni geometriche abbastanza semplici. A tale fine, si chiede agli studenti di disegnare una retta e un punto *A* nel piano dello schermo e di dire se, trascinandolo, il punto *A* può muoversi ovunque. Si chiede, poi, di costruire un punto *B* sulla retta e di prevederne i movimenti. Dopo aver trascinato anche il punto *B* e trovato conferma o smentita della propria previsione, si chiede di esplicitare le differenze osservate tra i due punti. Si ripete l’esperienza con una circonferenza. Grazie a questo quesito gli studenti possono osservare come si comportino diversamente i punti costruiti sul piano e i punti costruiti su altri enti geometrici. Per introdurre la differenza tra punti base e punti dipendenti si chiede di disegnare in sequenza: prima due punti e poi una retta passante per essi; prima una retta e poi due punti su di essa. Dopo la costruzione si chiede agli studenti di prevedere il movimento dei punti e delle rette.

La seconda attività si concentra sul trascinamento e sulla costruzione delle figure. Si chiede di costruire liberamente un quadrato, di descrivere le proprie azioni e, a costruzione ultimata, muoverne i vertici e dire se il quadrato resta tale. Ci si aspetta che le costruzioni degli studenti non producano subito quadrati stabili. Attraverso questa esperienza può emergere il legame tra le relazioni tra gli enti geometrici che compongono una figura (gli aspetti concettuali) e le caratteristiche che essa manifesta a livello figurale. A rinforzo di questa idea il protocollo prevede un quesito in cui si chiede di eseguire una costruzione passo a passo, prevedere quali proprietà la figura costruita (che è un quadrato) manterrà durante il trascinamento e confrontare questa costruzione stabile con la propria instabile.

In generale, le attività sono state costruite in modo tale da promuovere il riconoscimento di proprietà geometriche invarianti, relazioni tra queste e processi di previsione, in un AGD. Possiamo classificare i quesiti in 3 categorie, che nel seguito descriveremo:

– problemi aperti di congettura;
– esplorazione e scoperta delle proprietà dei quadrilateri;
– problemi di costruzione.

Per *problema aperto di congettura in un AGD* intendiamo un tipo di quesito ampiamente studiato in letteratura (es. Antonini e Baccaglini-Frank, 2015), formulato in modo tale che lo studente si trovi in una situazione in cui non ha istruzioni precise da seguire, ma è libero di esplorare il problema e trarre le proprie conclusioni. “In un AGD un problema aperto di congettura spesso prende la forma di una richiesta generica di un enunciato sulle relazioni tra gli elementi della configurazione o tra le proprietà della configurazione. Le domande sono generalmente espresse nella forma “quale configurazione assume… quando…?”, “Che relazione riesci a scoprire tra… e…?”, “In quali tipi di figura può…essere trasformato?” (*ibidem*, p. 259).

Mostriamo e commentiamo di seguito un esempio di attività, tra quelle proposte durante la sperimentazione didattica, che include anche questo tipo di problema. L'estratto appartiene all'*Attività 2*. Accanto ad ogni consegna, tra parentesi, si trovano esplicitate le abilità visuo-spaziali che ci si aspetta vengano sollecitate dal compito.

Trascinamento 4

Esegui la seguente costruzione passo a passo:

- tre punti A, B e C;
- segmento BC;
- retta passante per A e parallela al segmento BC;
- punto D sulla retta;
- segmento AB;
- segmento DC.
-

Facciamo una previsione: osserva il quadrilatero ottenuto (*Scansione visiva*)

a) immagina di trascinarne i punti, quali punti ti aspetti si possano muovere liberamente, quali ti aspetti possano muoversi solo in direzioni particolari, quali pensi non possano muoversi affatto? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)
b) credi si possa ottenere un trapezio isoscele? (*Abilità di generare immagini con Previsione geometrica - Memoria spaziale a lungo termine*)
Muovendo quali vertici e in che modo? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)
c) credi si possa ottenere un trapezio rettangolo? (*Abilità di generare immagini con Previsione geometrica - Memoria spaziale a lungo termine*)
Muovendo quali vertici e in che modo? (*Abilità di manipolare immagini con Previsione geometrica*)
d) Muovi i vertici del quadrilatero che hai costruito:
- riesci ad ottenere un trapezio isoscele?
- riesci ad ottenere un trapezio rettangolo?

Possiamo osservare che il problema si compone di tre parti. Prima di tutto si chiede di eseguire una costruzione passo a passo in *GeoGebra*, per ottenere un quadrilatero (Figura 1). Ultimata la costruzione, si chiede di fare delle previsioni a figura ferma sulla natura dei punti (base o dipendenti) e sulle possibili proprietà aggiuntive da conferire alla figura al fine di trasformarla in un altro quadrilatero. In altri quesiti dell'*Attività 2* si è chiesto "Descrivi il quadrilatero che hai ottenuto" oppure "Quali quadrilateri può diventare?". In questa fase gli studenti sono sollecitati a manipolare mentalmente l'immagine, tenendo conto dei vincoli geometrici indotti dallo specifico protocollo di costruzione eseguito e, dunque, di compiere quella che abbiamo chiamato *previsione geometrica*. Tale previsione potrà essere coerente o meno con le premesse formali, per questo motivo l'ultima parte del quesito riveste un ruolo importante dal punto di vista didattico. Infatti, al termine dell'esplorazione a figura ferma, si chiede di trascinare con il mouse i vertici del quadrilatero, coerentemente con la strategia dichiarata nelle precedenti risposte, e di scoprire se la propria previsione è realizzabile oppure no.

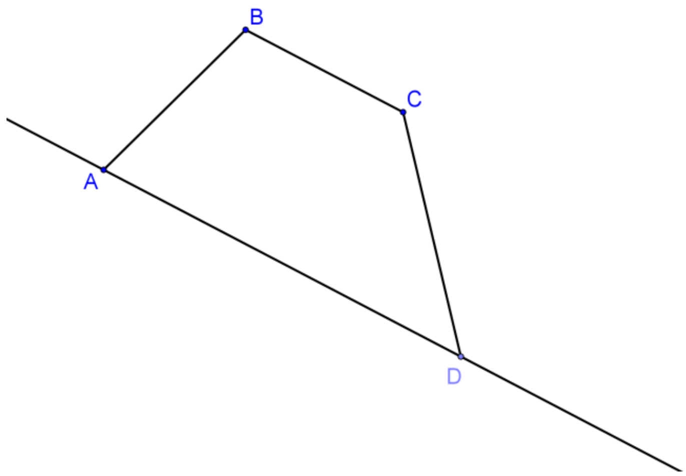


Figura 1 – Figura ottenuta dalla costruzione passo a passo proposta dal quesito "Trascinamento 4"

Di seguito proponiamo una breve analisi a priori del quesito, evidenziando le abilità coinvolte. Il quesito (4a) dovrebbe sollecitare l'*Abilità di manipolare immagini*, in quanto per rispondere correttamente sembra necessario che il solutore riconosca che: la figura è stata costruita a partire dai punti A, B e C, che dunque sono punti base; il punto D è stato costruito sulla retta parallela al segmento BC e dunque è vincolato. I quesiti (4b) e (4c) dovrebbero sollecitare la *Scansione visiva*, in quanto sembra necessario osservare il quadrilatero ottenuto dalla costruzione passo a passo, al fine di riconoscerne le proprietà. Le proprietà che il solutore può osservare dipendono dalla posizione reciproca, più o meno generale, dei punti A, B, C, D che ha scelto. La proprietà che è riconoscibile, indipendentemente da tale posizione, è il parallelismo tra i lati BC e AD del quadrilatero. Il quesito potrebbe coinvolgere anche l'*Abilità di generare immagini* e la *Memoria spaziale a lungo termine* per richiamare il prototipo di trapezio isoscele (rispettivamente di trapezio rettangolo). La *Scansione visiva* potrebbe guidare il solutore a riconoscere le proprietà comuni al quadrilatero sullo schermo e al trapezio isoscele (rispettivamente al trapezio rettangolo), per concludere che è possibile ottenere quest'ultimo a partire dal primo. L'*Abilità di manipolare immagini* dovrebbe consentire al solutore di scegliere quali vertici muovere, immaginandone il movimento, per rendere la figura sullo schermo un trapezio isoscele (rispettivamente un trapezio rettangolo), dotandola delle proprietà aggiuntive che quest'ultimo possiede. La consegna (4d) potrebbe aiutare il solutore a validare o correggere le proprie risposte.

Un problema come questo offre agli studenti la possibilità di cogliere il legame tra la configurazione che vedono sullo schermo (componente figurale) e le proprietà che la costruzione passo a passo ha conferito alla figura (componente concettuale).

La scoperta delle proprietà dei quadrilateri (quadrato, parallelogramma e rombo) è stata guidata da file *GeoGebra* già predisposti dallo sperimentatore, contenenti tre o quattro esempi di uno stesso quadrilatero stabile di cui lo studente può trascinare i vertici. Le figure sono costruite in modo tale che mantengano tutte le proprietà del quadrilatero di volta in volta esplorato, ma ne enfatizzino in particolare alcune su cui si desidera che lo studente focalizzi la propria attenzione. In Figura 2 abbiamo riportato un'immagine del file relativo all'esplorazione dei quadrati. Possiamo osservare che, durante il trascinamento con traccia attiva, il QUADRATO 1 mostra i lati tutti uguali, il QUADRATO 2 le diagonali perpendicolari, il QUADRATO 3 è inscrivibile in una circonferenza, il QUADRATO 4 ha gli angoli retti.

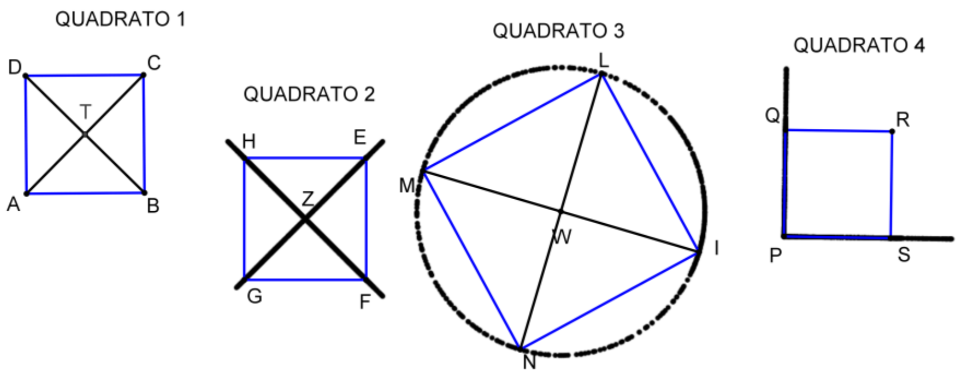
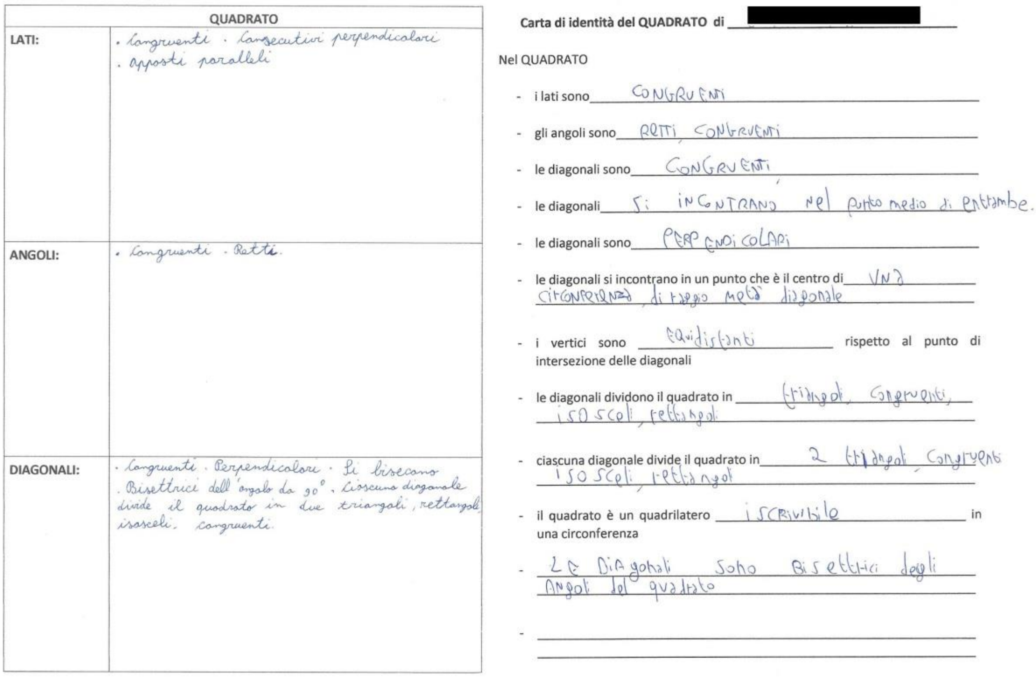


Figura 2 – Immagine tratta dal file GeoGebra di esplorazione dei quadrati

Una volta scoperte le proprietà dei quadrilateri, gli studenti le hanno formalizzate in una sorta di *Carta d'identità*, che raccoglie la lista delle proprietà riguardanti i lati, gli angoli e le diagonali del quadrilatero studiato. In Figura 3 abbiamo riportato l'elenco delle proprietà del quadrato osservate da uno studente per mezzo dell'esplorazione dei quadrati dinamici.



QUADRATO	
LATI:	. Congruenti . Consecutivi perpendicolari . opposti paralleli
ANGOLI:	. Congruenti . Retti.
DIAGONALI:	. Congruenti . Perpendicolari . Si bisecano . Bisettrici dell'angolo da 90° . Ciascuna diagonale divide il quadrato in due triangoli, rettangoli isosceli, congruenti.

Carta di identità del QUADRATO di [redacted]

Nel QUADRATO

- i lati sono CONGRUENTI
- gli angoli sono RETTI, CONGRUENTI
- le diagonali sono CONGRUENTI
- le diagonali Si INCONTRANO nel punto medio di entrambe.
- le diagonali sono PERPENDICOLARI
- le diagonali si incontrano in un punto che è il centro di UNA CIRCONFERENZA di raggio metà diagonale
- i vertici sono Equidistanti rispetto al punto di intersezione delle diagonali
- le diagonali dividono il quadrato in triangoli, congruenti, isosceli, rettangoli
- ciascuna diagonale divide il quadrato in 2 triangoli congruenti isosceli, rettangoli
- il quadrato è un quadrilatero iSCRIVibile in una circonferenza
- LE DIAgonali sono Bisettrici degli Angoli del quadrato
-

Figura 3 – Foglio di appunti (a sinistra) e Carta d'identità del quadrato (a destra)

La *Carta d'identità* dei quadrilateri è stata un utile strumento per la risoluzione dei problemi di costruzione. Sebbene, contenga solo un elenco delle proprietà che gli studenti hanno osservato, riteniamo rappresenti un ulteriore stimolo al processo di armonizzazione tra componente concettuale e componente figurale che aiuti a superare l'interiorizzazione di rappresentazioni stereotipate a vantaggio di rappresentazioni coerenti con gli elementi teorici ad esse soggiacenti. Lo strumento ha aiutato gli studenti a richiamare le proprietà utili per realizzare costruzioni stabili di quadrilateri. Infatti, le tre attività (3, 4, e 5) di esplorazione delle proprietà dei quadrilateri si concludono con la richiesta di elaborare ed eseguire una costruzione stabile di un quadrilatero dello stesso tipo di quello già esplorato.

Nelle tre attività la richiesta è stata variata leggermente. Le riportiamo interamente:

Quadrato stabile 1
In GeoGebra provate a costruire un quadrato che resti tale.
Una volta ultimata la figura, provate a muovere i suoi vertici per controllare che il quadrato sia stabile.

Quadrato stabile 2
Costruite un segmento di estremi A e B.
Completate la costruzione affinché sia la costruzione di un quadrato stabile che abbia il segmento AB come diagonale.

Parallelogramma stabile
Studente 1:
- Scrivi la costruzione di un parallelogramma stabile.
- Una volta scritta chiedi al tuo compagno se crede sia stabile e perché.

Studente 2:
Esegui la costruzione in GeoGebra e verifica se la figura resta un parallelogramma.
L'attività si ripete per l'altro studente.

Rombo stabile
Completa la seguente costruzione passo a passo affinché sia la costruzione di un rombo stabile di lato AB:
- due rette parallele r ed s;
- punto A sulla retta r e punto B sulla retta s;
- segmento AB;
- …………
- …………

Apri il file GeoGebra *Rombo stabile* [in cui gli studenti troveranno la figura parziale ottenuta seguendo i primi passi di costruzione] ed esegui la costruzione che hai completato.
Prova a muovere i vertici per controllare che il rombo sia stabile.

Questo tipo di quesiti sembra sollecitare il recupero del proprio *prototipo* (Fischbein e Nachlieli, 1998, p. 1200) della figura geometrica richiesta, eventualmente ampliato e rivisitato dal solutore sulla base delle esplorazioni compiute. Nella soluzione del compito ci si aspetta che intervengano gli aspetti concettuali appresi durante l'esplorazione a scapito dell'abituale immagine stereotipata. Sia nella fase di elaborazione dei passi di costruzione che di validazione delle costruzioni altrui sembra intervenire fortemente la *previsione geometrica*, abbinata ad alcune abilità visuo-spaziali sia per immaginare gli enti geometrici coinvolti e le loro relazioni sia per visualizzare le figure parziali che si potrebbero ottenere aggiungendo un certo passo di costruzione.

5. Risultati preliminari

La sperimentazione didattica ha coinvolto 8 studenti scelti tra quelli della classe che hanno mostrato le prestazioni più basse nel pre-test. Dopo l'attività didattica al campione è stato somministrato lo stesso test e si è confrontato il numero di risposte corrette nei due test. Sebbene il campione sia troppo esiguo per considerazioni statistiche, dal punto di vista quantitativo, la sperimentazione ha dato buoni risultati: mediamente è stata riscontrata una variazione percentuale delle risposte corrette pari al 17% (con picchi del 28%) e un miglioramento generale delle prestazioni per tutti gli studenti.

L'analisi qualitativa dei dati è stata condotta confrontando le risposte degli studenti nel pretest e nel post-test. Si è prestata attenzione ad alcuni aspetti specifici, quali: l'evoluzione del linguaggio e dei processi immaginativi; l'influenza dei significati situati, sviluppati durante l'intervento didattico, sull'esplorazione e sulla costruzione di figure geometriche; il ruolo dell'aspetto concettuale e dell'aspetto figurale delle figure geometriche.

Dal punto di vista sia cognitivo che didattico, l'analisi qualitativa e quantitativa dei dati ci consente di trarre alcune conclusioni che riportiamo molto sommariamente di seguito. Dopo l'attività in coppia, gli studenti sembrano maggiormente capaci di riconoscere figure mostrate in orientamenti inusuali o figure semplici all'interno di altre figure; sembrano utilizzare strategie immaginative più efficaci, producendo previsioni più coerenti alle premesse; riescono a compiere inferenze circa la costruzione geometrica di una figura dinamica; manifestano una percezione dei rapporti topologici più precisa; sembrano più abili nell'esplorare figure generate solo mentalmente e, in generale, più propensi alla visualizzazione; sembrano manifestare l'abilità di manipolare mentalmente una figura o una classe di figure, al fine di produrre una congettura o individuarne le proprietà invarianti; sembrano manifestare la capacità di denominare e classificare i quadrilateri solo sulla base delle proprietà di cui godono, piuttosto che per la coincidenza con un'immagine stereotipata; sembrano aver costruito significati situati durante le attività di potenziamento, che sembrano agevolarli nella manipolazione, generazione e mantenimento delle immagini mentali; sembrano aver ampliato la gamma di prototipi di quadrilateri depositati nella memoria a lungo termine; sembrano conoscere e saper utilizzare le proprietà dei quadrilateri per esplorarli e manipolarli; sembrano più abili nell'elaborare costruzioni passo a passo; sembrano capaci di riconoscere proprietà invarianti e di produrre congetture; usano in generale un lessico più preciso.

Globalmente, le attività di scoperta e formalizzazione delle proprietà e di manipolazione delle figure sembrano essersi rivelate utili per sviluppare negli studenti un maggiore controllo concettuale sulle figure, che sembra aver guidato, indirizzato e talvolta corretto le previsioni degli studenti.

6. Conclusioni e prospettive di ricerca

L'attività descritta in questo articolo fa parte di una sperimentazione didattica che rientra in uno studio più generale sulle abilità cognitive di natura visuo-spaziale coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici. Lo studio si è mosso su due fronti: da un lato ha indagato la possibilità di interpretare alcune abilità visuo-spaziali, descritte nella letteratura della Psicologia cognitiva, nell'ambito dell'apprendimento matematico della geometria piana; dall'altro ha esplorato la possibilità di modificare particolari abilità visuo-spaziali, attraverso un intervento didattico che fa uso della geometria dinamica.

La costruzione del quadro teorico ha evidenziato alcune delle difficoltà epistemologiche insite nel far dialogare costrutti teorici e metodologie d'indagine appartenenti a discipline diverse, sebbene accomunate da interessi di ricerca spesso comuni. Ad oggi, infatti, la Didattica della Matematica e la Psicologia cognitiva non sono riuscite a costruire un contesto di ricerca comune per studiare i processi di visualizzazione ai quali sono entrambe interessate.

D'altra parte, il primo studio pilota, realizzato in una classe I di un Liceo Scientifico opzione Scienze applicate, ha mostrato risultati promettenti. Da un lato, l'analisi dei dati sembra confermare come il controllo teorico che gli studenti esercitano sulle figure (osservate o immaginate) influenzi le risposte ai compiti geometrici proposti durante l'intervento didattico. Dall'altro ha consentito di riscontrare nelle produzioni degli studenti istanze del costrutto teorico che abbiamo chiamato *previsione geometrica*, soprattutto nello stupore (scarso o notevole) manifestato dagli studenti di fronte a soluzioni attese o inattese dei quesiti. Dunque, sembra necessario formalizzare meglio le componenti di un nuovo costrutto teorico relativo ai processi di visualizzazione con scopo.

Attualmente stiamo lavorando dal punto di vista teorico per affinare la lente teorica utilizzata nello studio pilota, per renderla più utile ad individuare nelle produzioni degli studenti istanze di manipolazione e previsione geometrica.

Dal punto di vista pragmatico, l'intervento didattico sembra aver mostrato cambiamenti nell'approccio degli studenti a compiti geometrici ad alto potenziale visuo-spaziale. Sebbene l'intervento fosse rivolto ad un piccolo campione e la modalità fosse quella dell'intervista guidata dallo sperimentatore, riteniamo che possa essere facilmente adattato alla pratica scolastica di classe quotidiana in un ambiente di geometria dinamica.

7. Bibliografia

Antonini, S. e Baccaglini-Frank, A. (2015). Il trascinamento di mantenimento nella formulazione di congetture in ambienti di geometria dinamica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* 38 A-B.3, 257-278.

Baccaglini-Frank, A. (2010). Conjecturing in Dynamic Geometry: A Model for Conjecture-generation through Maintaining Dragging. *Doctoral dissertation*, University of New Hampshire, Durham, NH.

Baccaglini-Frank, A. (2012). Potenzialità Didattiche di Alcune Attività in Geometria Dinamica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *35B* N.1, 27-50.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 843-908.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational studies in mathematics*, *11*(3), 257-269.

Bruce, C., McPherson, R., Sabbati, M. e Flynn, T. (2011). Revealing significant learning moments with interactive whiteboards in mathematics. *Journal of Educational Computing Research, 45*(4), 433-454.

Bruce, C. D. e Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?, *ZDM*, *47*(3), 331-343.

Candeloro, A., Del Zozzo, A., Bettini, P., Poli, F. e Baccaglini-Frank, A. (2015). Possibili effetti dell'apprendimento in geometria mediato da un software di geometria dinamica nella scuola secondaria di primo grado. Risultati del progetto "Muoviamo le proprietà geometriche". *Difficoltà in Matematica, 12*(1), 29-47.

Clements, D. H. e Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Cornoldi, C. e Vecchi, T. (2004). *Visuo-spatial working memory and individual differences*. Hove (UK): Psychology Press.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study* (pp. 37–51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E. e Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193-1211.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: An epistemological study.* New York: Oxford.

Guarnera, M. A., Castellano, S. e Di Nuovo, S. (2013). Mental imagery: un'antica e sempre attuale risorsa della mente. *Qi-Questioni e idee in psicologia 4*. Consultabile al sito: http://qi.hogrefe.it/rivista/mental-imagery-antica-e-sempre-attuale-risorsa-d/

Hadamard, J. (1944). *The psychology of mathematical invention*. NY: Dover Publications.

Hadas, N., Hershkowitz, R. e Schwarz, B. B. (2000). The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1/2), 127-150.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Laborde, J. M. e Strässer, R. (1990). Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für didaktik der mathematik, 90*(5), 171-177.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A. e Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. In: *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.

Mammarella, I. C., Pazzaglia, F. e Cornoldi, C. (2008). Evidence for different components in children's visuospatial working memory. *British Journal of Developmental Psychology, 26*(3), 337-355.

Mariotti, M. A. (1996). The interaction between images and concepts in geometrical reasoning. *Unpublished PhD dissertation*. *Università di Pisa and Tel Aviv University*.

Mariotti, M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora Editrice.

Mariotti, M. A. e Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Miragliotta, E. (2016). *Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali coinvolte: possibili effetti di un potenziamento con un software di geometria dinamica*. Tesi di Laurea Magistrale in Matematica. Relatori: L. Tomasi e A. Baccaglini-Frank.

Miragliotta, E. e Baccaglini-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and Geometry: a first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. *Paper at TWG24 of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin, 2017.*

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A. e Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica (I parte). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *40B*(3), 339-360.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali 2010 per i licei scientifici con opzione scienze applicate*.

Mulligan, J. T. e Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.). *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-45). Dordrecht: Springer Science-Business Media.

Neisser, U. (1976). *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, *34*(2), 29-43.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of XXIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250–264), Haifa, Israel.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1966). *The child's conception of space*. New York: W. W. Norton & Co.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, *17*(3), 297-311.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 44-55.

Sinclair, N. e Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school, *ZDM*, *47*(3), 319-329.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. e Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.

Wai, J., Lubinski, D. e Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817-835.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. L. Erlbaum Associates, 281-297.

Received October 6, 2017
Revision received December 10, 2017/December 13, 2017
Accepted January 8, 2018