“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 46-75 – ISSN 2038-1034

Ripensare la didattica della Matematica nella scuola primaria a partire da un uso formativo dei risultati delle rilevazioni nazionali

Davide Capperucci

Abstract – *The present paper investigates to what extent the results of National Evaluation Service tests can be used at system and school level to promote self-assessment processes designed to improve pupils' performances and renew the teaching of mathematics in primary school. Considering design, structure and frameworks of the national surveys, the strengths and weaknesses related to data reporting are highlighted, in order to develop formative assessment processes and improve the effectiveness of teaching practice. In this connection, some methodological proposals are put forward to rethink mathematics teaching in primary school starting from a critical and reflective use of test items.*

Riassunto – *Il presente articolo indaga in che misura i risultati delle rilevazioni del Servizio Nazionale di Valutazione possono essere utilizzati a livello di sistema e di scuola per la promozione di processi di autovalutazione finalizzati al miglioramento delle prestazioni degli alunni e al rinnovamento della didattica della matematica nella scuola primaria. Considerando il disegno, la struttura e i quadri di riferimento delle rilevazioni nazionali vengono messi in luce i punti di forza e i punti di debolezza legati alla restituzione dei dati, affinché questi possano essere utilizzati dalle istituzioni scolastiche in termini di valutazione formativa e per incrementare l'efficacia delle pratiche didattiche. A riguardo vengono avanzate alcune proposte metodologiche per ripensare la didattica della matematica nella scuola primaria a partire da un uso critico e riflessivo dei quesiti delle prove.*

Keywords – assessment, standardized tests, learning outcomes, mathematics teaching, school effectiveness

Parole chiave – valutazione, prove standardizzate, risultati di apprendimento, didattica della matematica, efficacia scolastica

Davide Capperucci è Ricercatore confermato di Pedagogia Sperimentale e Docente di *Teorie e metodi di progettazione e valutazione scolastica* presso l'Università di Firenze. Per la casa editrice FrancoAngeli co-dirige la collana *peer reviewed* “Ricerca-Formazione”. Tra le sue ultime pubblicazioni: *Prove del Servizio nazionale di valutazione e apprendimento della matematica: migliorare le performance della scuola primaria a partire dai risultati* (in “Studi sulla formazione”, 2017, pp. 43-67); *Certificare competenze attraverso le rubriche di valutazione: un percorso di Ricerca-Formazione realizzato con gli insegnanti del primo ciclo d'istruzione* (in P. Magnoler, A. M. Notti, L. Perla, *La professionalità degli insegnanti. La ricerca e le pratiche*, Lecce, Pensa Multimedia, 2017, pp. 611-632).

1. Introduzione

La ricerca pedagogico-didattica riconosce un legame molto stretto tra didattica e valutazione degli apprendimenti. Per molto tempo la valutazione è stata considerata il momento terminale dell'esperienza didattica, attraverso il quale verificare la qualità degli risultati conseguiti. Questa concezione sommativa della valutazione nel nostro Paese è stata messa in discussione intorno alla fine degli anni Settanta, a vantaggio di altri approcci che ne hanno enfatizzato soprattutto il valore formativo (Vertecchi, Agrusti & Losito, 2010; Vannini, 2009), e che hanno interpretato la valutazione soprattutto come *strumento per l'apprendimento* e non solo per l'insegnamento (Varisco, 2000). La valutazione, infatti, può fornire informazioni importanti non solo sugli esiti del processo formativo ma anche su come implementare, adattare, modificare gli interventi didattici in base al *feedback* che gli alunni restituiscono all'inizio, durante e al termine di un qualsiasi percorso di formazione (Hattie, 2012). Dall'analisi funzionale degli errori che un bambino compie nell'esecuzione di una prova, nella scelta di una risposta, nel fornire una spiegazione del procedimento risolutivo adottato, l'insegnante esperto è in grado di utilizzare la valutazione come strumento formativo almeno in due direzioni. La prima punta ad analizzare in profondità i processi cognitivi, le strategie di ragionamento e *problem solving* messe in atto dall'alunno se posto di fronte ad una situazione-problema; la seconda coinvolge direttamente l'insegnante, o meglio il *team docente*, nella ri-definizione della progettazione didattica e nell'introduzione di possibili varianti in grado di rendere l'insegnamento più efficace e personalizzato rispetto ai bisogni apprenditivi dell'alunno. In tal senso la valutazione viene ad assumere una funzione formativa per l'alunno e regolativa per l'insegnante, elevando il livello di qualità e di risultato dell'intervento didattico.

Questa funzione formativa della valutazione può essere valorizzata attraverso qualsiasi tipo di prova, da quelle tradizionali e quelle oggettive e standardizzate. Il presente contributo si focalizza in modo specifico su questa seconda tipologia, prendendo a riferimento le prove del Servizio Nazionale di Valutazione (dette anche prove SNV o più comunemente prove INVALSI), per il biennio 2015-2017. Il contributo si compone di due parti. Una prima parte in cui vengono analizzati i risultati delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione per gli anni scolastici 2015/2016 e 2016/2017 ed una seconda parte nella quale l'attenzione si concentra sull'analisi degli errori più ricorrenti e su come questi possano essere letti dagli insegnanti in funzione del miglioramento dei risultati di apprendimento degli alunni e di un ripensamento delle metodologie impiegate nella didattica della matematica.

2. Validità e attendibilità delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione: i test di matematica per la scuola primaria

La legge 25 ottobre 2007, n. 176 e la direttiva ministeriale n. 74 del 2008 hanno previsto l'avvio del Servizio Nazionale di Valutazione affidato all'INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione), con il compito di predisporre, dall'anno scolastico 2008/09, prove oggettive standardizzate per rilevare le conoscenze e le abilità in Italiano e Matematica, nelle classi seconde e quinte della scuola primaria.

La somministrazione delle prove SNV oggi è diventata una pratica consolidata all'interno delle scuole. Quello su cui resta ancora molto da fare è come supportare le scuole nella lettura dei dati dei test standardizzati affinché questi possano essere utilizzati per ripensare la didattica e per migliorare i risultati di apprendimento degli alunni. Questi dati, pur con i limiti che presentano, essendo riferiti soltanto ad alcune classi e ad alcune discipline del curricolo, proprio a partire dalla misurazione dei risultati possono aiutare le istituzioni scolastiche a conoscersi meglio, ad indagare i processi didattici e organizzativi messi in atto, ad autovalutare l'efficacia delle pratiche educative, a condividere obiettivi di miglioramento a medio termine.

La comunicazione dei risultati medi nazionali e per macro-area geografica interessa soprattutto la valutazione di sistema e anche i risultati medi di classe e di scuola hanno una ricaduta limitata per le singole scuole, perché la trasmissione del dato statistico non porta a modificare in automatico le pratiche di insegnamento rendendole più efficaci. L'azione culturale da portare avanti è quella di supportare le scuole nell'utilizzo dei risultati della valutazione esterna in chiave formativa per pianificare interventi pensati in funzione dell'elevamento delle prestazioni degli alunni a partire dall'analisi delle risposte ai singoli item delle prove (Trinchero, 2014). Come avremo modo di precisare meglio nella seconda parte del presente contributo, è soprattutto a partire dalla *micro*-analisi delle risposte fornite a livello di singolo alunno, di classe e di scuola che diventa possibile individuare i punti di forza e di debolezza rispetto ai quali predisporre interventi mirati di recupero e potenziamento.

Le prove standardizzate per fornire informazioni attendibili sugli apprendimenti degli alunni dal punto di vista docimologico devono avere un alto grado di validità e attendibilità. Fin dalle prime somministrazioni le prove INVALSI sono state sottoposte ad un rigoroso processo di validazione, finalizzato a rilevarne sia la validità di contenuto che la validità interna. La prima rimanda a quanto le prove sono coerenti con i riferimenti curricolari definiti dalle *Indicazioni Nazionali* (MIUR, 2012) per le conoscenze e le abilità matematiche da sviluppare nei cinque anni della scuola primaria.

A tale scopo gli item delle prove, dopo aver superato un pre-test, vengono selezionati da un gruppo di esperti che ne valutano la significatività rispetto agli ambiti di contenuto e ai processi cognitivi previsti dalle *Indicazioni* prima e dai Quadri di Riferimento SNV poi. Per la validità interna, ovvero se le domande poste sono effettivamente in grado di misurare i costrutti su cui le prove si basano, viene condotta un'analisi fattoriale con approccio delle variabili soggiacenti (*Underlying Variable Approach*), secondo il modello di Moustaki (2000), supportata dal programma MPLUS (Muthén & Muthén, 2010). Sia nell'uno che nell'altro caso, la capacità delle prove di indagare contenuti e processi matematici è risultata psicometricamente buona.

Sul fronte dell'attendibilità invece, facendo riferimento alla Teoria Classica dei Test (CTT), vengono calcolati gli indici di difficoltà, discriminatività e coerenza interna delle domande. Attraverso il computo del coefficiente di attendibilità Alpha di Cronbach (o del coefficiente KR-20 nel caso di item dicotomici) si rileva l'attendibilità della consistenza interna del test, ovvero la cosiddetta "dimensionalità della prova" rispetto alla presenza o meno di item incoerenti con gli altri (Barbaranelli & Natali, 2005).

Prendendo in esame le prove di entrambe le classi di scuola primaria dell'ultimo biennio, nel 2016 in seconda il valore del coefficiente di attendibilità è di 0,83 contro lo 0,85 del 2017; per le prove di quinta del 2016 invece è di 0,88, e 0,882 per quelle del 2017[1].

Nel 2016, in seconda primaria, l'indice di difficoltà delle domande (dato dalla percentuale di risposte corrette a ciascun quesito) varia da 0,23 (23% di risposte corrette, domanda "difficile") a 0,84 (84% di risposte corrette, domanda "facile"), per la prova di quinta esso va da 0,07 a 0,96. Nel 2017 detto indice oscilla tra 0,25 e 0,88 sia in seconda che in quinta.

L'indice di discriminatività (capacità dei singoli item di differenziare i soggetti con maggiori abilità da quelli con minori abilità) presenta valori sempre superiori alla soglia critica di 0,25 in tutte le prove di entrambi gli anni. Nel 2016 nella prova della classe seconda solo un item (D1.b) ha un indice minimo di 0,17; in quinta sono due i quesiti (D2_a e D2_c) che presentano un valore di discriminatività sensibilmente al di sotto della soglia di accettabilità. Nel 2017 in seconda tutte le domande presentano un adeguato potere discriminante, mentre in quinta due quesiti (D11 e D27) hanno un valore di discriminatività al di sotto della soglia di accettabilità (rispettivamente di 0,15 e 0,17). La costanza positiva dei valori connessi all'attendibilità delle prove mostra come queste nel corso del tempo abbiano acquisito una certa robustezza a garanzia della qualità delle informazioni che riescono a fornire sugli apprendimenti degli alunni.

Per analizzare la capacità misuratoria delle prove SNV si fa ricorso anche alla Teoria della Risposta all'Item (IRT) secondo il Modello di Rasch (1980), che consente di stimare l'abilità dei soggetti indipendentemente dalla difficoltà degli item e viceversa, affiancato dalla mappa item-soggetti di Wright (1994). In tutte le prove di matematica dell'ultimo biennio e per tutte le classi coinvolte, il modello di Rasch ha evidenziato una soddisfacente capacità misuratoria degli item, compresa tra 0,90 e 1,13 nella prova di seconda del 2016; tra 0,87 e 1,15 per quella di quinta del medesimo anno; tra 0,86 e 1,13 per la prova svolta dalle classi seconde nel 2017 e nell'intervallo 0,90 - 1,10 per le classi quinte sempre del 2017. Come termine di paragone si ricorda che nel modello in questione le soglie critiche di misurabilità di un item prevedono un campo di variazione compreso tra 0,80 e 1,20, oltre questo *range* l'attendibilità dell'item non può più essere considerata soddisfacente.

Altrettanto è stato confermato dalla mappa di Wright. Quest'ultima consente di rappresentare graficamente e mettere in relazione su un'unica scala gli item della prova in base al loro livello di difficoltà con le abilità dei rispondenti. Nella scala lo 0 corrisponde al livello medio di abilità dei rispondenti del campione, i valori negativi corrispondono agli item più facili e quindi agli allievi che hanno un minor livello di abilità, i valori positivi corrispondono agli item più difficili e dunque agli allievi con un maggior livello di abilità. Dall'esame dei valori della scala, emerge che la maggior parte delle domande di tutte e quattro le prove di matematica per la scuola primaria degli ultimi due anni si colloca nella parte centrale della scala di abilità, rappresentando adeguatamente i livelli di performance da medio-bassi a medio-alti. Un minor numero di domande, invece, si colloca agli estremi della scala, in particolare nell'area corrispondente ai livelli più elevati di abilità degli alunni e di difficoltà degli item, ciò sta ad indicare

[1] Secondo la scala convenzionale dell'Alpha di Cronbach una misura pari o superiore a 0,80 indica un buon grado di consistenza interna della prova.

che le stime ottenute sono più efficienti per i valori di abilità intermedi, mentre l'errore di misurazione tende a essere maggiore per i valori più distanti dalla media.

3. Quadri di riferimento e risultati delle prove SNV di matematica per la scuola primaria (2015-2017)

Le prove del Servizio Nazionale di Valutazione, riguardo alla matematica, partono dall'individuazione di specifici obiettivi di conoscenze e di abilità, indagati dagli item che compongono il test e che sono riportati nei cosiddetti Quadri di Riferimento (QdR).

I QdR definiscono il valore informativo delle prove, chiarendo quali sono gli oggetti della valutazione e la struttura delle prove. Come esplicitato nel QdR di matematica, le prove non intendono valutare le nozioni della disciplina ma si occupano degli aspetti di "formalizzazione matematica", ovvero della capacità di esprimere e usare il pensiero matematico. Ciò che le prove SNV cercano di stimolare, al di là del dato informativo, è la capacità del bambino di ragionare attorno a problemi, questioni e casi matematici, di operare con la matematica grazie al supporto delle conoscenze di base necessarie (Bolondi, 2014).

Per questo le prove si concentrano su due oggetti specifici: 1. i *contenuti matematici*, individuati a partire dagli ambiti della matematica previsti dalle *Indicazioni Nazionali per il curricolo* del 2007 e 2012; 2. i *processi cognitivi* richiesti per la risoluzione delle situazioni-problema proposte, con particolare attenzione ai quadri di riferimento della indagini internazionali IEA-TIMSS (Mullis & Martin, 2013) e OECD-PISA (OECD, 2016)[2].

La prova di matematica per la seconda primaria prende in esame gli ambiti di contenuto riferiti a *Numeri*, *Spazio e figure*, *Dati e previsioni*. Essa mira a valutare la capacità degli alunni di sviluppare e applicare il pensiero matematico in vista della risoluzione di problemi legati a situazioni quotidiane, a partire da elementi forniti esplicitamente nel testo e/o che devono essere inferiti grazie alle informazioni disponibili. I formati dei quesiti sono solitamente due: domande a scelta multipla semplice con tre opzioni di risposta; domande a risposta aperta univoca.

La prova per la classe quinta primaria copre tutti e quattro gli ambiti della matematica, *Numeri*, *Spazi e figure*, *Dati e previsioni*, *Relazioni e funzioni* ed è composta da circa 40 domande, parte delle quali sono a scelta multipla con quattro alternative di risposta, a risposta aperta e a scelta multipla complessa. Il tipo di codifica per ciascuna domanda è sempre dicotomico come per la prova della classe seconda. A seguito delle novità introdotte nella rilevazione dell'a.s. 2015/2016 (INVALSI, 2015), tutti i quesiti sono riferiti ai *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* della matematica previsti dalle *Indicazioni* e ricondotti a tre "dimensioni" specifiche delle competenze matematiche, "conoscere", "risolvere problemi", "argomentare" (INVALSI, 2015), come avviene nell'indagine internazionale IEA-TIMSS (Mullis & Martin, 2013).

[2] Per un'analisi dettagliata degli *ambiti di contenuto* e dei *processi* previsti dai QdF delle prove di matematica si rimanda al sito dell'INVALSI, https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_2017_def.pdf, consultato in data 19/08/2017.

Nelle Figure 1, 2, 3 e 4 sono riportati i risultati delle prove di matematica delle classi seconde e quinte degli ultimi due anni (INVALSI, 2016; 2017). Le rilevazioni degli anni scolastici 2015/2016 e 2016/2017 sono particolarmente importanti perché rappresentano le ultime due indagini realizzate prima delle trasformazioni previste dal D. Lgs. n. 62 del 13 aprile 2017 – *Norme in materia di valutazione e certificazione delle competenze nel primo ciclo ed esami di Stato*[3].

Gli estremi della zona bianca al centro di ogni barra corrispondono al 25° e 75° percentile della distribuzione dei punteggi, mentre le due estremità della barra corrispondono al 5° e 95° percentile. La lunghezza totale delle barre indica l'ampiezza della dispersione dei punteggi rispetto a quella complessiva dell'Italia, mentre l'estensione delle barre a sinistra o a destra delle linee verticali che delimitano l'intervallo di confidenza della media nazionale indica se nella distribuzione tendono a prevalere, rispettivamente, i valori al di sotto di essa oppure quelli al di sopra. Nella scala utilizzata dall'INVALSI il punteggio medio nazionale corrisponde convenzionalmente a 200 e la deviazione standard a 40.

Confrontando i risultati delle Figure 1 e 2 per la classe seconda primaria riferiti alle prove svolte nel 2016 e nel 2017, dai dati ottenuti dal campione nazionale si nota come non sussistano particolari differenze tra le due annualità, infatti nessuna macro-area si differenzia in modo significativo dalla media del Paese ad eccezione del Sud e Isole che in entrambi i casi presenta alcune criticità, con uno scarto rispetto alla media nazionale di 5 punti nel 2016 e di 7 punti nel 2017. Nel 2017 il Nord-Ovest si differenzia significativamente in positivo dalla media italiana. Nel 2016 le regioni con il punteggio più alto (206) risultano essere le Marche, il Molise e la Basilicata, seguite dalla provincia autonoma di Trento, il Friuli-Venezia Giulia, l'Abruzzo, la Campania (205), il Piemonte (204). Nel 2017 sono il Piemonte (207), il Molise (213) e la Basilicata (208). La Calabria in entrambe le annualità è la regione con il punteggio più basso (186 nel 2016 e 183 nel 2017).

Come verificatosi già nel 2016, l'omogeneità dei risultati a livello nazionale registrata per le classi seconde non è confermata dai risultati delle classi quinte in nessuno dei due anni qui considerati. Dall'analisi delle Figure 3 e 4, infatti, sono riscontrabili maggiori differenze rispetto alla media nazionale sia tra le macro-aree che tra le regioni. Nel 2016 il Nord-Ovest risulta essere la macro-area geografica con una media significativamente maggiore (207) a 200, mentre il Sud e Isole quella con una media significativamente inferiore (189). Il Nord-Est, il Centro e il Sud non si discostano significativamente dalla media del Paese con valori però in progressiva diminuzione. Nel 2017 la situazione permane la stessa. In quest'ultima rilevazione, quindi, le macro-aree con risultati positivi li hanno confermati, lo stesso dicasi in alcune aree del Sud e soprattutto nel Sud-Isole dove la media delle risposte rimane sempre ad di sotto dei valori nazionali.

[3] Per una disamina delle novità sulle rilevazioni nazionali degli apprendimenti previste dal Decreto si rimanda a quanto indicato agli artt. 4 e 7 dello stesso.

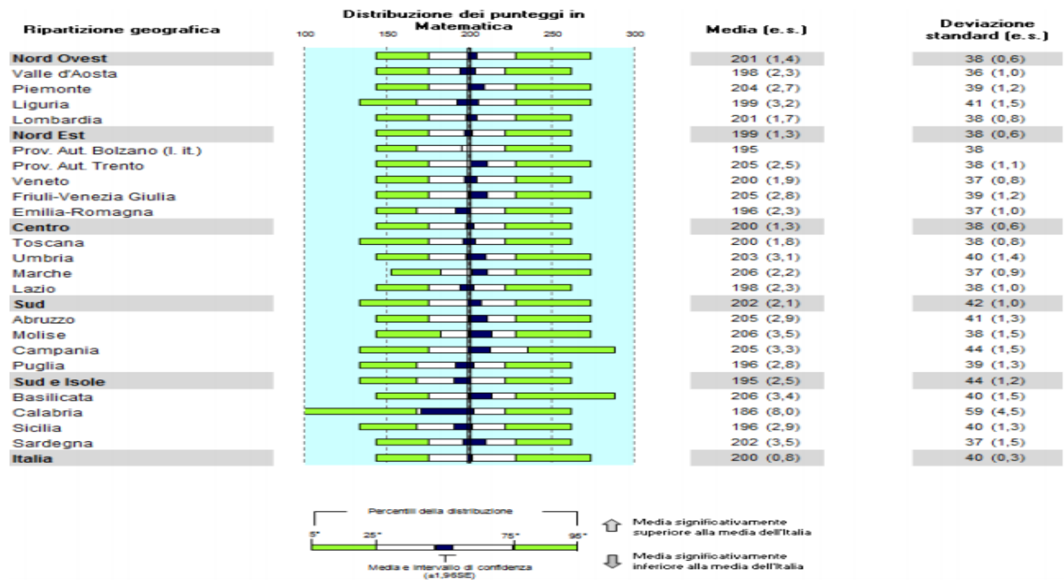


Figura 1 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe II primaria a. s. 2015/2016 (Fonte: INVALSI, 2016)

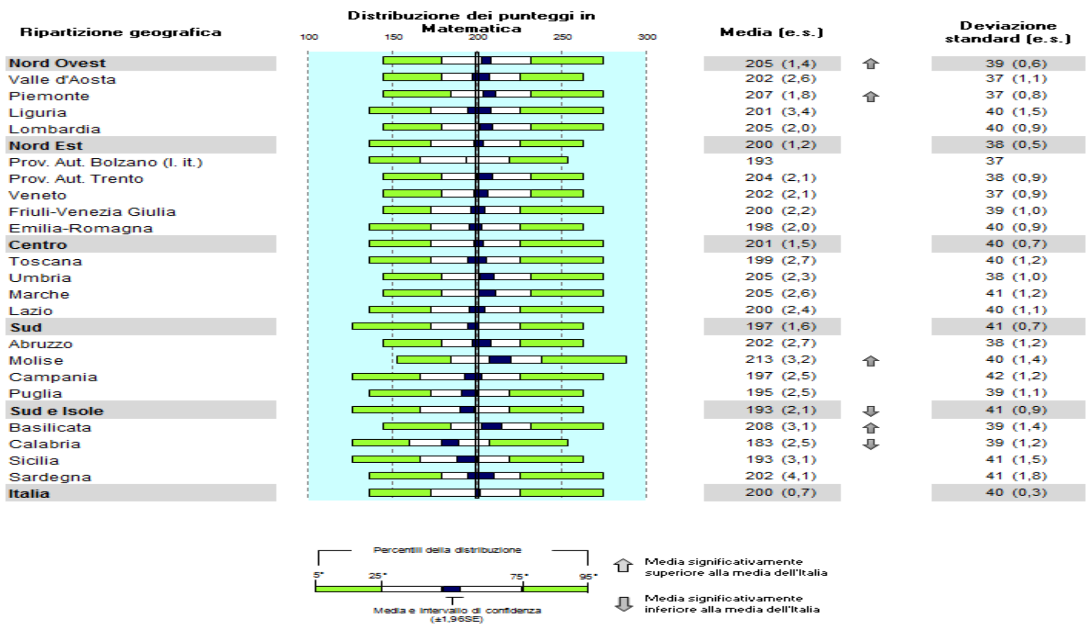


Figura 2 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe II primaria a. s. 2016/2017 (Fonte: INVALSI, 2017)

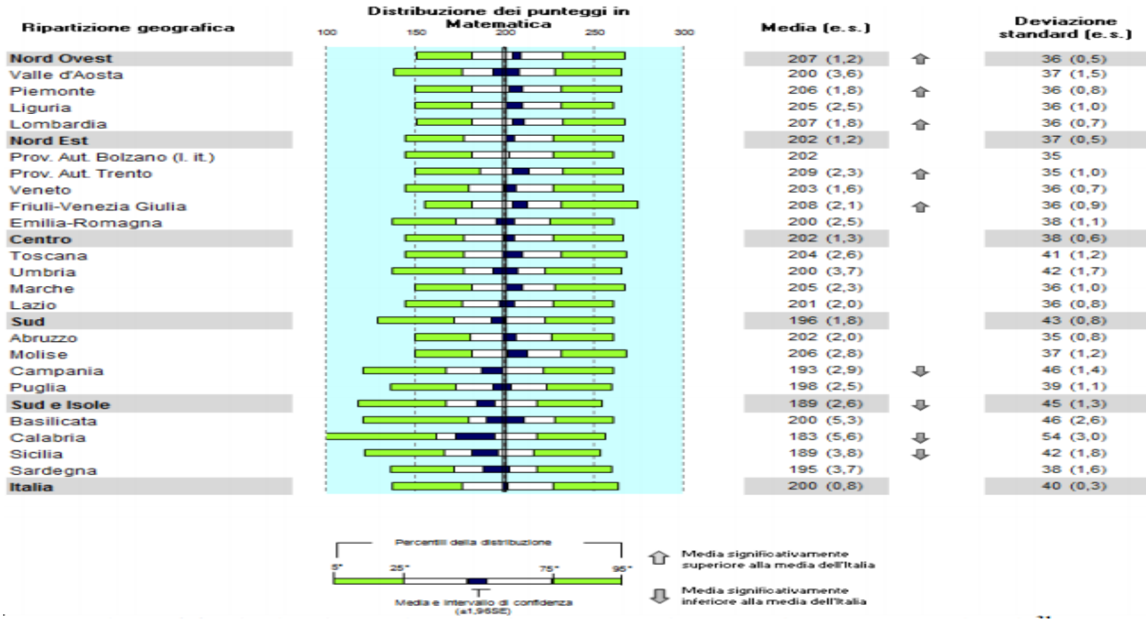


Figura 3 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe V primaria a. s. 2015/2016 (Fonte: INVALSI, 2016)

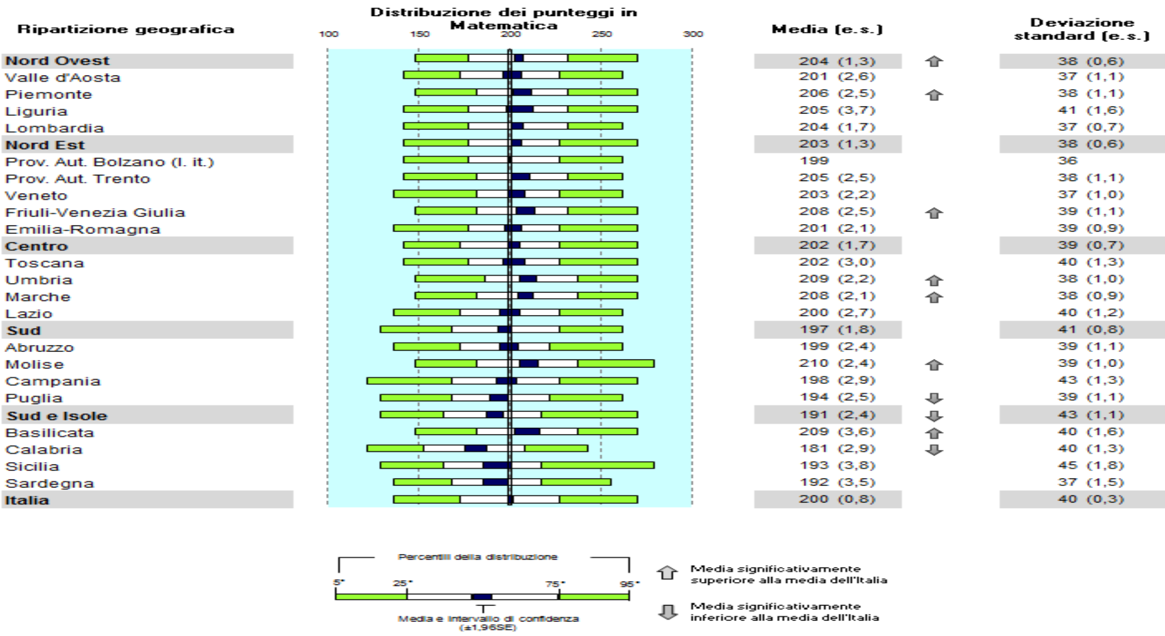


Figura 4 – Distribuzione dei punteggi della prova di Matematica – classe V primaria a. s. 2016/2017 (Fonte: INVALSI, 2017)

A livello regionale il Piemonte (206 punti sia nel 2016 che nel 2017), e il Friuli-Venezia-Giulia (208 sia nel 2016 che nel 2017) continuano ad avere risultati significativamente al di sopra della media del Paese. Positivo nel 2017 anche l'andamento di alcune regioni del centro come Umbria (209) e Marche (208) e del Sud come Molise (210) e Basilicata (209), mentre sono in diminuzione le prestazioni della Puglia (194) ed è sempre la Calabria a far registrare i punteggi più bassi (183 nel 2016 e 181 nel 2017). In linea generale per le classi quinte la lettura dei risultati a livello nazionale presenta un andamento ancora non del tutto soddisfacente con forti differenziazioni nel Paese, ragione per cui continua ad essere prioritario lavorare in funzione di un miglioramento della didattica della matematica nella scuola primaria a partire dalle evidenze fornite sia dai risultati delle rilevazioni nazionali che dalle prove svolte dagli insegnanti.

Relativamente agli ambiti di contenuto, come riportato nella Tabella 1, nelle prove del 2016, gli alunni di seconda primaria hanno incontrato maggiori difficoltà in *Numeri*, mentre gli alunni di quinta primaria in *Spazio e figure* e *Relazioni e funzioni*. Nel 2017 invece gli alunni di seconda hanno avuto punteggi più bassi in *Dati e previsioni*, seguito da *Numeri* e *Spazio e figure*. In quinta maggiori criticità sono state rilevate in *Relazioni e funzioni*, seguito da *Spazio e figure*, *Numeri* e *Dati e previsioni*. È opportuno ricordare come nell'economia di ciascuna prova gli ambiti non abbiano lo stesso peso: ad esempio all'ambito *Numeri* della prova di seconda primaria è dedicata maggiore attenzione che agli altri, mentre la prova di quinta prevede una distribuzione più equa degli item per ambito. Ciò detto la validità statistica dei dati qui riportati è piuttosto limitata, tuttavia essi possono essere utili a livello di sistema per la predisposizione di interventi e piani specifici a supporto dell'apprendimento delle conoscenze/competenze matematiche di base.

Classe II primaria				
Ambito di contenuto	*Difficoltà media*		*Percentuale media risposte corrette*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Numeri	210,43	198,96	44,02	50,41
Spazio e figure	181,31	183,04	59,71	58,55
Dati e previsioni	168,75	200,20	65,70	48,35
Classe V primaria				
Ambito di contenuto	*Difficoltà media*		*Percentuale media risposte corrette*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Numeri	193,18	190,91	51,20	54,96
Spazio e figure	208,21	194,25	44,19	52,59
Dati e previsioni	170,43	174,04	62,24	62,74
Relazioni e funzioni	202,71	208,22	46,79	45,22

Tabella 1 – Risultati della prova di matematica di II e V primaria per ambito di contenuto (2015/2016 e 2016/2017) (Fonte: INVALSI, 2016; 2017)

La lettura dei risultati di matematica in base ad alcune caratteristiche socio-demografiche degli alunni, quali il genere, la cittadinanza e la carriera scolastica, permette alle scuole di conoscere meglio i propri studenti e di organizzare l'offerta formativa tenendo presenti questi aspetti, al fine di verificare quella sia il reale valore aggiunto al netto di detti fattori (Corsini, 2015), i quali, come evidenziato dalle indagini internazionali IEA e OECD, incidono in modo rilevante sugli esiti di apprendimento.

Nella scuola primaria l'incidenza di queste caratteristiche personali comincia ad emergere già a partire dai primi anni per poi diventare significativa soprattutto verso la conclusione del ciclo. Rispetto al genere, ad esempio, differenze significative sono riscontrabili sia nelle prove di matematica di seconda che di quinta per entrambi gli anni: i maschi, infatti, si posizionano sopra la media nazionale, le femmine al di sotto (questo dato è confermato anche dalle prove delle classi successive e le differenze tendono ad aumentare nel corso dell'itinerario scolastico). L'analisi dei dati per macro-aree conferma quanto rilevato a livello nazionale. Nelle classi seconde di tutte le macro-aree del Paese i maschi hanno risultati più alti nella prova di matematica, con una differenza significativa pari a +8 punti nel Nord-Est nel 2016 passata a +6 nel 2017, e a +7 nel Nord-Ovest nel medesimo anno. In quinta questa differenza si irrobustisce ulteriormente nelle macro-aree del Nord-Ovest, Nord-Est e Centro, dove nel 2017 l'incremento è rispettivamente di +8, +8 e + 10 punti rispetto ai valori medi conseguiti dalle femmine. A livello regionale questo andamento è più evidente in Liguria (+14), Piemonte (+9), Lombardia (+8), Veneto (+8), Emilia-Romagna (+8), Lazio (+14), Puglia (+9) e Basilicata (+9)[4].

Come noto anche la provenienza e le origini degli alunni rappresentano una caratteristica personale che incide pesantemente sui risultati di apprendimento, soprattutto nella scuola primaria che fra tutti gli ordini e gradi scolastici è quello che nel corso degli ultimi anni ha accolto il numero più alto di alunni stranieri (Fondazione Ismu, 2017).

Per quanto riguarda i risultati di apprendimento degli alunni di origine e/o provenienza diversa da quella italiana è normale pensare che questi presentino un rendimento scolastico più basso rispetto agli alunni italiani. Nonostante ciò è fondamentale conoscere, sia a livello nazionale che di scuola, l'entità di tale *gap*. Individuare cioè in quali ambiti della disciplina questa differenza di risultati è maggiore e quali sono le difficoltà specifiche che gli alunni stranieri presentano. In generale, le differenze tra alunni italiani e alunni stranieri tendono a essere maggiori nelle aree dell'Italia dove i processi migratori hanno una portata maggiore e dove più alti sono i risultati di apprendimento. Come mostrano i dati della Tabella 2, esistono differenze di risultato visibili tra gli alunni stranieri di prima e seconda generazione, e tra le classi iniziali e quelle terminali della scuola primaria per effetto della scolarizzazione. Gli alunni stranieri di seconda generazione presentano una differenza rispetto agli alunni italiani di 15 punti nella prova di seconda e di 13 punti in quella di quinta, di poco più bassa rispetto ai 17 punti e ai 13 punti del 2016. Nel 2017 in entrambe le prove le differenze di risultato tra alunni italiani e alunni stranieri si sono ridotte rispetto agli anni precedenti pur rimanendo significative.

[4] L'andamento dei risultati procede in senso contrario nelle prove di Italiano, dove le alunne femmine delle classi quinte hanno risultati significativamente superiori ai loro compagni maschi soprattutto in Veneto e nel Lazio nel 2016 e in Lombardia e Sardegna nel 2017.

Classe II primaria					
Macro-area geografica	*Alunni Italiani*	*Alunni Stranieri di I generazione*	*Alunni Stranieri di II generazione*	*Differenza tra Italiani e Stranieri I generazione Matematica*	*Differenza tra Italiani e Stranieri II generazione Matematica*
Nord-Ovest	208	191	191	17	17
Nord-Est	206	177	181	29	24
Centro	203	182	188	21	15
Sud	197	183	191	14	6
Sud e Isole	194	170	185	24	10
Italia	202	182	187	20	15

Classe V primaria					
Macro-area geografica	*Alunni Italiani*	*Alunni Stranieri di I generazione*	*Alunni Stranieri di II generazione*	*Differenza tra Italiani e Stranieri I generazione Matematica*	*Differenza tra Italiani e Stranieri II generazione Matematica*
Nord-Ovest	208	177	191	30	16
Nord-Est	207	177	186	30	21
Centro	204	181	192	23	12
Sud	197	182	186	15	11
Sud e Isole	191	167	190	25	2
Italia	202	177	189	24	13

Tabella 2 – Punteggi medi degli alunni italiani e stranieri di I e II generazione presenti nelle rilevazioni delle classi seconde e quinte per macro-aree geografiche, a. s. 2016/2017 (Fonte: nostra elaborazione)

Le prove SNV ci permettono di rilevare anche le differenze di rendimento di alunni in regola con il percorso di studi, e di coloro che sono in anticipo o in ritardo. Questo tema è strettamente collegato all'utilità o meno delle ripetenze, in merito al quale è in atto un ampio dibattito che coinvolge il mondo dell'educazione sia nazionale che internazionale. Le posizioni restano contrastanti, sia a livello pedagogico (Alexander, Entwisl & Dauber, 2003; Frabboni, 2010) che amministrativo-ordinamentale, infatti a riguardo tra i Paesi UE le soluzioni adottate variano da paese a paese.

Dalla Tabella 3 si evince come nella scuola primaria l'incidenza degli alunni anticipatari e posticipatari sia poco significativa sul totale di coloro che partecipano alle prove SNV. Il fenomeno dell'anticipo è maggiormente diffuso nel Sud e Sud-Isole, dove le percentuali sono in ogni livello scolare più alte di quelle che si registrano nel Nord e nel Centro.

Classe II primaria				
Macro-area geografica	*alunni anticipatari*		*alunni posticipatari*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Nord-Ovest	0,3	0,3	1,4	1,2
Nord-Est	0,3	0,2	1,7	1,8
Centro	1,3	0,7	1,2	1,0
Sud	3,3	3,5	0,8	0,9
Sud e Isole	3,2	4,0	1,0	1,4
Italia	1,5	1,6	1,2	1,3

	Classe V primaria			
Macro-area geografica	*alunni anticipatari*		*alunni posticipatari*	
	a. s. 2015/2016	*a. s. 2016/2017*	*a. s. 2015/2016*	*a. s. 2016/2017*
Nord-Ovest	0,3	0,4	2,1	2,7
Nord-Est	0,3	0,3	2,9	2,7
Centro	1,1	0,6	2,5	2,6
Sud	2,3	3,7	1,4	1,4
Sud e Isole	2,8	3,1	2,0	2,0
Italia	1,3	1,5	2,1	2,3

Tabella 3 – Percentuali di alunni anticipatari e posticipatari presenti nelle rilevazioni delle classi II e V per macro-aree geografiche, a.s. 2015/2016 e 2016/2017 (Fonte: nostra elaborazione)

Sul fronte dei risultati di apprendimento, dalle prove SNV di matematica di entrambi gli anni scolastici per gli alunni anticipatari e regolari, a livello nazionale e in riferimento alle macro-aree geografiche, sia in seconda che in quinta primaria, risulta che le differenze tra i punteggi non sono statisticamente significative. A livello nazionale per il 2016, infatti, il punteggio degli alunni regolari è pari a 200 nella classe seconda e 201 nella classe quinta. Lo stesso si verifica nel 2017. Per gli anticipatari esso ammonta a 201 nella classe seconda e a 199 nella classe quinta nel 2016, a 199 punti in seconda e 197 in quinta nel 2017.

Diversi invece sono i risultati che emergono dal confronto tra gli alunni regolari e quelli posticipatari o in ritardo a causa delle ripetenze. Pur trattandosi di un fenomeno marginale nella scuola primaria (che coinvolge a livello nazionale, poco più dell’1% degli alunni di seconda e del 2% di quelli di quinta), emerge una correlazione stretta tra alunni posticipatari e scarsi risultati di apprendimento misurati attraverso le prove SNV. I punteggi degli alunni posticipatari infatti sono sistematicamente al di sotto di quelli degli alunni regolari, con differenze statisticamente significative per quasi tutte le regioni, con punteggi che per i primi risultano essere più bassi anche di 20-30 punti rispetto a quelli conseguiti dagli alunni regolari.

4. Dai risultati all'innovazione didattica: proposte di riflessione per gli insegnanti

Oggi le conoscenze e le competenze matematiche ricoprono una ruolo centrale sia per la formazione personale di ogni cittadino che per la società e la competitività a livello economico. Per questo lo sviluppo di buone competenze matematiche a partire dalla scuola è diventato un obiettivo prioritario delle politiche europee per l'istruzione, come previsto dalla Strategia Europa 2020 (European Commission, 2010). Nella prospettiva dell'Unione Europea ciò che interessa accertare è se le conoscenze veicolate dalla scuola, sono saldamente ancorate ad un insieme di concetti di base che pur nella loro essenzialità trovano applicazione in molteplici contesti scolastici e extrascolastici (European Commission, 2011).

La didattica della matematica rappresenta quindi un laboratorio in costante evoluzione dove confluiscono e si integrano sia i contributi della ricerca scientifico-accademica che la saggezza della pratica degli insegnanti. Questa costante costruzione e de-costruzione di modelli, strumenti, pratiche, attività, ecc. può prendere avvio anche dall'analisi delle prove SNV, prestando attenzione alle risposte fornite dagli alunni a livello individuale, di classe e di scuola. Se dette risposte diventano oggetto di riflessione da parte dei docenti, di lavoro in classe, di ripensamento delle strategie didattiche, senza scadere nel *teaching to the test*, è possibile attribuire a queste prove non solo una funzione misuratoria ma anche formativa. In tal senso esse possono rappresentare efficaci strumenti per porre situazioni-problema sfidanti, scoprire informazioni, dati, procedure e soluzioni da sperimentare in maniera autentica e situata (Capperucci, 2011).

Come sostiene Fandiño Pinilla (2014), l'apprendimento della matematica chiama in causa molteplici aspetti e processi cognitivi che devono essere considerati a livello didattico. Esso infatti si struttura a partire dall'acquisizione di conoscenze e abilità che devono integrarsi tra loro per dare modo alla competenza matematica di esprimersi in situazione. La matematica fin dalla scuola primaria richiede la comprensione di nozioni e concetti; l'apprendimento algoritmico (calcolare, operare, ecc.); la costruzione di strategie (impostare un problema, pianificare, risolvere, elaborare congetture, ecc.); la capacità di comunicare i dati (dire, riferire, argomentare, validare, dimostrare, ecc.); la gestione delle trasformazioni semiotiche (riconoscere, scegliere, usare e gestire diversi registri semiotici nei quali esprimere le proprie conoscenze e competenze matematiche). Tutte queste azioni prevedono compiti cognitivi di complessità diversa da svilupparsi in maniera graduale, tassonomica, intenzionale all'interno di un percorso di insegnamento-apprendimento fondato su obiettivi chiari da esplicitare prima all'interno della progettazione didattica e da mettere in atto poi in classe (D'Amore & Frabboni, 2005; Bolondi, 2013).

Lo sviluppo di azioni cognitive così complesse attraverso l'insegnamento della matematica chiama in causa le teorie legate alla didattica della matematica. A fronte dei molteplici contributi presenti in letteratura (Bolondi, 2003), in questo frangente viene preso a riferimento soprattutto il modello euristico-costruttivista elaborato da Guy Brousseau (1986), poi in seguito ripreso anche a livello italiano (D'Amore, Sbaragli, 2011). Detto modello cerca di operare un superamento dell'approccio trasmissivo-deduttivo della didattica della matematica centrato sulla divulgazione delle idee e dei saperi matematici, in base a come questi si sono stratificati secondo una prospettiva storico-evolutiva della disciplina.

Il modello euristico-costruttivista qui richiamato prevede:

a) *uno spostamento dell'attenzione dagli oggetti della matematica ai processi di co-costruzione dell'apprendimento* che ne sottendono l'acquisizione. Ci si concentra soprattutto sull'epistemologia dell'apprendimento della matematica a partire dalle diverse strategie di mediazione didattica con cui certi principi, concetti e costrutti matematici possono essere presentati agli alunni;

b) *il ricorso ad una didattica laboratoriale* che non si limita alla predisposizione di ambienti artificiali, centrati sul potenziamento degli aspetti matematici connessi ad alcune attività, procedure e strumenti. Quello che molti studi hanno evidenziato (McMillan & Schumacher, 2010), infatti, è la difficoltà degli alunni nel mettere in atto processi di *transfer cognitivo*, ovvero nel trasferire il sapere appreso in un contesto strutturato, artificiale, situato in un'altra situazione più o meno simile. La scelta di un approccio laboratoriale alla didattica della matematica pertanto non deve ridursi alla semplice esperienza di tecniche, algoritmi e procedimenti bensì al rafforzamento di processi di *problem posing* e *problem solving* applicati a situazioni note e inedite;

c) *il ruolo dell'allievo come agente euristico*: grazie ad una didattica laboratoriale, a partire dall'esperienza diretta, l'allievo costruisce in modo attivo la sua conoscenza, interrogando l'ambiente che lo circonda, formulando ipotesi, organizzando le sue costruzioni mentali, sperimentando soluzioni e verificandole per via empirica. L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento; l'allievo non è posto nella condizione di recepire passivamente le informazioni dell'insegnante, ma rielabora costantemente in maniera autonoma ogni proposta confrontandola con i punti di vista degli altri;

d) *l'interazione sociale in aula:* la conoscenza matematica è il risultato di un processo di co-costruzione che si basa sulla condivisione di conoscenze, lo svelamento di misconcezioni, l'interazione tra più soggetti attorno ad una situazione problematica da risolvere. Tali interazioni possono avvenire tra pari, gli alunni, o tra questi ultimi e l'insegnante. In tal caso è importante tenere sotto controllo il fenomeno del *contratto didattico*, ripreso anche nelle pagine successive, affinché il comportamento degli alunni non sia condizionato da quelle che questi pensano essere le aspettative dell'insegnante.

e) *il ricorso a situazioni a-didattiche:* secondo la classificazione di Brousseau (1986), in ambito scolastico possono verificarsi *situazioni didattiche*, *a-didattiche* e *non-didattiche*. Le situazioni didattiche sono quelle previste in modo esplicito e intenzionale dall'insegnante, con lo scopo di fare apprendere agli alunni una certa conoscenza stabilita in precedenza. L'alunno ha la consapevolezza che sta imparando ciò che l'insegnante sta insegnando e si impegna non tanto ad apprendere la matematica ma a comprendere come soddisfare le attese dell'insegnante in merito ad uno specifico contenuto. Le situazioni a-didattiche invece sono quelle in cui è la situazione-problema stessa a suggerire all'alunno l'esigenza di acquisire alcune conoscenze che in quel momento non possiede. L'alunno, da solo o in gruppo, provoca la situazione-problema dopo averla analizzata procedendo per tentativi dopodiché verifica se questi sono andati a buon fine e se hanno sortito l'effetto desiderato. Se ciò non si verifica negozia ulteriormente con il gruppo dei pari le azioni da intraprendere per giungere alla risoluzione del problema. In questo caso si arriva alla produzione di conoscenza, non esplicitamente richiesta e condizionata dalle attese del docente, frutto del percorso di ricerca e di riflessione che il bambino ha operato da solo o con i compagni. In questo caso l'intenzionalità didattica dell'insegnante non viene meno, poiché egli conduce comunque la regia delle fasi di lavoro (*devoluzione*, *implicazione*, *costruzione di conoscenza privata*, *validazione*), ma in modo meno diretto rispetto al primo caso. Il suo compito è soprattutto quello di proporre situazioni apprenditive significative, costruire ambienti di ricerca, predisporre compiti di realtà funzionali a stimolare le conoscenze e competenze da promuovere negli alunni. Nel terzo tipo di situazione, invece, quella non-didattica, insegnante e alunni non hanno un rapporto specifico con il sapere in gioco, ovvero le attività proposte non rimandano ad un'intenzionalità didattica del docente pur essendo comunque in grado di sviluppare apprendimenti. L'informalità che connota questo genere di esperienze formative le rende anche meno controllabili e implementabili.

f) *il potenziamento della riflessività e della metacognizione:* l'impiego di situazioni a-didattiche ed il ricorso a compiti di realtà favorisce non solo la costruzione di conoscenza ma anche la messa in atto di processi metacognitivi e metariflessivi relativi all'impostazione del problema, alle informazioni disponibili e a quelle da ricercare, alle strategie e agli strumenti da impiegare per la risoluzione della situazione-problema, all'analisi e validazione dei risultati conseguiti.

Nelle pagine che seguono, prendendo spunto da alcuni quesiti contenuti nelle prove SNV degli ultimi anni, sono avanzate alcune proposte di riflessione didattica limitatamente agli ambiti di contenuto e ai processi matematici di *Spazio e figure* e *Numeri*. A partire dall'analisi delle risposte fornite ai quesiti, sia a livello di classe che a livello di scuola, possono essere condotte molteplici analisi sui punti di forza e di debolezza degli apprendimenti in matematica nonché individuare possibili soluzioni metodologiche in grado di intervenire sulla qualità dei risultati.

4.1. Spazio e figure: aspetti concettuali e figurali della geometria

Il ragionamento geometrico, secondo quanto sostenuto da Fischbein (1993), è caratterizzato da due componenti: una concettuale e una figurale. I concetti geometrici, infatti, sono entità astratte, ideali e determinabili formalmente come i numeri o altri oggetti matematici, ma hanno anche proprietà che possono essere colte solo con l'intuizione spaziale, ad esempio la forma (Paoli, 2014, p. 206). L'interazione di queste due componenti dovrebbe portare a una conoscenza adeguata ma, in realtà, essa è spesso fonte di conflitti.

Nella Figura 5 è riprodotto un quesito della prova SNV del 2016 per la classe seconda primaria, in cui questi aspetti sono ben evidenziati[5].

[5] I quesiti proposti sono ripresi dalle *Guide alla lettura Prova di Matematica classe II primaria e classe V* del 2016, https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L02.pdf e https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/2016-GUIDA-L05.pdf, consultati in data 20/08/2017.

Per rispondere correttamente l'alunno deve innanzitutto mantenere il controllo sul numero e sul tipo dei pezzi assegnati. In questo caso la percentuale di studenti che ha risposto correttamente è stata del 33,7%. La difficoltà sottesa all'item proposto è legata a quello che viene definito "senso dello spazio", inteso come la capacità di visualizzare oggetti e di compiere trasformazioni mentali su di essi. Come sostiene Fandiño Pinilla, in casi come questo si prevede un "uso della geometria senza calcoli, basta solo saper vedere" (2016, p. 5).

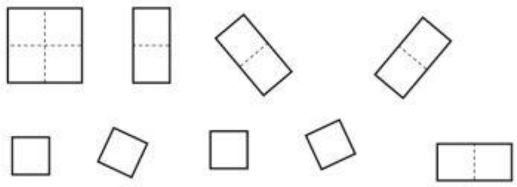
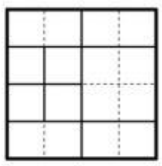
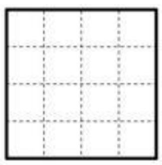
Domanda	Caratteristiche
D4. Questi sono i pezzi per comporre un quadrato.  **Aldo ha composto il quadrato in questo modo:**  **Componi il quadrato in modo diverso, utilizzando gli stessi pezzi.** 	**AMBITO PREVALENTE** Spazio e figure **SCOPO DELLA DOMANDA** Tassellare una figura piana **PROCESSO PREVALENTE** Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo. **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 5 – Quesito D4 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

Una situazione analoga viene proposta anche nella prova della quinta primaria (Figura 6). Per rispondere correttamente alla domanda l'alunno deve aver raggiunto i primi tre livelli della comprensione del pensiero geometrico secondo Van Hiele (Crowley, 1987):

– *visualizzazione*: lo studente riconosce le forme geometriche per la loro forma e come un tutto, ma non per le proprietà;

– *analisi*: lo studente inizia a conoscere le proprietà delle figure ma le relazioni tra le figure e le definizioni non sono ancora comprese;

– *deduzione informale*: lo studente studia le relazioni logiche tra proprietà, e le definizioni e le interrelazioni tra figure prendono significato ma non è ancora in grado di organizzare sequenze logiche di affermazioni per giustificare le argomentazioni.

In questo caso, quindi, l'alunno deve essere in grado di riconoscere che le due figure sono composte da figure congruenti e, di conseguenza, hanno la stessa area. Gli studenti che rispondono A o C dimostrano di non aver colto questa uguaglianza. Nel caso della risposta A non "vedono" l'equiscomponibilità delle figure ma si limitano solo alla loro diversa dimensione; nel caso della risposta C, invece, si lasciano "trarre in inganno" dal diverso perimetro, deducendo che due figure che hanno perimetro diverso debbano avere anche area diversa.

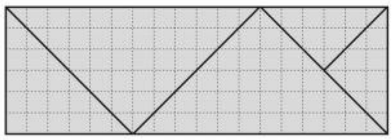
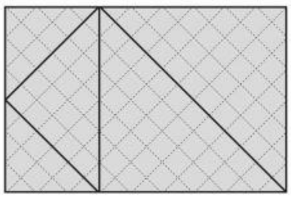
Domanda	Caratteristiche
D19. Osserva le seguenti figure.  Figura A  Figura B **Le due figure hanno la stessa area?** A. ☐ No, perché le due figure hanno dimensioni diverse B. ☐ Sì, perché i triangoli che formano la figura A sono gli stessi che formano la figura B C. ☐ No, perché le due figure hanno perimetro diverso D. ☐ Sì, perché ciascuna delle due figure è composta da triangoli rettangoli	**AMBITO PREVALENTE** Spazio e figure **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere la giustificazione corretta in un problema di equiscomponibilità di figure piane. **PROCESSO PREVALENTE** Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule.* **DIMENSIONE** Argomentare

Figura 6 – Quesito D19 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

L'insegnante, in questo caso, può decidere di lavorare sui concetti di area e perimetro, riproponendo agli studenti un quesito simile attraverso l'uso del *tangram*: modificando la posizione delle tessere gli alunni potranno comprendere, attraverso l'esperienza diretta, che l'area resta invariata mentre ciò che si modifica di volta in volta, a seconda della composizione dei vari "pezzi", è il perimetro.

Il quesito proposto di seguito, rivolto sempre ad alunni di quinta primaria, prevede lo stesso tipo di ragionamento (Figura 7). L'ambito prevalente cui si riferisce l'item è quello dei *Numeri* poiché all'alunno è richiesta la capacità di riconoscere e utilizzare una frazione. Per poter dare la risposta corretta, però, deve analizzare le parti in cui è divisa la figura e osservare, ad esempio, che la parte grigia può essere scomposta in quattro triangoli rettangoli congruenti ed individuare, di conseguenza, l'equivalenza tra l'area colorata e quella non colorata. In questo caso solo il 34% degli alunni ha risposto correttamente. Il 25% degli studenti ha scelto la risposta B, probabilmente perché non ha considerato l'equivalenza delle parti e si è limitato a contare le quattro parti da cui è composta la figura. Un altro 18% ha, invece, scelto la risposta D, probabilmente perché, avendo individuato gli 8 triangoli rettangoli da cui è composta la figura si è concentrato sulla frazione perdendo di vista la richiesta della domanda.

Un'ulteriore difficoltà in questo caso potrebbe essere data dalla conversione semiotica: l'alunno per rispondere correttamente deve infatti convertire la rappresentazione geometrica del quesito in una rappresentazione in termini algebrici, in particolare in frazioni. La capacità di usare più registri per rappresentare uno stesso oggetto è alla base della costruzione cognitiva dei concetti matematici, ma proprio per questo è anche la causa principale di parte delle difficoltà connesse alla matematica (D'Amore, 2001).

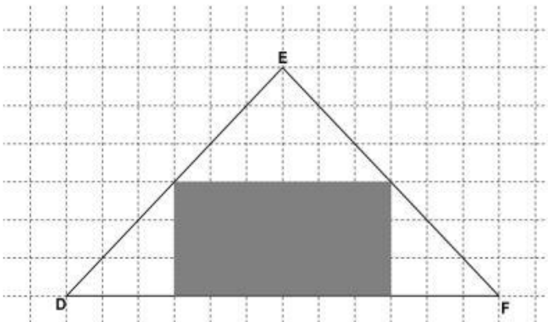
Domanda	Caratteristiche
D11. Osserva la seguente figura.  **A quale frazione dell'area del triangolo DFE corrisponde il rettangolo grigio?** A. ☐ $\frac{1}{6}$ B. ☐ $\frac{1}{4}$ C. ☐ $\frac{1}{2}$ D. ☐ $\frac{1}{8}$	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Data una figura riconoscere la frazione corrispondente a una frazione dell'area di questa. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Operare con le frazioni e riconoscere frazioni equivalenti.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 7 – Quesito D11 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Il quesito D1 per la seconda primaria offre uno spunto di riflessione su quelle che vengono definite "misconcezioni geometriche" (Figura 8). Nell'attività didattica quotidiana bisogna sempre tenere presente che l'allievo interpreta i messaggi dell'insegnante secondo le proprie conoscenze, convinzioni ed esperienze e sono proprio queste che possono condurre a interpretazioni distorte. Queste ultime, tuttavia, pur essendo concetti errati che l'alunno costruisce nel tempo, non devono essere considerati necessariamente in senso negativo, dal momento che è possibile che l'alunno necessiti di una misconcezione momentanea per poter giungere alla costruzione corretta di un concetto. L'insegnante ha comunque una grande responsabilità relativamente alla costruzione di "modelli primitivi", ossia le prime "immagini" proposte durante l'insegnamento, poiché sono proprio questi, nella maggior parte dei casi, a contribuire alla formazione di misconcezioni in seguito difficili da superare.

In questo caso all'alunno viene chiesto di individuare il numero di rettangoli presenti nel disegno e alcuni di questi sono posti in posizione non standard. Nonostante la percentuale di risposte corrette sia del 47%, il fatto che più della metà degli alunni non abbia risposto correttamente ad un quesito apparentemente semplice ci induce a riflettere proprio sul peso ricoperto dai "modelli primitivi". Sia gli studenti che rispondono 6 che quelli che rispondono 3, molto probabilmente vengono tratti in inganno proprio da quei rettangoli che non si presentano nella posizione in cui generalmente sono abituati a vederli. La figura prototipica del rettangolo è quella appoggiata sulla base orizzontale più lunga e con l'altezza verticale più corta. L'alunno quindi, se non entra in contatto anche con immagini di rettangoli poggiati sulla base più corta o con la base non parallela al margine del foglio, si creerà un'immagine errata del concetto di rettangolo che, prima o poi, entrerà in conflitto con le immagini di nuovi concetti geometrici.

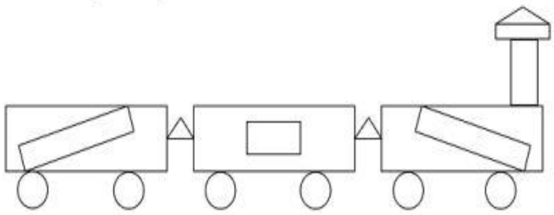
Domanda	Caratteristiche
D1. Osserva questa figura.  **a. Quanti rettangoli ci sono nella figura?** A. ☐ 6 B. ☐ 8 C. ☐ 3 **b. Quanti triangoli ci sono nella figura?** **Risposta:** .... triangoli	**AMBITO PREVALENTE** **Spazio e figure** **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere e contare triangoli e rettangoli in una figura complessa **PROCESSO PREVALENTE** Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo. **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ...* *Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 8 – Quesito D1 "Spazio e figure" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

4.2. Numeri: contratto didattico, proporzionalità, abilità di calcolo e uso delle frazioni

Passiamo adesso dall'ambito di contenuto *"Spazio e figure"* a quello dei *"Numeri"*. La domanda che segue (Figura 9) può rappresentare un buon esempio di quello che alcuni autori hanno definito "contratto didattico". Il quesito ripropone un noto problema di Alan Schoenfeld degli anni '80 a cui meno di un quarto degli studenti era riuscito a rispondere correttamente. La stessa situazione-problema è stata poi riproposta nel 1997 da D'Amore e Martini (D'Amore & Frabboni, 2005), che, a seguito delle loro ricerche, hanno interpretato il comportamento degli alunni come una delega formale del "contratto didattico".

Il contratto didattico può essere definito come "l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante. Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti… ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità" (D'Amore, 2001, p. 14).

Domanda	**Caratteristiche**
D18. Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.  **In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.** **Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?** A. ☐ 6 B. ☐ 7 C. ☐ 6,2 D. ☐ 10	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Dare significato a una divisione con resto. **PROCESSO PREVALENTE** Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. **DIMENSIONE** Risolvere problemi

Figura 9 – Quesito D18 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Nel caso delle prove INVALSI solo il 35% degli alunni ha dato la risposta corretta ma, il dato interessante riguarda il 40% che ha scelto la risposta C proprio in virtù di questa delega formale. Gli alunni che hanno risposto 6,2, infatti, svolgono il problema dal punto di vista algebrico salvo poi non effettuare un controllo semantico della risposta. In base agli studi sul contratto didattico è emerso che in una situazione-problema di questo tipo l'alunno non si sente "autorizzato" a rispondere 7, ossia il risultato semanticamente corretto, poiché avendo svolto correttamente la divisione necessaria, in base alla delega formale, ritiene che non sia più suo compito ragionare e controllare il risultato che viene così semplicemente trascritto.

Come confermato dagli studi di Zan (2007) sui problemi in ambito matematico, in questo caso la difficoltà degli studenti sta nella rappresentazione, ossia nella mancata ricostruzione della situazione problematica. Di conseguenza, la dimensione narrativa del problema viene fatta prevalere sul contesto che perde di autenticità: lo studente dà quindi la risposta numerica corretta se si considera solo la domanda, ma di per sé errata poiché in questo caso doveva prevalere il contesto per poter rispondere correttamente. Probabilmente la risposta sarebbe stata diversa se il problema fosse stato posto a livello esperienziale, chiedendo al bambino di eseguire realmente o in maniera simulata l'operazione richiesta.

Un altro tema centrale negli studi attuali in didattica della matematica è quello della proporzionalità. L'analisi del ragionamento proporzionale richiederebbe uno studio più approfondito che non è possibile fare in questa sede, dove ci si limiterà a fornire una visione d'insieme. In questo caso sono stati selezionati due quesiti: uno dalla prova di seconda primaria (Figura 10) e uno da quella di quinta primaria (Figura 11).

Nel caso della seconda primaria gli alunni devono individuare una proporzionalità semplice, il doppio, mentre nel caso della quinta devono prima individuare la proporzionalità delle dosi e poi riconoscere quale di queste non la rispetta, indicando di conseguenza la dose corretta. L'item per la seconda primaria era stimato come il più difficile e, in effetti, ha ottenuto la percentuale più bassa di risposte corrette (23%). L'item per la quinta primaria era, invece, stimato come il terzo più difficile e, anche in questo caso, la percentuale di risposte corrette (26%) è stata coerente con quanto indicato dall'indice di difficoltà.

<table>
<tr><th>Domanda</th><th>Caratteristiche</th></tr>
<tr><td>D11. Un barista per preparare 3 panini ha usato:
– 6 fette di pane
– 3 fette di pomodoro
– 1 mozzarella

Per fare 6 panini ha bisogno di:
– .... fette di pane
– .... fette di pomodoro
– .... mozzarelle</td><td>AMBITO PREVALENTE
Numeri
SCOPO DELLA DOMANDA
Individuare una relazione
PROCESSO PREVALENTE
Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure
Indicazioni nazionali: TRAGUARDO
L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.
DIMENSIONE
Conoscere</td></tr>
</table>

Figura 10 – Quesito D11 "Numeri" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

<table>
<tr><th>Domanda</th><th>Caratteristiche</th></tr>
<tr><td>D10. Osserva la tabella che riporta gli ingredienti per tre e per cinque pizze.
Nella colonna degli ingredienti per cinque pizze c'è un errore.
Fai una crocetta sull'errore e scrivi accanto il valore corretto.
<table><tr><th></th><th>Ingredienti per tre pizze</th><th>Ingredienti per cinque pizze</th></tr><tr><td>Lievito di birra</td><td>30 g</td><td>50 g</td></tr><tr><td>Olio d'oliva</td><td>60 ml</td><td>100 ml</td></tr><tr><td>Farina</td><td>750 g</td><td>1500 g</td></tr><tr><td>Acqua</td><td>450 ml</td><td>750 ml</td></tr><tr><td>Passata di pomodoro</td><td>600 g</td><td>1000 g</td></tr></table></td><td>AMBITO PREVALENTE
Relazioni e funzioni
SCOPO DELLA DOMANDA
Riconoscere la relazione esistente tra i dati, individuare gli errori e saperli correggere.
PROCESSO PREVALENTE
Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico.
Indicazioni nazionali: TRAGUARDO
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.
DIMENSIONE
Argomentare</td></tr>
</table>

Figura 11 – Quesito D10 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Il ragionamento proporzionale è un'abilità fondamentale in matematica ed è considerato da alcuni autori la chiave di volta della matematica nella scuola primaria (Parish, 2010). Proprio per questo motivo non può e non deve limitarsi all'applicazione di regole mnemoniche o algoritmi ma deve, invece, coinvolgere l'abilità di sistemare e gestire mentalmente un insieme di informazioni (Beck McIntosh, 2013). La proporzionalità è percepita dagli alunni in maniera intuitiva, prima ancora del suo studio formale a scuola; è inoltre strettamente collegata con la progressione dei concetti moltiplicativi (Pesci, 2002). Proprio questa sua iniziale caratteristica intuitiva però, fa sì che le difficoltà si presentino nel momento in cui la proporzione viene presentata in classe enunciandone termini e proprietà. Il "contratto didattico", precedentemente citato, influisce sugli alunni che vanno così ricercando la "regola" da applicare piuttosto che ragionare criticamente sul contesto specifico del problema. Il ragionamento proporzionale, infatti, non riguarda l'applicazione di una moltiplicazione per trovare il numero mancante, ma necessita di un uso intenzionale di relazioni moltiplicative per confrontare quantità e prevedere il valore di una quantità basata sul valore di un'altra.

Per questo motivo è fondamentale che gli alunni comprendano il concetto di proporzionalità attraverso una sua costruzione diretta e attiva. La metodologia costruttivista del *problem based learning* (Hung, Jonassen & Liu, 2008), in questo caso, si rivela utile per un primo approccio a un concetto matematico così complesso e strettamente collegato a molti altri quali le frazioni, i numeri decimali, le percentuali, ecc. L'approccio costruttivista per la risoluzione dei problemi mette gli alunni in condizione di dover ricercare informazioni e strategie per risolvere il problema e, di conseguenza, giustificarle. L'importanza di abituare gli alunni a fornire spiegazioni delle risposte date è così giustificato da Van de Walle e collaboratori: "perché i bambini sono portati ad accettare per autorità le spiegazioni dell'insegnante, mentre quelle dei compagni vengono naturalmente messe in discussione, sfidate, passate al vaglio della critica e del dubbio" (2017: 63).

La prossima domanda (Figura 12), inserita nel fascicolo della prova per la seconda primaria, può fornire interessanti spunti connessi allo studio delle operazioni. In questo caso solo il 37% degli alunni ha fornito la risposta corretta. Il quesito richiedeva di mettere in relazione il linguaggio verbale, con il quale era espressa la domanda, con quello figurale con cui erano forniti i dati per la risoluzione.

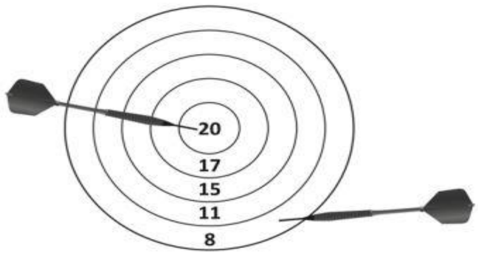
Domanda	Caratteristiche
D15. Giorgio ha ottenuto 39 punti con il lancio di tre freccette. **L'immagine mostra i punti fatti da Giorgio con due delle freccette.**  **Quanti punti ha fatto con la terza freccetta?** **Risposta**:	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Risolvere un problema a struttura additiva diretta e inversa **PROCESSO PREVALENTE** Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria. **DIMENSIONE** Risolvere problemi

Figura 12 – Quesito D15 "Numeri" – Prova di Matematica classe seconda (2016)

L'alunno doveva sottrarre dai punti totali, la somma dei punti ottenuti col lancio delle prime due freccette. La difficoltà del quesito sta nel fatto che ciò che deve essere trovato non è lo "stato" iniziale o finale, bensì una trasformazione tra stati. Gli alunni, secondo quanto emerso dagli studi a riguardo, tendono a ricercare le operazioni da effettuare nelle parole-chiave del testo del problema: "aggiungere", "vincere", "ottenere" o "togliere", "perdere" sono generalmente gli "indizi" utilizzati a giustificazione di addizioni o sottrazioni richieste dal problema. In questo caso specifico, però, dal momento che parte del problema è espresso attraverso una figura, il linguaggio non influenza l'alunno che, probabilmente, proprio per questo motivo, non riesce ad individuare l'operazione corretta da svolgere. I problemi aritmetici, però, non dipendono dall'operazione da eseguire ma dalla struttura logica che essi presentano. La didattica tradizionale, infatti, è solita presentare l'addizione attraverso problemi di unione e la sottrazione attraverso problemi di separazione, è fondamentale invece presentare ai bambini fin dalla scuola primaria problemi sottrattivi di unione e problemi additivi di separazione, evitando in tal senso di indurre fissità di ragionamento e difficoltà risolutive (Carpenter & Moser, 1983; Gutstein & Romberg, 1995).

Qui di seguito, nelle Figure 13 e 14, vengono presi ad esempio due item per la quinta primaria nei quali si richiede agli alunni di riconoscere e utilizzare diverse rappresentazioni dei numeri, in particolare i numeri decimali, le percentuali e le frazioni per operare confronti tra di essi.

Domanda	Caratteristiche
D25. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri. 50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$ **Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.**	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Riconoscere rappresentazioni diverse dello stesso numero. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 13 – Quesito D25 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

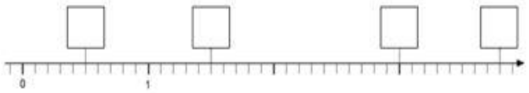
Domanda	Caratteristiche
D30. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri: 1,5 | $\frac{6}{2}$ | 3,8 | $\frac{1}{2}$ 	**AMBITO PREVALENTE** Numeri **SCOPO DELLA DOMANDA** Conoscere le diverse rappresentazioni dei numeri e saperli posizionare sulla retta dei numeri. **PROCESSO PREVALENTE** Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra. **Indicazioni nazionali: TRAGUARDO** Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...). **Indicazioni nazionali: OBIETTIVO** *Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta e utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.* **DIMENSIONE** Conoscere

Figura 14 – Quesito D30 "Numeri" – Prova di Matematica classe quinta (2016)

Nel caso della prima domanda le risposte corrette sono state pari al 37%, mentre per la seconda il 42%. Uno dei prerequisiti necessari per comprendere la nozione di frazione è quello della frazione come partizione, ossia uno o più oggetti che vengono divisi in parti uguali. Per poter rispondere correttamente al quesito, in questo caso, gli alunni dovevano possedere anche le nozioni di:

– frazione come quoziente, ossia il valore numerico che si ottiene dividendo numeratore per denominatore

– frazione come rapporto, necessaria per l'equivalenza tra frazioni.

Solitamente il primo costrutto a cui si fa riferimento è quello di frazione come parte-tutto, che è anche quello più semplice da comprendere. Una delle strategie che vengono scoperte per prime è quella del "dimezzamento": i bambini *dimezzano* gli oggetti finché non possono fare la divisione in parti uguali. Van de Walle e Lovin (2017) suggeriscono di iniziare con problemi in cui il numero delle parti, ovvero il denominatore della frazione, sia una potenza di 2 (2, 4, 8...) per passare poi a problemi con denominatore 3 o 6. È sbagliato credere che il problema sia tanto più difficile quanto più cresce il denominatore. Il denominatore 8, per esempio, è più facile del 3, perché nel primo caso la strategia del dimezzamento funziona, mentre nel secondo si dovrà ricorrere a strategie alternative.

Dopo aver lavorato sulle frazioni attraverso la manipolazione concreta, si possono introdurre i simboli convenzionali della frazione, ossia numeratore, denominatore e linea di frazione. Comprendere i simboli frazionari permetterà agli alunni di operare con essi e su di essi. Anche in questo caso, però, è opportuno che i problemi non producano fissità operativa, ma favoriscano una comprensione delle frazioni non come quantità assoluta ma come rapporto fra le parti. I problemi più comuni sono, infatti, quelli in cui dati l'intero e la frazione bisogna trovare la parte. Proporre anche problemi in cui, date la parte e la frazione, deve essere trovato l'intero, realizzando una discussione in classe per trovare la strategia di risoluzione più efficace, potrebbe evitare questo genere di rigidità.

Il passaggio ancora successivo è quello del confronto tra frazioni al fine di ordinarle o individuare equivalenze, ossia quanto richiesto dai quesiti presi ad esempio. Un errore comune fra gli alunni è credere che una frazione con denominatore 7, essendo maggiore di 3 o 4, sia più grande. In questo caso, quindi, è opportuno che l'insegnante non si soffermi sull'enunciazione dei concetti formali ma, al contrario, predisponga attività di esplorazione informale delle frazioni, tralasciando l'aspetto algoritmico, che potrà essere affrontato anche in un secondo momento.

5. Conclusioni

Le prove del Servizio Nazionale di Valutazione restituiscono alle scuole dati quantitativo-qualitativi che possono essere utilizzati sia in funzione del miglioramento degli apprendimenti degli alunni che in funzione della ridefinizione delle pratiche didattiche adottate dagli insegnanti.

Esse pertanto, come affermato nelle pagine precedenti, possono essere utilizzate sia come strumenti autovalutativi che come risorse per ripensare la didattica della matematica nella scuola primaria in modo da proporre concetti, problemi, situazioni matematiche sfidanti tali da sviluppare negli alunni l'interesse a "pensare matematicamente la realtà" e sviluppare competenze trasversali (riflessive, diagnostiche, elaborative, risolutive, ecc.) che vadano ben oltre il contesto scolastico e i contenuti di insegnamento.

Un buon sistema interno di valutazione, curvato sempre più in funzione di uso formativo della valutazione (Scriven, 1967) e ancorato ad una prospettiva *evidence-based* (Hattie, 2012; 2002; Calvani & Vivanet, 2014), deve fondarsi su un dialogo strettissimo tra didattica e valutazione, affidandosi ad una molteplicità di strumenti che contemplino sia le prove standardizzate che quelle elaborate dagli insegnanti, così da valorizzare a pieno gli aspetti positivi delle une e delle altre.

Questa consapevolezza sta lentamente penetrando all'interno dei singoli contesti scolastici, e rappresenta un passo importante per lo sviluppo di una sensibilità inclusiva rivolta a tutti gli alunni a vantaggio di una didattica sempre più consapevole, efficace e attenta alla qualità dei processi e dei risultati di apprendimento.

6. Bibliografia

Alexander, K. L., Entwisle, D. R., & Dauber, S. L. (2003). *On the success of failure: A reassessment of the effects of retention in the primary school grades*. Cambridge: Cambridge University Press.

Barbaranelli, C., & Natali, E. (2005). *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici*. Roma: Carocci.

Beck McIntosh, M. (2013). *Developing proportional reasoning in middle school students.* Disponibile da http://csme.utah.edu/wp-content/uploads/2013/06/Marcie-McIntosh.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Bolondi, G. (2003). Visioni della matematica e curricoli. *L'Educatore*, *LI*(24), 14-17.

Bolondi, G. (2013). Come usare in classe le prove Invalsi. *L'insegnamento della matematica*, *33*(6), 686-701.

Bolondi, G. (2014). *Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute.* In B. D'Amore (a cura di), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire*. Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/8-18%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Calvani, A., & Vivanet, G. (2014). Evidence Based Education e modelli di valutazione formativa per le scuole. *ECPS. Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies*, 9/2014, 127-146.

Capperucci, D. (a cura di) (2011). *La valutazione degli apprendimenti in ambito scolastico. Promuovere il successo formativo a partire dalla valutazione*. Milano: FrancoAngeli.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *The acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 7-44). Orlando, FL: Academic Press.
consultato in data 17/08/2017.

Corsini, C. (2015). *Valutare scuole e docenti.* Roma: Nuova Cultura.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di Didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001). *Didattica della matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare.* Milano: Bruno Mondadori.

European Commission (2010). *Europa 2020 Strategy*. Disponibile da https://ec.europa.eu/info/strategy/european-semester/framework/europe-2020-strategy_en, consultato in data 17/08/2017.

European Commission (2011). *L'insegnamento della matematica in Europa: sfide comuni e politiche nazionali*. Disponibile da http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132IT.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Prove INVALSI di matematica classe II. *La Vita Scolastica*, maggio 2016, 1-21.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fondazione Ismu (2017). *Ventiduesimo Rapporto sulle migrazioni 2016.* Milano: FrancoAngeli.

Frabboni, F. (2010). *La scuola rubata.* Milano: FrancoAngeli.

Gutstein, E., & Romberg, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(3), 283-324.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning.* London, UK-New York, NY: Routledge.

Hung, W., Jonassen, D. H., & Liu, R. (2008). Problem-based learning. *Handbook of research on educational communications and technology*, *3*, 485-506.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2014). *Quadro di riferimento primo ciclo di istruzione. Prova di matematica.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/autori/QdR_Mat_I_ciclo.pdf, consultato in data 17/08/2017.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2015). *Integrazione al quadro di riferimento delle prove INVALSI*. Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Integrazione_QdR_Matematica.pdf, consultato in data 17/08/2017.

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2016). *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2015-16. Rapporto risultati.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf,

INVALSI Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione (2017). *Rilevazioni nazionali degli apprendimenti 2016-17. Rapporto risultati.* Disponibile da https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf, consultato in data 17/08/2017.

McMillan, J. H. & Schumacher, S. (2010). *Research in Education: Evidence-Based Inquiry.* New Jersey: Pearson Education.

MIUR Ministero dell'Istruzione, dell'università e della Ricerca (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione*, numero speciale, Le Monnier, settembre 2012.

Mullis, I.V.S., & Martin, M.O. (Eds.) (2013). *TIMMS 2015 Assessment Frameworks*, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

OECD Organisation for Economic Co-operation and Development (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing Service.

Paoli, F. (2014). *Didattica della matematica dai 3 agli 11 anni*. Roma: Carocci.

Parish, L. (2010). *Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio.* Disponibile da https://www.merga.net.au/documents/MERGA33_Parish.pdf, consultato in data 17/08/2017.

Pesci, A. (2002). *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe.* Bologna: Pitagora Editrice.

Rasch, G. (1980). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Chicago: The University of Chicago Press.

Scriven, M. (1967). *The methodology of evaluation.* In R.W. Tyler, R.M. Gagné & M. Scriven (Eds.), *Perspectives of curriculum evaluation* (pp. 39-83). Chicago: Rand McNally.

Trinchero, R. (2014). Il Servizio Nazionale di Valutazione e le prove Invalsi. Stato dell'arte e proposte per una valutazione come agente di cambiamento. *Form@re - Open Journal per la formazione in rete*, *14*(4), 34-49.

Van de Walle, J. A., Lovin, L. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2017). *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre-K-2* (Vol. 1). London: Pearson.

Vannini, I. (2009). *La qualità nella didattica: metodologie e strumenti di progettazione e valutazione*. Trento: Edizioni Erickson.

Varisco, B. M. (2000). *Metodi e pratiche della valutazione. Tradizione, attualità e nuove prospettive*. Milano: Guerini Studio.

Vertecchi, B., Agrusti, G., & Losito, B. (2010). *Origini e sviluppi della ricerca valutativa.* Milano: FrancoAngeli.

Wright, B. D., Linacre, J. M., Gustafson J. E., & Martin-Lof P. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, *8*(3), 370. Retrieved December 16, 2014.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* New York: Springer Science & Business Media.

Received September 23, 2017
Revision received November 27, 2017/December 10, 2017
Accepted December 30, 2017