“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 174-189 – ISSN 2038-1034

La discussione collettiva: un’occasione per espletare il potenziale matematico delle fonti storiche

Andrea Maffia

Abstract – *Integrating the history of mathematics in class could be a hard task with young pupils. Indeed, the language of historical sources often poses problems for the modern reader.. Such texts represent cultural artefacts that can give access to mathematical knowledge. The teacher can exploit such potential by acting as a mediator between the mathematical signs of the source and those signs that are accessible to students. Through a case study, we investigate the role of the teacher in the process of semiotic mediation during a collective discussion. The intervention analysed is made up of two phases: firstly, the students work together and, secondly, the teacher mediates a discussion aimed at institutionalizing the knowledge gained. During the analysis of the discussion, working on a text from Tartaglia’s translation of Euclid’s Elements, a group of fifth graders construct a definition of prime numbers. Referring to Theory of Semiotic Mediation, we analyse the role of the teacher in building up semiotic chains linking the students’ productions to an institutionalized knowledge emerging from the discussion. We highlight how the teacher’s focalization on the students’ words facilitates the progress of the discussion, in other words, the potential of the historical text is exploited by fostering a definition that is close to culturally shared mathematics.*

Riassunto – *L’integrazione della storia della matematica può risultare difficile con gli studenti più giovani. Infatti, la fonte storica può presentare un linguaggio lontano da quello attuale. Tali testi rappresentano artefatti culturali che possono dar accesso a una conoscenza matematica. L’insegnante può espletare tale potenziale agendo da mediatore tra i segni matematici della fonte e i segni accessibili agli studenti. Con uno studio di caso, si indaga il ruolo dell’insegnante nel processo di mediazione semiotica durante una discussione collettiva. L’intervento analizzato si svolge in due fasi: una fase in cui gli studenti lavorano collaborando e una fase di istituzionalizzazione attraverso la discussione mediata dall’insegnante. Nella discussione analizzata, il lavoro su un testo tratto dalla traduzione di Tartaglia degli Elementi di Euclide, porta alla costruzione di una definizione di numeri primi all’interno di una classe quinta della scuola primaria. Facendo riferimento alla Teoria della Mediazione Semiotica, si analizza il ruolo del docente nella costruzione di catene semiotiche a partire dalle produzioni dei singoli gruppi fino all’istituzionalizzazione di un sapere condiviso emergente dalla discussione. Si mette in evidenza che la focalizzazione dell’insegnante sulle parole degli alunni permette l’avanzamento della discussione, ovvero viene espletato il potenziale del testo storico arrivando a una definizione vicina alla matematica culturalmente condivisa.*

Keywords – collective discussion, historical sources, mediation, semiotics, teacher

Parole chiave – discussione collettiva, fonti storiche, mediazione, semiotica, insegnante

Andrea Maffia ha conseguito il Dottorato di ricerca in Didattica della Matematica presso l’Università di Modena e Reggio Emilia. Attualmente è insegnante nella scuola del primo ciclo e docente a contratto di alcuni corsi e laboratori del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell’Università di Bologna. È membro eletto del comitato della Società Europea di Ricerca in Didattica della Matematica come rappresentante dei giovani ricercatori. La sua ricerca riguarda principalmente gli aspetti semiotici nel processo di apprendimento e insegnamento dell’aritmetica nel primo ciclo, con una particolare attenzione verso il ruolo dell’insegnante.

1. La discussione matematica

Il costrutto di discussione matematica ha radici lontane e definizioni diverse. Per esempio, secondo Pirie e Schwarzenberger (1988) si tratta di una “conversazione intenzionale su un soggetto matematico in cui ci sono contributi e interazioni genuini degli allievi” (citato in Bartolini Bussi, 1991, p. 9). Nel documento Matematica per il cittadino, prodotto dall’Unione Matematica Italiana (2001), si parla invece di una “polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che è uno degli scopi dell’attività di insegnamento/apprendimento” (p. 107). Quest’ultima definizione viene ripresa da lavori precedenti di Bartolini Bussi e colleghi (Bartolini Bussi & Boni, 1995; Bartolini Bussi *et al.*, 1995; Bartolini Bussi, 1996) in cui viene evidenziata la non casualità dell’uso del termine *voci*, da intendersi con riferimento all’uso che ne viene fatto da Wertsch (1991) seguendo la tradizione dei lavori di Bakhtin, ovvero come una forma di pensiero/comunicazione che rappresenta “la prospettiva di un individuo, il suo orizzonte concettuale, le sue intenzioni, il suo modo di vedere il mondo” (Bartolini Bussi, 1996, p. 16).

Una modalità di discussione matematica è il dibattito scientifico su un oggetto matematico comune; tale dibattito viene introdotto e orchestrato dall’insegnante per raggiungere delle conclusioni condivise sull’oggetto matematico al centro della discussione. La voce portata dall’insegnante rappresenta la cultura matematica ed è quindi diversa dalle voci che sono introdotte nella discussione dagli studenti; queste “portano in scena prospettive di altre categorie sociali e culturali (ad esempio quelle della pratica extrascolastica connessa al sapere matematico espresso dall’insegnante)” (Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 227).

Le parole del bambino coincidono con le parole dell’adulto nel loro riferimento all’oggetto, cioè indicano gli stessi oggetti, si riferiscono allo stesso cerchio di fenomeni; non coincidono però nel loro significato (Vygotskij, 1992, citato in Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 232).

Quando la classe ha una lunga esperienza in questo tipo di dibattiti, le diverse voci vengono sintetizzate negli interventi degli allievi (Bartolini Bussi, 1996). Nel caso in cui le voci emerse nell’attività collettiva riemergano nelle produzioni individuali allora tali voci sono *interiorizzate* (Vygotskij, 1978) e sono espresse, implicitamente o esplicitamente, da un attore individuale che sta parlando con se stesso (Bartolini Bussi, 1996).

Le discussioni possono essere classificate in diverse categorie a seconda dell’oggetto di discussione e della modalità (Bartolini Bussi, 1991). Sono discussioni di matematizzazione quelle in cui si risolve collettivamente un problema oppure si condividono le soluzioni individuali. Sono discussioni di concettualizzazione quelle che partono da domande relative al significato di un termine o di qualsiasi altro segno matematico (simbolico, grafico, ecc.). Quest’ultima modalità di discussione ha lo scopo di espandere tali significati ed è generalmente utilizzata all'inizio di un intervento didattico per richiamare esperienze pregresse degli studenti oppure al termine di discussioni di altro tipo per fare sintesi (*ibidem*).

La discussione che verrà analizzata in questo lavoro è classificabile proprio come una discussione di concettualizzazione. In particolare, a partire da una fonte storica gli studenti sono guidati verso la (ri)costruzione di una definizione. L'uso di una fonte storica porta nella discussione un'ulteriore voce, quella di Tartaglia, che si aggiunge a quelle dell'insegnante e dei discenti. Tale voce ha delle peculiarità che derivano dal tempo e dal luogo in cui il testo storico è stato scritto e che richiedono un particolare intervento dell'insegnante; tali peculiarità sono discusse nelle sezioni successive.

2. Fonti storiche come artefatti culturali

L'introduzione della storia della matematica all'interno dell'insegnamento della matematica ha le sue origini nella cosiddetta "teoria della ricapitolazione" per cui lo sviluppo culturale del singolo (ontogenesi) seguirebbe un cammino analogo a quello della storia della conoscenza così come vissuta dai suoi predecessori (filogenesi). Sebbene questo approccio teorico si sia rivelato fallace sia dal punto di vista biologico sia psicologico, è rientrato più volte nel discorso dell'educazione matematica (Furinghetti & Radford, 2008). In questo lavoro ci si discosta da tale approccio allineandosi invece alla prospettiva di Freudenthal (1973) secondo cui "Esortare a un insegnamento in prospettiva genetica non significa che le idee debbano essere presentate nell'ordine in cui sono emerse e neanche con i vicoli ciechi e tutte le deviazioni che sono stati tagliati fuori. Chi ha la vista di ciò che viene a posteriori, può dire come sarebbe stato ciò che il cieco ha inventato e scoperto se ci fossero stati insegnanti che sapevano ciò che adesso sappiamo… Non è l'impronta storica dell'inventore che dovremmo seguire, ma un corso della storia migliorato e meglio guidato" (pp. 101-103).

L'introduzione della storia può essere attuata attraverso fonti primarie, ovvero i manoscritti originali, o fonti secondarie, opere riedite, modificate o commentate. Le fonti primarie hanno notevoli potenzialità: Demattè e Furinghetti (2011) ritengono che l'uso delle fonti originali favorisca il contatto con linguaggi, rappresentazioni, forme di comunicazione e problemi stimolando la riflessione culturale sulle civiltà presenti e passate.

L'uso delle fonti originali può anche presentare vari problemi. Una difficoltà consiste nella scarsa accessibilità ai testi antichi; tuttavia, le moderne biblioteche digitalizzate permettono l'accesso libero a molti fonti che sarebbero altrimenti introvabili. Dal punto di vista didattico l'uso delle fonti primarie richiede una preparazione di tipo storico e la conoscenza della lingua utilizzata dal matematico considerato. Tutto ciò rende l'uso delle fonti primarie all'interno della scuola piuttosto raro, specialmente nel primo ciclo d'istruzione.

Nel presente lavoro si assume un'ottica vygotskiana partendo dall'idea che lo sviluppo di ogni persona è un processo di interiorizzazione di modi di vivere storicamente stabiliti e collettivamente implementati (Sfard, 2009). Si concorda con Radford quando afferma che "il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, mediante un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici" (Radford, 1997, citato in D'Amore e Bagni, 2005, p. 77). Per questo, come verrà specificato successivamente, si è fatta la scelta di integrare una fonte storica primaria in un intervento didattico nella scuola primaria. Tuttavia, visto quanto gli autori sopracitati sottolineano l'importanza dell'*adattamento* didattico, si vuole studiare con particolare attenzione il ruolo dell'insegnante nel proporre l'uso della fonte storica.

Ci si ispira al lavoro di Mariotti e Maracci (2012) che utilizzano un brano di Eulero tratto dal suo *Introductio in Analysis Infinitorum, Tomus secundus, Theoriam Linearum curvarum* (1748) per avviare una discussione sul grafico di una funzione con degli studenti di scuola secondaria di secondo grado. La classe coinvolta nella loro sperimentazione ha fatto uso del software Cabri-Geometre per rappresentare grafici di funzione come co-variazione di due variabili e viene loro proposto un testo in cui Eulero suggerisce un approccio simile a quello seguito dal programma. Dopo aver chiesto agli studenti di dar senso al testo di Eulero, l'insegnante chiede di rappresentare con una figura quello che il testo storico spiega. Immediatamente emerge dagli studenti un richiamo al software utilizzato. Come notano gli autori, "Il testo di Eulero, per via del suo potere evocativo, funziona come artefatto secondario in relazione all'artefatto primario Cabri: la descrizione dinamica di variabili, funzione e grafico fornita è consistente con quella che si può esperire con Cabri. Allo stesso tempo, realizzare la costruzione di Eulero con Cabri può aiutare a dar senso al testo stesso. Quindi i due artefatti hanno il potere di evocarsi l'un l'altro. L'articolazione del mondo di Cabri e del mondo matematico evocato dal testo fornisce una polifonia di voci… tale polifonia offre all'insegnante *una risorsa che può essere sfruttata nella discussione collettiva*: una prospettiva multipla che mette in relazione le attività in Cabri con il significato matematico di grafico" (Mariotti & Maracci, 2012, p.69, enfasi aggiunta).

Pertanto la fonte storica agisce come un artefatto in quello che gli autori interpretano, all'interno del quadro di riferimento della Teoria della Mediazione semiotica, come il processo di *mediazione semiotica* attuato dall'insegnante nel corso della discussione di classe con gli studenti. La finalità del presente lavoro è proprio quella di studiare questo processo nel caso, però, del primo ciclo di istruzione. Una definizione più precisa di tale processo e il quadro teorico di analisi dello stesso sono oggetto della prossima sezione.

3. L'insegnante come mediatore: Teoria della Mediazione Semiotica

La Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) propone un modello del processo di insegnamento-apprendimento basato sulla possibilità di ri-contestualizzare i concetti matematici mettendo al centro dell'attenzione un artefatto e i suoi modi d'uso, come mediatori tra pratica e teoria, tra significati spontanei e matematici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Prendendo una prospettiva a un tempo didattica e semiotica, elabora il costrutto della mediazione semiotica di Vygotskij (1978) e in particolare ipotizza che lo sviluppo dei significati emergenti dalle attività con strumenti possa fornire la base potenziale per la costruzione, opportunamente guidata, di conoscenze matematiche (Maffia & Mariotti, 2016).

Nella classe, la richiesta di usare un artefatto in relazione a un compito specifico determina il modo in cui è effettivamente usato dagli studenti, e dunque i significati che dall'attività con esso possono emergere. Tali significati possono richiamare per l'esperto (l'insegnante) significati matematici e dunque conoscenze che possono essere obiettivi didattici di un intervento. Tuttavia, non è detto che lo studente sia immediatamente consapevole dei significati matematici che possono essere associati all'artefatto stesso.

Si definisce potenziale semiotico di un artefatto la duplice relazione che lo lega da un lato con i significati personali degli allievi, così come emergono nelle attività di classe, e dall'altro con i significati matematici evocati (agli occhi dell'esperto) dall'uso dell'artefatto (connessioni sul lato sinistro della Figura 1). In questo senso, l'analisi dei modi d'uso di un artefatto in relazione a compiti specifici diventa un elemento chiave della pianificazione di un intervento didattico centrato sull'uso dell'artefatto stesso. La sequenza di attività da presentare agli allievi, così come l'organizzazione di tali attività, deve basarsi sull'analisi del potenziale dell'artefatto in modo che i significati emergenti nello svolgimento del compito con l'artefatto possano svilupparsi acquisendo, anche per gli allievi, lo status di significati matematici.

In che modo si esplicita il potenziale semiotico dell'artefatto? Quando viene chiesto loro di svolgere una consegna con l'artefatto, gli allievi producono testi (verbali, scritti, rappresentazioni grafiche) composti di segni che hanno significato se riferiti alla particolare consegna o all'artefatto stesso: sono segni situati. Per via dello stretto legame che intercorre fra questi segni e l'artefatto, sono detti *segni artefatto*. Attraverso il processo di insegnamento/apprendimento i segni prodotti dagli studenti sono messi in relazione con quelli culturalmente condivisi, quelli che possono essere chiamati *segni matematici* (lato destro della Figura 1).

La differenza sostanziale fra i segni artefatto e quelli matematici è il contesto a cui si riferiscono: i segni artefatto fanno riferimento all'attività realizzata con l'artefatto stesso, possono essere messi in relazione con quella che Radford (2003) chiama *generalizzazione contestuale* o con ciò che Sfard (2009) definisce come *uso guidato da una routine*. Per esempio: se uno studente usa la parola "circonferenza" per riferirsi a tutte le linee chiuse che vengono prodotte usando un compasso, sta utilizzando un segno che appare come matematico ma che può essere ben lontano dal significato culturalmente condiviso di luogo dei punti equidistanti dal centro.

In definitiva, uno degli obiettivi cruciali dell'insegnamento è quello di promuovere "l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 283).

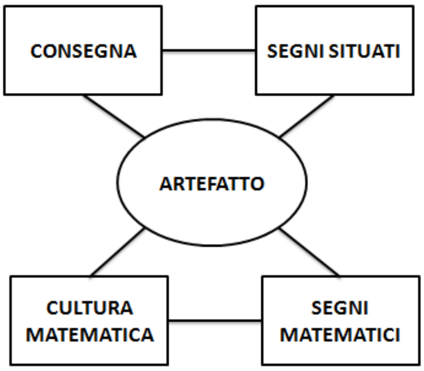

Figura 1 – Modello della polisemia dell'artefatto nella TMS

Un ruolo centrale è giocato dall'insegnante. Durante il processo di mediazione semiotica, l'insegnante usa diversi segni specificatamente per passare dai segni artefatto a quelli matematici. Tutti i segni che sono utilizzati con questo obiettivo vengono definiti *segni pivot* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Esempi di segni pivot sono le ibridazioni di parole o frasi che appartengono al dominio dell'artefatto (come il riferimento a parti dell'artefatto) con altre parole prese dalla cultura matematica. Un artefatto sarà chiamato strumento di mediazione semiotica quando viene usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente.

L'insieme dei segni artefatto e matematici, insieme ai pivot che li mettono in relazione, viene chiamato catena semiotica.

Lavorando con un artefatto si costruiscono significati legati a esso: le attività semiotiche libere o programmate (dialogo, scrittura di testi, conversazioni) che accompagnano o seguono l'azione con l'artefatto non solo rivelano l'emergere di tali significati, ma costituiscono, in una prospettiva vygotskiana, il contesto sociale nel quale i significati evolvono.
"Nello sviluppo culturale del bambino ogni funzione compare due volte, su due piani: dapprima compare sul piano sociale, poi sul piano psicologico. Prima compare tra due persone, sotto forma di categoria interpsicologica, poi all'interno del bambino, come categoria intrapsicologica" (Vygotskij, 2010, p. 28).

Pertanto la transizione dai significati personali a quelli culturalmente condivisi deve necessariamente passare attraverso l'interazione con gli altri: i pari e i più esperti. In particolare l'insegnante assume il particolare ruolo di *voce* della cultura condivisa dal mondo che si trova all'esterno della classe. Il ruolo chiave del docente è quello dell'esperto che è consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto e quindi organizza attività collettive finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Pertanto, l'uso di un artefatto all'interno della didattica non può essere studiato senza tener conto delle azioni del docente. "L'insegnante, introducendo un artefatto in una discussione matematica per interpretarne il funzionamento o discutere la soluzione di uno specifico problema, ne sfrutta il potenziale semiotico; evoca situazioni già vissute o ne crea di nuove e concede tempo per l'articolarsi delle voci" (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9), sia quelle portate dagli allievi, e centrate sull'esperienza con l'artefatto, sia quella della matematica portata dall'insegnante stesso e, nel nostro caso, anche dalle fonti storiche. Cercherà di rendere accessibili agli allievi i nuovi significati che sono il suo obiettivo didattico. Il docente consapevole del potenziale semiotico di un artefatto organizza tutte le fasi del lavoro al fine di farlo emergere nelle attività che coinvolgono direttamente l'artefatto e di svilupparlo nell'ambito della discussione collettiva della classe.
"L'insegnante agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti. In altre parole: l'insegnante utilizza l'artefatto come strumento di mediazione semiotica. Per via dell'importanza culturale di questo processo noi possiamo definire l'insegnante un *mediatore culturale*. Tale espressione non si riferisce all'atto concreto dell'utilizzare uno strumento per svolgere un compito, ma piuttosto al fatto che significati nuovi, legati al reale utilizzo di uno strumento, possono essere generati e possono evolvere sotto la guida di un esperto" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 285, enfasi nell'originale).

Mariotti e Maracci (2010) hanno studiato le azioni degli insegnanti durante la discussione matematica e le hanno classificate in schemi, ovvero insiemi di situazioni in cui l'insegnante mostra dei comportamenti invarianti. A ciascuno schema corrispondono specifici obiettivi che sono di seguito descritti.

Lo schema *back to the task* (ritorno alla consegna) è definito dalla classe di situazioni caratterizzate dalla necessità di promuovere negli studenti la produzione di segni artefatto. In queste situazioni l'insegnante richiede esplicitamente di ricostruire quanto fatto con l'artefatto, il tentativo di richiamare tale attività contribuisce alla ricostruzione di un contesto condiviso e quindi alla condivisione di segni. L'obiettivo è quello di provocare la maggiore produzione possibile di segni artefatto personali all'interno di tale contesto condiviso.

Quando dalla discussione emerge una rete di segni che viene condivisa si crea l'esigenza di selezionare gli aspetti pertinenti rispetto all'obiettivo di raggiungere significati culturalmente condivisi. Queste situazioni corrispondono allo schema *focalization* (focalizzazione) i cui obiettivi sono, appunto, l'evidenziazione di specifici segni al fine di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di tali segni e la circoscrizione dei riferimenti all'artefatto per supportare la presa di coscienza degli aspetti chiave da parte degli studenti. Per far questo, l'insegnante dirige verbalmente l'attenzione degli studenti su certi aspetti dell'artefatto, circoscrive il significato di alcuni segni isolando aspetti chiave dalla molteplicità degli altri possibili. Questi primi due schemi, insieme, costituiscono quella che viene chiamata costruzione collettiva di segni condivisi (*ibidem*).

Lo sviluppo dei segni artefatto verso segni matematici consiste di altri due schemi. Il primo è detto *ask for a synthesis* (richiesta di sintesi) e raccoglie le situazioni in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. In queste situazioni si ha la necessità di generalizzare e decontestualizzare i significati emersi. L'insegnante ha l'obiettivo di promuovere tale decontestualizzazione/generalizzazione mantenendo solo quei significati personali che sono considerati pertinenti al segno matematico obiettivo. Per farlo, richiede esplicitamente di fare sintesi supportando la formazione di un ambiente semiotico in cui segni matematici possono essere prodotti e messi in relazione con segni artefatto. Può incentivare esplicite connessioni fra le due tipologie di segni.

Quando la discussione ha portato a una generalizzazione o a una decontestualizzazione dei significati dall'uso dell'artefatto, è necessario ratificare l'accettabilità di un segno nel contesto della matematica. Queste sono le situazioni in cui l'insegnante fornisce una sintesi; si tratta dello schema *provide a synthesis*. Obiettivi di questo schema sono una formulazione matematica che introduca i segni matematici desiderati come evoluzione dei segni personali emersi precedentemente e l'evidenziazione delle relazioni fra i segni emersi nei vari momenti della discussione. L'insegnante fornisce una esplicita sintesi in cui possono essere introdotti dei nuovi segni matematici in continuità coi segni emersi nella discussione. "Un'orchestrazione della discussione matematica realizzata attraverso un continuo avanti e indietro fra il contesto dell'artefatto e quello matematico può promuovere un ricco intreccio di significati personali e matematici" (Mariotti & Maracci, 2010, p. 103).

Tenendo conto di questo quadro teorico, in questo lavoro si vuole studiare il processo di mediazione semiotica messo in atto dall'insegnante per espletare il potenziale semiotico di una fonte storica primaria nel contesto della scuola primaria. In particolare ci si domanda: nell'orchestrare una discussione matematica su un testo storico, un'insegnante di scuola primaria mette in atto gli stessi schemi di comportamento che in letteratura sono documentati per gli insegnanti di scuola secondaria?

Per rispondere a questa domanda verrà analizzato un singolo studio di caso. I dati saranno analizzati attraverso le lenti teoriche della TMS al fine di individuare se gli schemi classificati da Mariotti e Maracci (2010) sono evidenziabili anche nel nostro contesto.

4. Uno studio di caso

Lo studio di caso qui presentato consiste nell'analisi di una discussione collettiva orchestrata da un'insegnante dopo che gli alunni hanno lavorato alla parafrasi in italiano moderno di un testo in italiano volgare di Tartaglia, tratto dal *Euclide Megarense Acutissimo Philosopho* (1543), ovvero la traduzione commentata degli Elementi di Euclide. L'estratto proposto agli studenti (Figura 2) è il commento del traduttore (cioè Tartaglia stesso) alla seconda definizione dell'ottavo libro, la definizione di numero superficiale. Nel suo commento, Tartaglia mette in guardia il lettore dal pensare che siano numeri superficiali solo quelli che possono essere espressi come prodotto di due numeri maggiori dell'unità, ovvero i numeri non primi. Nel farlo fornisce esempi di numeri superficiali e di numeri primi.

Diffinitione .ii.

[2/17] Lo numero che è contenuto da duoi lati è detto numero ſuperficiale.

Il Tradottore.

Exempli gratia .12. sera detto numero superficiale per essere contenuto da duoi lati liquali sono .3. e .4. ouero .2. e .6. & ſimilmente il .15. & i suoi lati sono .3. e .5. ma alcuni dicono che ne.13. ne.17. ne.19. ne alcuno altro numero primo se pone dire realmente numeri ſuperficiali perche non sono contenuti da duoi lati ouer da dui numeri . ideo & c. Ma questi tali se inganano perche inuero, ogni numeri primo e ſuperficiale, & l'un di suoi lati e la unita e l'altro e il medesimo numero primo.

Figura 2 – Riproduzione del testo consegnato agli studenti

Agli studenti è stata consegnata una foto della fonte originale in cui le lettere appaiono così come riportate nella Figura 2. Si può notare che la mancanza di accenti, l'uso del simbolo "&" per la congiunzione "e" nonché l'uso della "s" lunga costituiscono degli elementi di difficoltà legati alla particolare fonte storica. La classe coinvolta, una quinta primaria, non ha mai svolto lavori di parafrasi di testi in volgare prima di questa consegna. Gli studenti sono stati coinvolti in numerose attività di rappresentazione di moltiplicazioni attraverso diagrammi rettangolari (Maffia & Mariotti, 2016; Maffia, 2017) e in passato è stata loro presentata la tavola di Laisant. Si tratta una tavola pitagorica in cui la prima colonna è larga un quadretto, la seconda due, la terza tre e così via. Allo stesso modo l'altezza delle righe cresce di un quadretto a partire dalla prima fino alla decima. In questo modo ogni casella ha dimensioni che corrispondono ai fattori della moltiplicazione che rappresenta e contiene un numero di quadretti equivalente al risultato; per esempio la casella che corrisponde a 2×3 è un rettangolo con dimensioni di due e tre quadretti, quindi contiene sei quadretti.

Nonostante la partecipazione ad altra sperimentazione didattica in passato, l'insegnante coinvolta non conosce il quadro di riferimento che verrà utilizzato per l'analisi proposta in questo lavoro. Inoltre, l'insegnante è giovane e con pochi anni di esperienza alle spalle, ma con una solida preparazione pedagogica.

Prima della fase di lavoro vera e propria, l'insegnante racconta agli studenti alcuni cenni biografici su Tartaglia e, successivamente, spiega la provenienza del testo su cui gli studenti lavoreranno. Una copia del testo viene consegnata a ciascuno degli alunni. Viene chiesto di lavorare in piccoli gruppi alla seguente consegna:

1) Riscrivete in parole moderne la definizione ii e il testo del "Tradottore".
2) Inventate dei disegni che possano aiutare a capire quello che viene detto nel testo.
3) Inventate altri esempi di "numeri superficiali" e di "numeri primi".

La prima consegna è pensata per spingere gli studenti a un'attenta lettura del testo e un'analisi del significato delle parole in esso riportate. La seconda consegna richiede una trasformazione dei segni riportati nel testo (tutti di tipo verbale) in segni grafici. Lo scopo è quello di sollecitare l'uso dei diagrammi rettangolo come strumento interpretativo per il testo, ovvero realizzare la doppia evocazione tra artefatti (in questo caso la fonte storica e il diagramma rettangolare) messa in evidenza da Mariotti e Maracci (2012) e discussa nella sezione 2. L'ultimo punto della consegna vuole rendere esplicita l'interpretazione che gli studenti danno ai termini matematici che compaiono nel testo e che per loro sono completamente nuovi. Le tre parti della consegna e gli obiettivi sono stati discussi e concordati a priori tra l'autore e l'insegnante della classe.

Lo svolgimento della consegna in piccoli gruppi è seguito da una discussione collettiva in cui l'insegnante richiede agli studenti di riportare quanto emerso dalla prima fase di lavoro e, nel farlo, riporta alla lavagna una traduzione del testo di Tartaglia che tenga conto dei contributi di tutti i gruppi per poi corredarla con i disegni degli studenti e gli ulteriori esempi da loro proposti.

Sia durante la fase di lavoro in gruppi sia durante la discussione collettiva è presente in classe un osservatore (l'autore) che dirige una videocamera che può essere puntata sulla lavagna, sull'insegnante o sugli alunni che intervengono. Inoltre, gli elaborati scritti degli studenti sono stati raccolti come dati aggiuntivi.

5. Analisi dei dati

La discussione collettiva è stata interamente videoregistrata. Gli interventi sono stati tutti trascritti, successivamente il video è stato rivisto per valutare la correttezza della trascrizione e contemporaneamente integrare le parole con immagini della lavagna o dei gesti utilizzati dall'insegnante o dagli studenti. Gli interventi dell'insegnante sono stati poi classificati con i quattro schemi di Mariotti e Maracci (2010) presentati nella sezione 3. Per limiti di spazio, non si riporterà la codifica dell'intera discussione ma solo alcuni estratti ritenuti significativi per far comprendere al lettore la narrativa della discussione ad integrare quelli che esemplificano gli schemi d'azione messi in atto dalla docente.

Di seguito l'inizio della discussione. I nomi degli studenti sono stati sostituiti con nomi di fantasia; allo stesso nome corrisponde sempre lo stesso studente.

Maestra: Useremo le lavagne per fare una traduzione che più o meno metta dentro tutto quello che avete fatto e anche gli esempi. Va bene? Allora, Davide comincia con la prima frase.

Davide: Il numero che è contenuto da due lati è detto numero superficiale. […] il dodici è detto numero superficiale per essere contenuto da due lati uguali.

Maestra: "Uguali" dice Davide.

Daniele: I quali!

Nadia: Ah!

Maestra: I quali. Siete d'accordo? "I quali", cioè "che".

Davide: I quali sono tre e quattro o due e sei.

Maestra: Tutto ok fino a qui? Qualcuno ha qualcosa di importante da modificare?

Alessio: Tre per quattro dodici!

Maestra: Allora si può andare avanti? Passiamo la parola ad Andrea allora.

Andrea: E finalmente il quindici. Punto. I suoi lati furono tre e cinque.

Maestra: Stop un attimo Andrea. Qualcuno ha qualche commento? O qualche modifica? Alessandro?
Alessio: Finalmente?!
Maestra: Finalmente. Si poteva leggere così, però forse... Viola?
Viola: Similmente.
Maestra: Similmente [annuisce col capo]. Guarda un po' il testo Andrea, se ti può tornare. Cioè che vuol dire? Allo stesso…
In coro: Modo.

All'inizio della discussione l'insegnante specifica subito che lo scopo dell'attività collettiva è quello di "mettere dentro" tutto quello che è stato fatto. Viene quindi richiesto esplicitamente di ricostruire quanto fatto nel lavoro con l'artefatto per arrivare alla ricostruzione di un testo condiviso, ovvero alla condivisione di segni. Secondo la definizione data nella sezione 3 si tratto dello schema "back to the task", cioè il ritorno alla consegna. In questo specifico caso la consegna viene ripetuta in una forma diversa: la parafrasi prima svolta nei piccoli gruppi viene ora affrontata dalla classe intera, ma non allo scopo di risvolgere la consegna quanto piuttosto di mettere insieme il lavoro fatto dai singoli gruppi per arrivare a un testo condiviso da tutto il gruppo classe. Lo si può notare dalle continue richieste per proposte di modifiche, da domande come "siete d'accordo?" che appaiono proprio finalizzate a ottenere un testo il più possibile condiviso. Inoltre, l'insegnante chiama gli alunni man mano che alzano la mano e lo fa selezionando studenti che appartenevano a gruppi diversi.

Questa prima frase di ritorno alla consegna prosegue finché sulla lavagna compare una traduzione di tutto il testo di Tartaglia:

Esempio: 12 è detto numero superficiale per essere contenuto da due lati, i quali sono 3 e 4 o 2 e 6 e similmente il 15. I suoi lati sono 3 e 5. Ma 13 né 17 né 19 né nessun altro numero primo si possono dire realmente numeri superficiali perché non sono contenuti da due lati ovvero da due numeri. Ma quelli ingannano perché, in verità, ogni numero primo è un numero superficiale, l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo.

La maestra rilegge il testo e poi richiede agli studenti di commentarlo:

Maestra: Chi prova a spiegarlo? Ora si capisce meglio. Dice: ma quelli ingannano perché in verità anche [segue col dito sulla lavagna] ogni numero primo è un numero superficiale e poi c'è: l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo. Cosa sono questi "uno" e questo "altro"?
Marco: Il quindici e il dodici?
Maestra: In un numero primo, dice, una cosa è l'unità e l'altra cosa è lo stesso numero primo…
Matteo: Maestra, non capisco.

Il lavoro con l'artefatto ha portato alla produzione di un testo condiviso che però non è ancora stato messo in relazione con le conoscenze matematiche che potenzialmente il testo potrebbe evocare. L'insegnante richiede agli studenti di "spiegarlo". Possiamo interpretare questa nuova consegna come una richiesta di spostarsi dai segni artefatto che compaiono alla lavagna ("uno" e "l'altro") verso segni più vicini a quelli matematici, ovvero la richiesta di produrre segni che possano fungere da pivot. Ci troviamo nella situazione in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. La maestra ha ora la necessità di generalizzare e de-contestualizzare i significati emersi e richiede esplicitamente di fare sintesi supportando la formazione di un ambiente semiotico in cui segni matematici possono essere prodotti e messi in relazione con segni artefatto. Si tratta evidentemente dello schema "ask for a synthesis". Tuttavia, la richiesta non ottiene l'esito sperato e quindi l'insegnante ritorna ai segni artefatto:

Maestra: Ok. Rileggo, ma attenzione. [Inizia a leggere scorrendo col dito sotto le frasi scritte alla lavagna] Il numero contenuto da due lati è detto numero superficiale. Passiamo all'ultima frase: s'ingannano perché in verità [torna a indicare le scritte sulla lavagna] ogni numero primo è [enfasi su questa parola, alza la voce] un numero superficiale, l'uno è l'unità e l'altro è lo stesso numero primo. Cosa sono uno e l'altro? Sono i due?

Federico: I due lati.

Maestra: I due lati.

Matteo: Maestra! Quindi ogni numero primo è anche superficiale!

Maestra: Quindi anche un numero primo è sempre numero superficiale. Ci siamo ingannati dicendo di no, in realtà… Ci siamo fatti ingannare, in realtà anche quelli sono numeri superficiali perché hanno [disegna nell'aria le due dimensioni di un rettangolo] due lati. Di questi due lati, un lato è l'unità [indica la parola unità sulla lavagna] cioè [alza il dito indice verso l'alto] uno.

Matteo: Maestra tutti i numeri sono superficiali.

Maestra: [annuendo] Quindi tutti i numeri sono superficiali.

Federico: Che figata!

Al termine della rilettura dei segni artefatto è un alunno (Matteo) a fornire una sintesi. L'insegnante fa eco alle parole dell'alunno ripetendole, ovvero dirige verbalmente l'attenzione degli studenti su un particolare aspetto dell'artefatto, circoscrive il significato di alcuni segni isolando aspetti chiave dalla molteplicità degli altri possibili. Si tratta dello schema "focalization". Dopo aver ripetuto la frase di Matteo, l'insegnante fornisce delle ulteriori specifiche. Fornisce una formulazione "più matematica" introducendo la parola "lati" e un gesto che enfatizza questa parola richiamando il rettangolo (rappresentazione della moltiplicazione che è già condivisa dalla classe). Così come descritto nella definizione dello schema "provide a synthesis", fornisce una esplicita sintesi in cui sono introdotti dei nuovi segni matematici (i rettangoli) in continuità coi segni emersi nella discussione sul testo di Tartaglia.

Quest'ultimo schema ritorna successivamente al termine della discussione. Come previsto dalla consegna, l'insegnante chiede agli studenti di riferire quali sono state le figure disegnate durante l'attività nei gruppi; si ha nuovamente un "back to the task".

Quando diversi segni sono apparsi alla lavagna (Figura 3), l'insegnante decide di decontestualizzare, probabilmente al fine di istituzionalizzare un significato per i "numeri primi". Nel farlo richiede una sintesi a uno studente:

Maestra: Tra questi, Daniele, me lo sai dire quali sono i numeri primi? Anzi, prima dimmi quali sono i numeri superficiali.

In coro: Tutti!

Daniele: Tutti.

Maestra: I numeri superficiali sono tutti.

Daniele: Poi tredici e diciassette sono i numeri primi.

Maestra: E come si fa a vedere?

Daniele: Perché hanno soltanto… non si possono formare con un numero che è più grande di uno.

Maestra: Cioè dici che un lato non può essere… un lato non può essere più grande di uno. Quindi un lato è per forza uno.

Daniele: Sì, però l'altro lato deve essere quanto è l'area.

Maestra: [indicando le parole finali della parafrasi del testo che appare sulla lavagna e le sottolinea] Lo stesso numero.

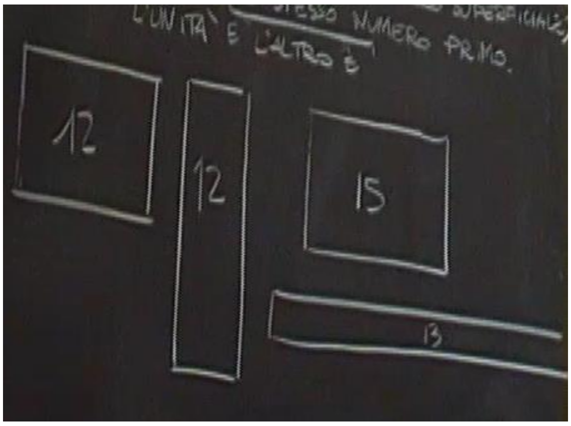

Figura 3 – La lavagna con riportati i disegni che gli studenti hanno suggerito

Le domande della maestra "quali sono i numeri primi?" e "come si fa a vedere?" sono richieste di sintesi allo studente a cui seguono poi due diverse azioni dell'insegnante. Dopo che lo studente ha affermato che un lato non è maggiore di uno, la maestra specifica che il lato è "per forza uno"; di fatto prima ripete l'affermazione dello studente focalizzando l'attenzione degli altri compagni su quanto detto da Daniele, ma poi lo rielabora per spostarsi verso segni più vicini a quelli matematici che sono obiettivo della discussione. Notare che "un lato è per forza uno" è un primo passo verso il fatto che tra i due divisori di un numero primo si ha il numero uno. La maestra, notando la potenzialità della frase dello studente, focalizza su essa e modifica il segno, probabilmente con l'obiettivo di usarlo come pivot.

L'ultimo intervento può invece essere interpretato in modo diverso: l'insegnante utilizza il gesto per indicare la frase scritta sulla lavagna dopo che lo studente ha terminato la sua sintesi. In questo modo si sta creando un collegamento fattuale tra i segni artefatto presenti sulla lavagna e i segni matematici che stanno emergendo nella discussione. Vengono esplicitate le connessioni tra i segni emersi precedentemente e quelli su cui si sta lavorando al momento, ovvero vengono generate connessioni nella catena semiotica. Mediante un'orchestrazione della discussione matematica realizzata attraverso un avanti e indietro fra il contesto dell'artefatto e quello matematico viene promosso un intreccio tra i significati personali degli studenti legati all'attività con l'artefatto e quelli matematici obiettivo dell'intervento didattico. I nuovi segni matematici sono presentati in continuità coi segni emersi nelle precedenti fasi della discussione; questo è proprio l’obiettivo dello schema “provide a synthesis”.

6. Conclusioni

Si è analizzato il ruolo del docente nella costruzione di una catena semiotica che parte dalla condivisione nella discussione collettiva delle produzioni di singoli gruppi e giunge fino a momenti di istituzionalizzazione dei saperi emergenti dalla discussione e che vengono condivisi da tutti.

Le azioni dell’insegnante risultano particolarmente significative: la focalizzazione dell’insegnante sulle parole degli alunni permette l’avanzamento della discussione in cui si alternano momenti di ritorno alla consegna e sintesi date dagli allievi. A partire da quest’ultime, l’insegnante fornisce sintesi che si avvicinano sempre più alla definizione matematica obiettivo dell’intervento didattico, in altre parole viene espletato il potenziale semiotico del testo storico utilizzato mettendolo anche in relazione con le conoscenze pregresse degli studenti (i diagrammi rettangolo).

Mariotti e Maracci (2010; 2012) hanno messo in luce alcuni schemi di comportamento dell’insegnante nel gestire una discussione matematica di concettualizzazione, anche nel caso in cui una fonte storica funga da artefatto su cui è incentrata la produzione di testi da parte degli allievi. Il loro esempio sul testo di Eulero (*ibidem*) mostra che la conduzione di una discussione matematica nella scuola secondaria di secondo grado può portare alla creazione di una fitta rete di significati in cui diversi artefatti entrano in relazione gli uni con gli altri.

In questo lavoro abbiamo mostrato che anche a livello di scuola primaria l’insegnante può utilizzare una fonte storica primaria e metterla in relazione con i contenuti matematici nonché con altri artefatti. In particolare, nello studio di caso analizzato si è potuta evidenziare la creazione di connessioni tra il testo di Tartaglia e i diagrammi rettangolari utilizzati in precedenza dalla classe. Ci siamo chiesti se l’insegnante mostrasse comportamenti classificabili con tutti gli schemi proposti da Mariotti e Maracci (2010); negli estratti di discussione riportati è possibile evidenziare comportamenti relativi a tutti gli schemi; comportamenti che si riscontrano anche in altre parti di discussione che qui non è stato possibile riportare per limiti di spazio.

Si può inoltre mettere in evidenza che tali comportamenti non si presentano sempre in modo sequenziale: la discussione su ciascuna delle parti della consegna parte da un “back to the task” a cui segue una fase di focalizzazione e quindi richieste di sintesi da parte della docente. Tuttavia, quando alcuni studenti incontrano difficoltà, oppure quando l’intervento dell’insegnante non fornisce l’esito atteso, la maestra ritorna nuovamente alla consegna ripetendo il ciclo finché emergono segni che hanno il potenziale di fungere da pivot. In questi casi la docente fornisce una sintesi per poi passare alla discussione di una parte successiva della consegna, ovvero un altro “back to the task”. Si tratta quindi di un continuo andirivieni tra consegna, focalizzazioni e sintesi che istituzionalizzano i saperi.

Il ricorso ad un solo studio di caso ci permette di mettere in evidenza nel dettaglio comportamenti fruttuosi dell'insegnante nell'espletare il potenziale semiotico del testo. Chiaramente, il fatto che tali comportamenti siano risultati positivi in questo particolare contesto non ci consente di generalizzare induttivamente che lo siano in generale. Tuttavia, l'allineamento dei risultati qui riportati con quelli di altri studi di caso presentati in letteratura (si veda la sezione 2) porta a pensare che alcune delle conclusioni qui riportate potrebbero essere generalizzate con opportune ricerche.

Infine, si può notare che alcune delle azioni dell'insegnante messe in evidenza hanno un carattere estemporaneo. Un esempio palese è dato dai gesti deittici (l'indicare) rivolti verso la lavagna che però sono così fondamentali nel mettere in connessione le parole degli studenti con i segni scritti. Se ne potrebbe dedurre una difficoltà nel formare gli insegnanti alla progettazione di questo tipo di discussione collettiva. Tuttavia, l'analisi di dialoghi come quelli riportati in questo articolo, così come la visione di video appositamente preparati (Ferretti & Maffia, 2017) potrebbero costituire validi strumenti per l'educazione degli attuali e dei futuri docenti.

6. Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furinghetti, *Proceedings of the 15th International PME Conference, vol. 1* (p. 1-16). Assisi: IGPME.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational studies in mathematics, 31(1-2)*, 11-41.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18(3)*, 221-256.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*, 269-294.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Modena: Centro documentazione educativa.

D'Amore, B., & Bagni, T. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica 1*, 73-89.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2011). History, figures, and narratives in mathematics teaching. In V. Katz, & C. Tzanakis, *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education. MAA series* (p. 103-112). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ferretti, F., & Maffia, A. (2017). Peer evaluation: apprendimento e valutazione formativa in matematica. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, A. Veste , & F. Ricci, *Quaderni GRIMeD, vol. 3* (p. 39-47). Torino: Il Capitello.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. E. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (p. 630-659). London: Routlegde.

Maffia, A. (2017). *Insegnamento e apprendimento di fatti moltiplicativi: un approccio relazionale mediante la tavola di Laisant.* Tesi di dottorato reperibile su https://morethesis.unimore.it.

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete, 16(1)*, 4-19.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. In L. Trouche, & G. Gueudet, *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (p. 91-107). Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2012). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, *From text to 'lived resources': curriculum material and* (p. 59-75). New York, NY: Springer.

Pirie, S. E., & Schwarzenberger, R. L. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in mathematics, 19(4)*, 459-470.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17(1)*, 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 51(1)*, 37-70.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico.* Trento: Erickson.

UMI. (2001). *Matematica 2001: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica.* www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotskij, L. S. (1992). *Pensiero e linguaggio.* Bari: Laterza.

Vygotskij, L. S. (2010). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori.* Firenze: Giunti (originale pubblicato nel 1974).

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind: Sociocultural Approach to Mediated Action.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Received October 29, 2017
Revision received November 16, 2017/December 4, 2017
Accepted December 30, 2017