“Annali online della Didattica e della Formazione Docente”
Vol. 9, n. 14/2017, pp. 28-45 – ISSN 2038-1034

Sui processi di modellizzazione e di problem posing nell’insegnamento/apprendimento della Matematica

Cinzia Bonotto

Abstract – *In order to introduce, at an early stage, ideas underpinning the process of realistic mathematical modelling, the activities currently used to create an interplay between mathematics taught in the classroom and everyday life experiences must be replaced with more realistic and less stereotyped problem situations. In this paper we will discuss how these changes can be brought about at primary school level through classroom activities that are more easily related to the experiential world of the pupil and consistent with a sense-making disposition. We will show how an extensive use of cultural or social artifacts could prove to be useful instruments in creating a new interplay between schoolroom mathematics and the real world with its incorporated mathematics, by bringing the pupil’s everyday-life experiences and informal reasoning into play. Finally certain artifacts lend themselves naturally to helping pupils with problem posing activities. The classroom activities are also based on the use of a variety of complementary, integrated, and interactive teaching methods, and on the introduction of new socio-mathematical norms, in an attempt to create a substantially modified teaching/learning environment.*

Riassunto – *Per introdurre precocemente idee che stanno alla base del processo di modellizzazione matematica di tipo realistico, si devono sostituire le attività, ora delegate a costituire un’interfaccia fra la matematica scolastica e la realtà extrascolastica, con attività più significative e meno stereotipate. In questo contributo discuteremo come questi cambiamenti possano essere realizzati a livello di scuola primaria attraverso attività che sono più vicine alla realtà esperienziale del bambino e quindi più significative. Illustreremo come l’utilizzo di opportuni artefatti socio culturali può rivelarsi uno strumento utile nel creare un’interfaccia nuova tra la matematica scolastica e la realtà di ogni giorno, con la sua matematica incorporata, promuovendo l’insorgere di ragionamenti tipici delle esperienze extrascolastiche. Attività con opportuni artefatti possono infine favorire l’insorgere di processi di problem posing. Tali attività sono state caratterizzate anche dall’utilizzo di una varietà di metodologie didattiche tra loro complementari, integrate e interattive, e dall’introduzione di nuove ‘socio-mathematical norms’, al fine di creare un ambiente di apprendimento radicalmente diverso.*

Keywords – mathematical modelling, problem posing, artifacts, teaching experiments, primary school

Parole chiave – modellizzazione matematica, problem posing, artefatti, studi esplorativi, scuola primaria

Cinzia Bonotto è Professore Ordinario presso Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita” dell’Università di Padova per il settore MAT/04. Dopo essersi occupata di Logica matematica, i suoi interessi sono ora rivolti alle problematiche riguardanti l’insegnamento della matematica ai vari livelli scolastici e la formazione (iniziale e in servizio) degli insegnanti. Le sue ricerche sono orientate a indagare da un lato il rapporto tra matematica scolastica e matematica extrascolastica e dall’altro il ruolo che i Fondamenti e la Storia della matematica possono rivestire nell’insegnamento di questa disciplina. Da alcuni anni è direttore di un Corso di perfezionamento post lauream in “Metodologia e didattica della matematica” rivolto a insegnanti di scuola secondaria. Ora è Presidente del Centro Ricerche Didattiche “Ugo Morin” di Paderno del Grappa.

1. Introduzione

Molte ricerche hanno evidenziato una forte discontinuità fra la competenza matematica di tipo scolastico e quella che viene attivata in contesti extrascolastici.

Pur riconoscendo la specificità di entrambi i contesti (Resnick, 1987), ed alcune loro intrinseche ed ineliminabili diversità, riteniamo che altre differenze possano essere ridotte e che, nelle attività in classe, si possano e debbano ricreare, almeno parzialmente, quelle condizioni che rendono l'apprendimento extrascolastico più significativo e spesso più efficace.

Si sono quindi progettati e realizzati alcuni studi esplorativi, al fine di abbattere "*l'impermeabilità della membrana che separa l'esperienza della scuola e dell'aula da quella della vita*" (Freudenthal, 1994). In tali studi si è indagata la possibilità di creare una nuova tensione tra la matematica scolastica e la realtà extrascolastica, con la sua matematica incorporata, attraverso situazioni didattiche in cui oltre a *matematizzare il quotidiano* si cerca di *quotidianizzare la matematica* (Bonotto, 2007b).

In accordo con l'approccio della Realistic Mathematics Education si ritiene che il fulcro di tale cambiamento vada individuato nel concetto di "modellizzazione matematica" o "matematizzazione" della realtà.

Progressive mathematization should lead to algorithms, concepts, and notations that are rooted in a learning history that starts with students' informal experientially real knowledge. The idea is not only to motivate students with everyday-life contexts but also to look for contexts that are experientially real for the students as starting points for progressive mathematization (Gravemeijer, 1999).

L'attività di modellizzazione da un lato permette agli studenti di riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui vivono, le comunità di appartenenza e la società in generale, in una prospettiva sempre più situata, dall'altro, essendo simile ad un'attività di ricerca, richiede un approccio costruttivo e una metodologia attiva, partecipativa, collaborativa e, quindi, anche con un elevato potenziale inclusivo.

Essa infine favorisce l'attivazione di processi non solo di *problem solving,* ma anche di *problem posing.* Dopo decenni e decenni di studi sul *problem solving,* si è iniziato a riflettere sul fatto che l'attività di *problem posing* è altrettanto importante.

In questo contributo, basato su molti studi esplorativi condotti soprattutto a livello di scuola primaria (Baccarin, Basso & Feltresi, 2007; Baroni, 2007; Basso & Bonotto, 1996 e 2001; Bonotto, 1999, 2005, 2006, 2007a e 2009; Bonotto e Baroni, 2011a e 2011b; Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2010, 2013 e 2014), illustreremo un nuovo approccio, in cui i processi di modellizzazione e di problem posing sono supportati dall'uso di opportuni materiali/strumenti/artefatti che possono servire a creare dei "contesti ricchi" e fortemente legati alla realtà quotidiana. Qui il termine "contesto" si riferisce a "*quel dominio della realtà che può essere matematizzato*" (Freudenthal, 1994) mentre il termine "ricco" pone l'accento sulle molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire, anche di carattere interdisciplinare, ad esempio con le scienze.

2. Sui rapporti tra matematica scolastica e realtà extrascolastica

Una delle cause delle difficoltà nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica è stata identificata, soprattutto a livello della scuola dell'obbligo, nella separazione tra le pratiche scolastiche e la ricchezza di esperienze e conoscenze che lo studente matura al di fuori della scuola, mentre "*il potere cognitivo, le capacità di imparare e le attitudini all'apprendimento vengono incrementate mantenendo l'ambiente dell'apprendimento legato al contesto culturale... È ben documentato il fatto di bambini e adulti che riescono "matematicamente" bene nel loro ambiente non scolastico, a contare, misurare, risolvere problemi e giungere a delle conclusioni usando arti e tecniche [tics] volte a spiegare, comprendere, far fronte al loro ambito [mathema], che hanno imparato nel loro ambiente culturale [ethno]*" (D'Ambrosio, 1995).

Molti studi mostrano come, ad esempio, gli algoritmi aritmetici, tradizionalmente insegnati a scuola per fornire agli studenti potenti procedure generali, non sempre aiutano questi ultimi nei contesti extra-scolastici e che le strategie sviluppate nella pratica appaiono più efficienti degli algoritmi scolastici.

Certamente alcuni soggetti, particolarmente dotati per gli algoritmi, imparano ad applicare adeguatamente gli algoritmi che sono loro imposti; gli altri (forse la maggioranza) non riescono ad identificare i nuovi algoritmi con quelli... che essi hanno costruito con operazioni di abbreviazione e di ricerca in linea diretta. Non riescono perché nel passato è stato loro chiesto di imparare delle cose che eccedevano le loro capacità mentali. Anche se imparano gli algoritmi senza alcuna lacuna, tuttavia non sono capaci di applicarli nelle situazioni concrete della vita quotidiana… I ricercatori hanno messo in rilievo queste 'ricadute' e si sono meravigliati; ma raramente esse sono diagnosticate come conseguenze dell'insegnamento, perché non si era presa in considerazione alcuna ipotesi di insegnamento alternativo mentre si insegnava il nuovo algoritmo (Freudenthal, 1994).

Nell'usuale prassi scolastica il processo di legare la matematica scolastica con la realtà extrascolastica è ancora sostanzialmente delegato ai classici problemi a parole. Questi, oltre a rappresentare l'interfaccia tra questi due contesti, spesso costituiscono l'unico esempio di problem solving.

I problemi a parole sono racconti, rappresentazioni stilizzate di esperienze ipotetiche, non porzioni di esperienze quotidiane. Secondo Lave i problemi a parole riguardano *"una supposta conoscenza culturale generale che ci si può aspettare abbiano (anche) i bambini. Non riguardano le particolari esperienze dei bambini con il mondo... Le intuizioni dei bambini sul mondo quotidiano sono in effetti costantemente violate nelle situazioni in cui viene chiesto loro di risolvere i problemi in parole. Questa discontinuità da se stessa può contribuire a creare la divisione tra la matematica "vera" e l'"altra" trasmettendo il messaggio che ciò che i bambini sanno sul mondo reale non è valido*" (Lave, 1995).

Queste ed altre considerazioni la portano a concludere che "*le esperienze di questo genere in apparenza quotidiane sono lontane dal riguardare la vita del mondo e i problemi sono progettati per praticare la separazione della matematica dalla esperienza, piuttosto che la sua matematizzazione*".

Invece di creare un ponte tra la matematica scolastica e quella della vita reale, i problemi a parole contribuiscono quindi a creare nel bambino l'idea che l'esperienza scolastica e quella extrascolastica siano nettamente divise, che esista una matematica "vera", trattata a scuola, e una matematica "altra" che è quella utilizzata nella vita quotidiana. Questa separazione può inoltre confermare negli studenti la convinzione che i metodi utilizzati fuori dalla scuola, ad esempio per eseguire dei calcoli, siano sbagliati o non validi, attribuendo così una connotazione negativa all'esperienza quotidiana.

A tale riguardo anche la posizione di Freudenthal (1994), è molto netta: "*Il contesto* [del problema del macellaio, n.d.r.] *è il libro di testo, piuttosto che la realtà, ovvero, in altri termini, dà un'immagine pseudoisomorfa del mondo. Nel contesto del libro di testo ogni problema ha una sola soluzione: non vi è posto per la realtà, con i suoi problemi insolubili, oppure che ammettono più soluzioni. Si suppone che lo scolaro scopra i pseudo-isomorfismi considerati dall'autore del libro di testo, e risolva i problemi, che si presentano come se fossero collegati con la realtà, per mezzo di questi pseudo-isomorfismi. Non vale forse la pena di indagare se e come questa didattica alleva gli atteggiamenti contrari alla matematica, e come mai le reazioni dei ragazzi contro questa deformazione mentale sono così varie*?".

Generalmente i bambini affrontano questi problemi combinando in qualche modo testo, dati, e certi schemi risolutivi interiorizzati nella loro esperienza scolastica; la sola relazione tra la domanda e il contesto sta nel richiedere l'uso dei dati in esso citati; ed è difficile che in questo modo i problemi a parole richiamino alla mente degli allievi esperienze o idee collegate a situazioni realmente vissute. Viene quindi a mancare, nel secondo caso, il riferimento al "senso" della situazione descritta, utile anche a comprendere il "significato" della richiesta (Bonotto, 2007b).

Molte ricerche (si veda Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, per una panoramica su tali studi) hanno individuato una delle cause di tale frattura nel carattere stereotipato dei problemi proposti dai libri di testo che, piuttosto che servire da interfaccia fra la matematica e la realtà, finiscono per promuovere negli studenti un'esclusione di considerazioni di tipo realistico ed una "*suspension of sense-making"* (Schoenfeld, 1991).

In tale dinamica, hanno spesso un peso determinante le aspettative degli insegnanti stessi (Bonotto, 2005; Gravemeijer, 1997; Palm, 2008) e le loro convinzioni sugli scopi dell'educazione matematica. Si è infatti notato che l'uso di problemi stereotipati e la relativa pratica scolastica sono connessi alle convinzioni degli insegnanti riguardo alla matematica e agli obiettivi del suo insegnamento.

Tradizionalmente il problema scolastico è infatti considerato un'imitazione non della vita reale, ma di altri problemi scolastici. Tale concezione condivisa crea un circolo vizioso che si esplica nel generare nuovi problemi basandosi sulla struttura di quelli tradizionali.

Frequentemente viene poi utilizzato dagli insegnanti il metodo dell'identificazione delle parole chiave come strategia da fornire agli alunni per risolvere i problemi (come ad esempio "in tutto" oppure "mettere assieme" dovrebbero corrispondere sempre all'operazione di addizione, "restano" che dovrebbe corrispondere sempre all'operazione di sottrazione, e così via). Questa strategia, però, non permette ai bambini di capire veramente il testo del problema e di costruirsi un modello mentale della situazione, con la conseguenza che talvolta la risoluzione risulta scorretta o priva di senso. Emblematiche sono le risposte date dai bambini, ma anche da insegnanti in formazione, al problema "*Quale sarà la temperatura dell'acqua in un contenitore se metti insieme 1 litro di acqua a 40° C e 1 litro di acqua a 20° C?"*, problema che riprende uno di Nesher (1980) sull'attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico (Bonotto & Wilczewski, 2007).

La ricerca condotta da Verschaffel, De Corte, e Borghart (1997), e confermata dallo studio in ambito nazionale di Bonotto e Wilczewski, ha evidenziato come alcuni insegnanti non ancora in servizio tendano addirittura a considerare errate risposte ottenute tenendo conto di considerazioni di tipo realistico. Questi insegnanti sembrano ritenere che durante le attività matematiche scolastiche l'attivazione di conoscenze extrascolastiche non dovrebbe essere stimolata, anzi piuttosto scoraggiata.

Un importante fattore responsabile della mancanza di senso che spesso caratterizza le strategie di soluzione dei problemi scolastici è quindi il peso esercitato dalla cultura scolastica dominante e l'instaurarsi di un "contratto didattico", nel senso datone da Brousseau, che condiziona a tal punto la pratica scolastica da imporre regole implicite, ruoli e aspettative del tutto fuorvianti. I bambini fin dai primi anni della scuola primaria, vengono a stabilire con l'insegnante accordi ben precisi, espliciti, su come devono accettare lo schema generale di problema e su quale deve essere la loro attività, una volta assegnato il compito (Bonotto & Baroni, 2011a).

Ma quali sono le regole implicite previste dal contratto scolastico per quanto riguarda i problemi a parole che possono risultare fuorvianti per l'apprendimento della matematica?

– *Ogni problema ha una e una sola soluzione.* Gli studenti imparano fin dai primi anni della scuola elementare che ogni problema ha una sola risposta che si ottiene dalla semplice applicazione meccanica delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione). Intere generazioni di autori di libri scolastici scrivono testi in cui sono presenti solo problemi concepiti in questo modo perché così prevede la pratica consueta.

– *I numeri* presenti *nel testo del problema sono tutti indispensabili.* Un'altra idea condivisa dai bambini è che i numeri presenti nei problemi siano tutti necessari (e sufficienti) per la soluzione. Infatti, come dimostrano gli studi di Zan (2000), per la maggioranza dei bambini, il problema scolastico è una struttura linguistica formale, caratterizzata da un testo in cui sono presenti numeri con cui è necessario eseguire delle operazioni.

– *La forma è più importante della correttezza.* Nelle scuole elementari il bambino, anche se ha risolto velocemente e mentalmente un problema semplice, è costretto ad una serie di rappresentazioni e di procedure, che naturalmente perdono in questo caso la funzione di "aiuto", e diventano un inutile rituale che inibisce la creatività matematica e la ricerca di strade alternative; ciò evidenzia la contraddizione fra l'irrazionalità delle strategie utilizzate in contesto scolastico e la consistenza di quelle adottate fuori (Zan, 1991).

Infine la pratica dei problemi a parole è relegata alle attività in classe, ha cioè un suo senso ed una collocazione temporale e spaziale solo all'interno della scuola; raramente gli studenti incontreranno questo tipo di attività fuori dell'ambito strettamente scolastico.

Tutto questo indica una differenza sulla funzione dei problemi a parole nella educazione matematica. I ricercatori, e probabilmente gli estensori di molti nuovi curricula, tra cui quelli italiani, collegano i problemi a parole ad attività di problem solving, di modellizzazione matemati-

ca e di applicazione della matematica stessa. Gli insegnanti invece riconoscono in generale ai problemi a parole un altro ruolo, e cioè quello di essere sostanzialmente degli esercizi nelle quattro operazioni fondamentali (Bonotto, 2007b)[1].

Se, in accordo con molti ricercatori e con gli estensori di molti curricula, tra cui quelli italiani[2], si vogliono

a) problemi reali che nascano da esperienze che i discenti maturano o hanno maturato al di fuori della scuola,

b) situazioni di matematizzazione della realtà ed una vera attività di problem solving,

sono necessari dei cambiamenti.

Una possibilità, che potremmo chiamare di *cambiamento dall'interno*, è quella di modificare la tipologia di problemi proposti a scuola. Secondo questo approccio vengono presentate, anche nei libri di testo, varie tipologie di problemi (ad esempio problemi con più soluzioni possibili, caratteristica tipica dei problemi reali, o problemi irrisolvibili). Ritroviamo questo approccio nel progetto *RME (Realistic Mathematics Education*), sviluppato dal Freudenthal Institute di Utrecht, e nel gruppo di ricerca, diretto da L. Verschaffel, del *Centre for Instructional Psychology and Technology* dell'Università di Leuven.

Un'altra possibilità, che potremmo definire di *cambiamento dall'esterno* (e che si può affiancare alla precedente, in quanto entrambe possono coesistere nella pratica scolastica), è quella di sostituire i classici problemi a parole con un altro tipo di attività, in cui si lavora in "contesti ricchi" e aperti alla matematizzazione (Freudenthal, 1994; Bonotto, 1999 e 2007). Qui il termine "contesto" si riferisce a quel dominio della realtà che può essere matematizzato, mentre il termine "ricco" sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione può offrire. Queste attività si possono realizzare utilizzando opportuni materiali/strumenti/artefatti (ad esempio scontrini, etichette, dépliant, articoli di giornale, guide tv, telecomandi, ecc.).

L'idea non è solo quella di motivare gli studenti attraverso contesti presi dalla vita di ogni giorno ma di attingere a contesti che fanno parte delle esperienze reali degli studenti e che possono essere usati come punti di partenza per una matematizzazione progressiva (Gravemeijer, 1999), al fine di favorire anche una disposizione verso una modellizzazione matematica e l'attivazione di processi non solo di problem solving ma anche di problem posing.

Per attuare tale cambio di prospettiva, l'insegnante di matematica deve diventare esperto nel riconoscere la grande quantità di matematica incorporata nella vita quotidiana. Questo richiede di saper integrare tra loro conoscenze pedagogico-didattiche e disciplinari, senza perdere di vista il contesto scolastico particolare e l'ambiente culturale generale in cui si opera.

[1] Basti pensare che spesso nei testi scolastici si trovano problemi come questo "*L'album di Ilenia ha 12* (evidenziato in rosso, ndr) *fogli disegnati e 16* (evidenziato sempre in rosso, ndr*) ancora bianchi. Quanti fogli ha in tutto*? " in una pagina dal titolo "Problemi con l'addizione". Gli esercizi nelle quattro operazioni fondamentali hanno un ruolo, ed una ragionevole collocazione, all'interno dell'insegnamento della matematica, ma certo non quello di favorire un processo di matematizzazione e di modellizzazione del reale.

[2] *"Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola"* (Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria, 2007, considerazione ripresa nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012).

3. Sulla modellizzazione

Il termine "*modellizzazione matematica*" non si riferisce solamente a un processo in cui una situazione deve essere problematizzata e capita, tradotta in termini matematici, trattata matematicamente, riportata nella situazione originaria reale, valutata e comunicata. Oltre a questo tipo di modellizzazione, che richiede che lo studente abbia già a disposizione qualche modello matematico e strumenti per matematizzare, c'è un altro tipo di modellizzazione, in cui le attività sono usate come veicolo *per lo sviluppo* (piuttosto che *per l'applicazione*) di concetti matematici (Bonotto, 2007; Gravemeijer, 2007). Rientra in questo seconda tipologia l'approccio definito da Gravemeijer "*emergent modelling*", il cui focus è sui processi di apprendimento a lungo termine, in cui un modello si sviluppa da un modello informale e situato ("*un modello di*"), in una struttura matematica generalizzabile (*"un modello per"*).
"*These emergent models are seen as originating from activity in, and reasoning about situations. From this perspective, the process of constructing models is one of progressive reorganizing situations. The model and the situation being modeled co-evolve and are mutually constituted in the course of modelling activity*" (Gravemeijer, 2007).

I *"modelli di"* e i *"modelli per",* quindi, sono per Gravemeijer posti a un livello intermedio tra la conoscenza situata e la conoscenza astratta.

Questa prospettiva nasce come alternativa ai "*didactical models, manipulative materials and visual models that are means to make abstract mathematics more accessible for the student. Especially at the primary and lower secondary level, manipulative materials and visual models are typically used as embodiments of mathematical concepts and objects in mathematics education. The problem of this kind of models, however, is that external representation do not come with intrinsic meaning. From a constructivist perspective, it may be argued that the meaning of external representations is dependent on the knowledge and understanding of the interpreter. This implies that in order to interpret these models correctly, students should already have at their disposal, the knowledge and understanding that is to be conveyed by the concrete models* (Cobb, Yackel & Wood, 1992). "*The emergent-modelling design heuristic tries to circumvent this dilemma, by aiming at a dynamic process of symbolizing and modelling, within which the process of symbolizing and the development of meaning are reflexively related"* (Gravemeijer, 2007).

Anche se è molto difficile, se non impossibile, operare una distinzione netta tra i due aspetti della modellizzazione matematica, è chiaro che essi corrispondono a differenti fasi nel processo di insegnamento/apprendimento. Ad esempio, a livello di scuola primaria il focus deve essere più sul secondo aspetto, a livello di scuola secondaria (specialmente di II grado), il focus può essere spostato sul primo aspetto[3].

Si ritiene, comunque, che un'introduzione precoce alla modellizzazione nel secondo senso sia non solo possibile, ma anzi auspicabile, a tutti i livelli scolastici, come in parte dimostrato

[3] Ora il concetto di modello è presente nelle *Linee Guida* per il *triennio* (indirizzo economico, tecnologico) così come nelle *Indicazioni Generali, triennio* (Linee generali e competenze, e negli Obiettivi specifici di apprendimento).

da alcuni studi esplorativi già condotti (si vedano ad esempio Bonotto 2009, 2010a e 2010b; Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2013 e 2014)[4].

Se, nella pratica scolastica, si vogliono favorire e stimolare processi di modellizzazione matematica, vanno ricercate situazioni problematiche, provenienti dal mondo reale, la cui soluzione non si riduca alla selezione e all'esecuzione di una o più operazioni con i numeri dati.

Gli alunni dovranno essere posti di fronte ad attività in cui devono selezionare le informazioni spogliandole dei dettagli irrilevanti, ricercare ed individuare relazioni e regolarità che poi interpretano e possono descrivere mediante grafici, tabelle, formule. Di solito il prodotto così ottenuto necessita poi di revisioni successive, di aggiustamenti e ristrutturazioni, o raffinamenti, per giungere poi alla risoluzione ritenuta valida, magari in prima approssimazione, per quel contesto (Bonotto, Baccarin, Basso & Feltresi, 2010).

In questo modo la situazione problematica indagata resta sempre in primo piano ed è il riferimento continuo per la qualità della risoluzione ottenuta, nel senso che i dati, le risposte matematiche, vanno interpretati e convalidati nel contesto originale. In questo senso il processo di modellizzazione matematica "*include un numero di cicli iterativi, in cui gli studenti si muovono avanti e indietro dai dati agli obiettivi, tornano indietro, e di nuovo si muovono verso gli obiettivi per testare le proprie ipotesi, per affinare i risultati ottenuti e migliorare le soluzioni trovate*" (Lesh & Doerr, 2003).

Assieme a processi quali organizzare dati, spiegare, giustificare, rappresentare, andranno attivate anche competenze sociali legate alla necessità di confrontarsi e collaborare con gli altri; non vanno infatti trascurati gli aspetti della costruzione sociale delle conoscenze. "*Le descrizioni, le spiegazioni e le giustificazioni degli studenti formano una componente integrante dei modelli che essi producono. A differenza delle molte situazioni problematiche che gli allievi incontrano a scuola, le attività di modellizzazione sono intrinsecamente esperienze sociali*" (Mousoulides, Sriraman & Christou, 2007). Gli studenti lavorano per produrre un risultato che deve essere condivisibile in modo esplicito.

Queste esperienze di lavoro scolastico richiedono infatti momenti di confronto fra pari dove illustrare le proprie proposte mediante descrizioni, spiegazioni e rappresentazioni matematiche. Le discussioni sono occasioni per verbalizzare idee e pensieri, per rendere esplicite conoscenze di contenuto e di processo, ed in cui possono nascere conflitti, necessità di revisioni, di nuove congetture e risoluzioni.

Durante queste fasi gli insegnanti sono posti nella condizione di osservare e valutare i processi di apprendimento dei propri alunni, di registrare i progressi e le difficoltà d'apprendimento dei singoli, e possono intervenire prontamente, sottolineando e riprendendo le osservazioni più rilevanti al fine di condurre il gruppo alla costruzione di conoscenze condivise.

[4] I risultati di uno studio esplorativo da noi condotto evidenziano come i bambini sappiano produrre strategie efficienti di calcolo informale attribuendo senso alle quattro operazioni aritmetiche che essi utilizzano per risolvere le situazioni problematiche presentate (Bonotto Basso, Baccarin & Feltresi 2013 e 2014). Gli alunni risolvono problemi numerici creando modelli alternativi alle usuali procedure di calcolo relative alle quattro operazioni aritmetiche. In accordo con Gravemeijer (2007) noi riteniamo che la costruzione di questi modelli auto-sviluppati possa servire da base per lo sviluppo di conoscenza matematica formale.

L'attività di modellizzazione essendo simile ad un'attività di ricerca, richiede un approccio costruttivo e una metodologia attiva, partecipativa, collaborativa e, quindi, anche con un elevato potenziale inclusivo.

Queste attività, oltre a permettere agli studenti di riconoscere il potenziale della matematica come strumento critico per interpretare e capire la realtà in cui vivono, la loro comunità di appartenenza e la società in generale, in una prospettiva sempre più situata, hanno l'ulteriore vantaggio di favorire naturalmente l'attivazione di processi non solo di *problem solving,* ma anche di *problem posing.*

4. Sul problem posing

Dopo oltre trent'anni di studi sul *problem solving,* si è iniziato a riflettere sul fatto che saper porre dei problemi matematici (*problem posing*) è importante almeno quanto saperli risolvere.

"Problem posing is of central importance in the discipline of mathematics and in the nature of mathematical thinking, and it is an important companion to problem solving" ed ancora *Problem formulating should be viewed not only as a goal of instruction but also as a means of instruction. The experience of discovering and creating one's own mathematics problems ought to be part of every student's education. Instead, it is an experience few students have today – perhaps only if they are candidates for advanced degrees in mathematics"* (Kilpatrick, 1987).

Dalla fine degli anni '80 l'attività di problem posing ha iniziato quindi ad essere considerata una presenza importante nel curricolo di matematica di molti Paesi.

Negli Stati Uniti, ad esempio, *The Principles and Standards for School Mathematics* del 2000 richiedono che gli studenti "*formulate interesting problems based on a wide variety of situations, both within and outside mathematics*".

In Cina *The Interpretation of Mathematics Curriculum* (2001) sottolinea che le abilità degli studenti nel problem solving e nel problem posing dovrebbero essere messe in risalto e che gli studenti dovrebbero imparare a trovare dei problemi e a porsi dei problemi "*in and out of school of the context of mathematics*".

In Italia, nel 2001, l'Unione Matematica Italiana ha riconosciuto il problem posing come una delle attività significative da sviluppare all'interno dei nuclei fondanti del sapere matematico e più recentemente *"Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta ad un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi"* (Indicazioni Nazionali per il curricolo 2007 e 2012).

Il concetto di problem posing è stato esplorato da diversi autori, i quali l'hanno indagato da differenti punti di vista. Secondo Brown e Walter (1988) il problem posing è nato dal problem solving ma si distacca da quest'ultimo perché può fornire un'occasione per sviluppare processi autonomi di pensiero, in quanto aiuta a scoprire fatti matematici nuovi, nuove questioni, ma anche ad approfondire concetti già incontrati. Per questi autori il problem posing stimola inoltre il pensiero creativo.

Anche Silver (1994) ha analizzato il problem posing come processo strettamente correlato al problem solving, che può presentarsi prima, durante o dopo la soluzione di un problema:

(1) *pre-solution posing*: vengono generati problemi originali a partire da una situazione stimolo presentata;

(2) *within-solution posing*: vengono riformulati i problemi che si stanno risolvendo;

(3) *post-solution posing*: vengono modificati gli obiettivi o le condizioni di un problema già risolto per generarne uno nuovo.

Per studiare l'attività di problem posing in matematica i ricercatori hanno proposto delle categorizzazioni sia delle diverse situazioni di problem posing che possono venire proposte, sia della tipologia di problemi che possono essere creati in tali situazioni.

Stoyanova e Ellerton (1996), ad esempio, classificano le attività di problem posing in tre diverse categorie: *free problem posing situations*, *semi-structured problem posing situations* e *structured problem posing situations*.

Per quanto riguarda la prima categoria proposta, una situazione di problem posing è *free* se agli studenti viene chiesto di generare dei problemi senza che siano date loro particolari restrizioni: ad esempio si può chiedere agli studenti di creare dei problemi che siano difficilmente risolvibili per i loro compagni, oppure di creare dei problemi per un test o semplicemente dei problemi divertenti da risolvere.

Per quanto concerne la seconda categoria, una situazione di problem posing è considerata *semi-structured* se agli studenti vengono presentati dei problemi aperti (open-ended o ill-structured problems), o delle situazioni non strutturate, e sono invitati a esplorare la struttura della situazione e a completarla applicando le conoscenze, le abilità e i concetti derivati dalle loro precedenti esperienze matematiche. Si può, ad esempio, chiedere agli alunni di creare dei problemi da una determinata equazione, figura o da uno story problem.

Per quanto riguarda la terza categoria, una situazione di problem posing può considerarsi *structured* quando si basa su uno specifico problema. Esempi di questo tipo possono essere quelli in cui si chiede agli alunni di creare un problema dalla riformulazione di un problema già risolto, con domande mancanti oppure con dati insufficienti o superflui.

Molti studi hanno cercato di incorporare attività di problem posing in classe. Questi studi mettono in evidenza che attività di problem posing hanno avuto una influenza positiva sul pensiero degli studenti, sulle loro abilità nel problem solving, sul loro atteggiamento e fiducia nella matematica e nel problem solving, ed anche sulla creatività (Bonotto 2006, 2013 e 2015; Bonotto & Dal Santo, 2015; English, 1998 e 2003; Leung, 1996; Silver, 1994).

Nei nostri studi noi consideriamo il problem posing come il processo secondo il quale gli studenti, in base alle loro esperienze, costruiscono delle interpretazioni personali di situazioni concrete e le formulano come problemi matematici significativi. Per gli studenti questo processo diventa perciò un'opportunità di interpretazione e di analisi critica della realtà.

Nelle nostre proposte il processo di problem posing è supportato dall'uso di opportuni materiali/strumenti/artefatti che possono servire a creare

– contesti ricchi e fortemente legati alla realtà quotidiana,

– situazioni di tipo semi-strutturato.

Durante queste attività gli studenti devono:

– distinguere i dati significativi da quelli irrilevanti;
– scoprire le relazioni tra i dati;
– decidere se le informazioni in loro possesso sono sufficienti a risolvere il problema;
– ricercare se i dati coinvolti sono coerenti dal punto di vista numerico e contestuale.

Queste attività sono tipiche del processo di modellizzazione, e sono simili alle situazioni da matematizzare che gli studenti hanno incontrato o incontreranno fuori dalla scuola. Esse rientrano poi in quel tipo di situazioni, poco presenti nella realtà scolastica odierna, che possono preparare gli individui a sintonizzarsi adattivamente con il tipo di situazioni naturali che incontreranno fuori della scuola, come auspicato da Resnick (1995).

5. Sugli artefatti culturali

Secondo la prospettiva della psicologia storico-culturale (si veda ad esempio Cole, 1995) l'esperienza, lo sviluppo, e l'apprendimento umano, si realizzano in uno specifico contesto culturale, il quale include tutta una serie di artefatti, considerati come strumenti, sia concreti sia astratti, che permettono all'uomo un'esperienza indiretta del mondo, mediata cioè da tali artefatti. Essi hanno quindi una duplice natura, concettuale e materiale: gli artefatti, infatti, incarnano la storia intellettuale di una cultura e spesso incorporano al loro interno teorie e concetti (Saxe *et al.*, 1996). Possono, quindi, essere risorse per la realizzazione di eventi interattivi, "*strumenti costruiti dall'uomo, dalla storia, dalla cultura, che modificano l'attività umana e che mediano i rapporti che bambini e adulti hanno con il mondo*" (Pontecorvo, 1997). Un artefatto è quindi un rappresentante, un testimone della società in cui viviamo, della cultura cui apparteniamo, dei mezzi e modi di comunicare tipici della nostra epoca.

L'utilizzo di opportuni artefatti in classe è così uno dei modi attraverso il quale si può creare un ponte di collegamento efficace tra il contesto extrascolastico, che è situato, e quello scolastico, spesso decontestualizzato. Incoraggiando i bambini a cercare, riconoscere, interpretare, analizzare e riflettere su "*fatti matematici*" presenti in opportuni artefatti culturali, che altro non sono che materiali concreti, o loro riproduzioni, che i bambini incontrano, e possono manipolare, nella vita di ogni giorno" si può, oltre a *matematizzare il quotidiano,* anche *quotidianizzare la matematica* (Bonotto, 2007).

Molti sono gli artefatti socio-culturali utilizzati in alcuni nostri studi esplorativi per indagare la possibilità di introdurre nuovi concetti matematici o per consolidare la comprensione di alcuni concetti matematici. L'attività in classe con tali artefatti (etichette, orari delle programmazioni televisive, scontrini, tessere raccogli punti, misura lettere, calendari, ecc.) sono intrinsecamente molto diverse dai problemi a parole presenti nei sussidiari o, in generale, nei libri di testo, ed ancora molto utilizzati nella pratica scolastica. La significatività e familiarità del problema "tradizionale" consiste solo nella frequenza con la quale lo studente lo incontrerà nella prassi scolastica; spesso egli è solo addestrato a risolverne alcuni di standard, che rientrano in precise tipologie, dall'uso consolidato (Bonotto, 2007b).

Utilizzando in modo opportuno alcuni artefatti possiamo invece creare dei "*contesti ricchi",* dove il termine "*contesto*" si riferisce a "*quel dominio della realtà il quale… si presenta al di-*

scente per essere matematizzato" (Freudenthal, 1994), mentre il termine "*ricco*" sottolinea le molte opportunità di strutturazione che la situazione offre, anche di carattere interdisciplinare, ad esempio con le scienze.

Chiunque ponga un po' di attenzione, cercando di vedere sotto altri occhi la realtà che lo circonda, può facilmente scoprire che c'è una grande quantità di matematica incorporata nella vita quotidiana. "*Il nostro mondo... è già stato matematizzato ad un tale livello che noi non ce ne accorgiamo neppure più, a meno che la nostra attenzione non sia attirata su questo fatto*" (Freudenthal, 1994).

Non si tratta di spogliare l'artefatto da ciò che sembra impedire l'emergere dei contenuti disciplinari ("*È sbagliato guardare al contesto come ad un rumore che disturba il messaggio chiaro della matematica: il contesto è il messaggio, e la matematica è lo strumento per decodificarlo*", Freudenthal, 1994), si tratta di strutturare l'artefatto, contesto ricco di informazioni, dando organicità alle diverse sezioni e individuando i legami reciproci fra esse.

L'alunno può leggere e decodificare i segni e i simboli contenuti nell'artefatto (frutto di convenzioni e di conoscenze cristallizzate nella società) sulla base delle proprie esperienze e competenze, conservando il legame con la realtà garantito dal contesto; può analizzare e cogliere le relazioni fra i dati, dedurne delle conseguenze, e ritornare all'artefatto, interpretando e valutando i risultati rispetto alla situazione di partenza (Bonotto, Basso, Baccarin & Feltresi, 2010).

La duplice natura di questi artefatti, di essere contemporaneamente "*materiali*" e "*ideali*", in altre parole quella di appartenere sia al mondo della vita sia al mondo dei simboli, rende infatti possibile muoversi in modo significativo tra i due ambiti, dalle situazioni di riferimento ai concetti e, viceversa, dai concetti alle situazioni di riferimento, in un processo di "andate e ritorni" che non può che "rafforzare le rispettive comprensioni" (Bonotto, 1999).

Questo processo viene chiamato dalla scuola di pensiero olandese di "*matematizzazione orizzontale*" (si veda Treffers, 1987, ripreso da Freudenthal,1994). Viene così a crearsi un utile *ponte di collegamento* tra contesto scolastico ed extra-scolastico, in cui i bambini possono costantemente mantenere la significatività dei propri ragionamenti ed il controllo delle proprie inferenze (Bonotto, 2007b).

"*Nello scontrino povero di parole ma ricco di significati impliciti, si ribalta la situazione rispetto all'usuale problema di compra-vendita, che risulta spesso ricco di parole, ma povero di riferimenti significativi*" (Basso & Bonotto, 1996).

Un diverso uso di tali artefatti culturali può offrire lo spunto per fare anche della *'matematizzazione verticale'*, dai concetti sui concetti. Questa si manifesta quando si fanno diventare i simboli, i fatti matematici incorporati, oggetti da mettere in relazione, da modificare o manipolare, su cui riflettere, rilevandone proprietà, facendo congetture (Bonotto, 2007b).

La principale caratteristica degli artefatti utilizzati nelle attività è stata quindi quella di promuovere l'insorgere di ragionamenti tipici delle esperienze extrascolastiche, creando una nuova tensione tra la matematica scolastica e la realtà di ogni giorno, con la sua matematica incorporata. Essi infatti fanno parte della realtà esperienziale del bambino, consentendogli di riferirsi a delle situazioni concrete e permettendogli così di sviluppare dei ragionamenti significativi e nello stesso tempo di monitorarli.

Essi contengono poi una molteplicità di dati reali; i risultati dei calcoli spesso devono essere interpretati e/o arrotondati proprio come avviene nei contesti extrascolastici (Baroni, 2007). I dati, non scelti ad hoc dagli autori (come invece avviene nei testi scolastici), possono quindi stimolare nei bambini curiosità di tipo "anticipatorio", ed offrire così la possibilità di affrontare argomenti non previsti [favorendo un "*apprendimento di tipo anticipatorio*" ("*anticipatory learning*") o per "*organizzazione anticipata*", come descritto in Freudenthal, 1994], e di fare collegamenti significativi.

Freudenthal chiama l'apprendimento "*anticipatorio*" anche "*prospettivo*", e lo considera la controparte di quello da lui definito "*retrospettivo*", che si ha quando si richiamano vecchie nozioni riconsiderandole ad un livello più alto ed in un contesto più ampio, processo tipico dei matematici adulti. "*L'apprendimento in prospettiva dovrebbe essere non soltanto permesso, ma stimolato, così come l'apprendimento retrospettivo dovrebbe essere non soltanto organizzato nell'insegnamento, ma anche attivato come un abito di apprendimento*" (Freudenthal, 1994). Gli apprendimenti prospettivo e retrospettivo mirano quindi ad una integrazione del passato e del futuro dei processi di apprendimento: ciò si ottiene con *il riannodare insieme ed intrecciare localmente i fili dell'apprendimento*, avendo in vista l'intero processo di apprendimento come un tutto unico.

La significatività e l'originalità di artefatti opportunamente scelti può favorire la curiosità, l'interesse e la motivazione, ed aiutare a dissolvere le paure comuni e le ansie che solitamente accompagnano l'apprendimento della matematica, come testimoniato dai commenti di bambini coinvolti negli studi.

"*Questo non è un problema. I problemi sono pieni di parole… e poi quelli non riesco a farli perché non capisco bene. Questi sì perché tutti sanno leggere il menù del ristorante e poi il mio papà ha un ristorante*!" (Baroni, 2007).

La caratteristica non artificiale e complessa di questi materiali e la loro natura extrascolastica, possono inoltre favorire la connessione con le altre discipline (ad es. storia, geografia, scienze, italiano) e quindi attività interdisciplinari.

Essi, infine, si differenziano notevolmente dal materiale strutturato utilizzato comunemente nella pratica didattica: quest'ultimo è uno strumento costruito artificialmente, legato all'ambito scolastico, fortemente semplificato e decontestualizzato.

"I blocchi logici sono un esempio tipico di successi, che possono essere mietuti con materiale fortemente strutturato; successi ben miseri, ottenuti grazie all'amore della facilità. Il materiale ricco, aperto alla strutturazione, che offre più numerose opportunità didattiche, richiede di più e quindi è meno facile da sfruttare" (Freudenthal, 1994).

Non è comunque il materiale in sé ed in isolamento che risulta di supporto per l'insegnante, ma è piuttosto l'uso dell'artefatto ed i significati che da esso si sviluppano come risultato di attività: "*The mathematical goals emerge for children not only in relation to artifacts but even in relation to structure of activity, social interaction and children's prior understanding*" (Saxe, 2002).

Le esperienze da noi condotte sono state quindi caratterizzate dall'utilizzo di una varietà di metodologie didattiche tra di loro complementari, integrate ed interattive (verbalizzazioni scritte, lavori in coppia o di gruppo, discussioni collettive, interventi dell'insegnante in fase di istituzionalizzazione del sapere).

Given the complex interaction between the use of the tools and the development of reasoning and learning, the question that should concern educators is not how powerful or effective cultural tools are in promoting learning, but rather what teaching practices and classroom interactions can promote meaningful learning and understanding of the mathematical principles and relations embedded in cultural tools and representations. (Schliemann, 2002).

E sono state introdotte anche nuove "*socio-mathematical norms*", nel senso datone da Yackel e Cobb (1996); tali norme sono costruite e continuamente modificate attraverso l'interazione tra insegnante, allievi ed artefatti, la cui introduzione in classe importa dal mondo esterno potenziali norme e modi di riflettere che aprono nuove linee di sviluppo concettuale e culturale per gli studenti (Bonotto, 2009).

Invitando infine gli allievi

– a recuperare artefatti culturali presenti nella loro vita di ogni giorno,
– a leggervi la parte di matematica evidenziata,
– a riconoscervi alcuni fatti matematici più o meno nascosti,
– ad interpretarli,
– a vederne analogie e differenze [ad esempio modi diversi di rappresentare i numeri],
– a porsi dei problemi [trovare rapporti tra i dati, anticipare proprietà, e così via],

possiamo far riconoscere loro un'ampia varietà di situazioni esterne alla scuola come *situazioni matematizzabili*.

In questo modo si possono moltiplicare quanto si vuole le occasioni d'incontro tra studenti e matematica, ora relegate alle sole aule e ore scolastiche, dando avvio ad una vera attività di matematizzazione del reale, ed alla formazione di un diverso atteggiamento nei confronti di questa disciplina; essa può quindi essere vista come uno strumento per interpretare e capire il mondo e non come un corpo di conoscenze remoto e staccato dal mondo. Un obiettivo importante della scuola, infatti, è quello di insegnare ai bambini e ai ragazzi ad interpretare criticamente la realtà in cui vivono, a capirne i codici e i messaggi, per non restarne esclusi o fuorviati (Bonotto, 2007b).

Ovviamente le caratteristiche di utilità e pervasività della matematica sono solo due delle molteplici facce di questa disciplina e non possono certo esaurirne le peculiarità, il valore e la rilevanza culturali; ciò non di meno noi riteniamo che questi due elementi possano essere adeguatamente sfruttati dal punto di vista educativo per cercare di cambiare i comportamenti e gli atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica.

6. Conclusioni e problemi aperti

Gestire il tipo di attività, quali quelle brevemente descritte in questo contributo, non è comunque un compito facile, o di immediata implementazione, per gli insegnanti. Da qui la necessità di un cambiamento nella formazione iniziale ed in itinere degli insegnanti di tutti gli ordini scolatici.

Essi infatti devono cercare

– di modificare anche il proprio atteggiamento nei confronti della matematica (che risente del modo attraverso il quale a loro stessi è stata insegnata);

– di rivedere le proprie convinzioni sul ruolo delle conoscenze extrascolastiche nelle attività di problem solving;

– di vedere la matematica incorporata nel mondo reale come punto di partenza per attività da fare in classe, rivedendo così il proprio modo usuale di progettare e gestire le attività scolastiche;

– di conoscere le idee e pratiche presenti nelle comunità culturali, etniche, linguistiche degli allievi.

D'altra parte sempre l'innovazione è un processo di apprendimento per l'intero quadro educativo, preso in tutto il suo complesso (Freudenthal, 1994).

7. Riferimenti bibliografici

Baccarin, R., Basso, M., & Feltresi, M. (2007). Lo scontrino del supermercato come strumento di manipolazione, mediazione e matematizzazione. In Bonotto, C., *Quotidianizzare la matematica* (pp. 135-149). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Baroni, M. (2007). Insegnare i numeri decimali nella scuola primaria via artefatti ed attività di problem posing. In Bonotto, C., *Quotidianizzare la matematica* (pp. 151-168). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Basso, M., Bonotto, C. (1996). Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 19A, 5, 423-449.

Basso, M., Bonotto, C. (2001). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality?. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 32, 3, 385-399.

Bonotto, C. (1999). Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento/apprendimento della matematica. *L'Educazione Matematica,* Anno XX, Serie VI, Vol. 1(2), 62-95.

Bonotto, C. (2005). How informal out-of-school mathematics can help students make sense of formal in-school mathematics: The case of multiplying by decimal numbers. *Mathematical Thinking and Learning. An International Journal*, 7 (4), 313-344.

Bonotto, C. (2006). Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. In J. Novotná *et al.* (Eds.), *Proceedings of the 30th PME* (II, pp. 193-200). Prague: Prague Charles Univ.

Bonotto, C. (2007a). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modeling. In W. Blum *et al.* (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 185-192). New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Bonotto, C. (2007b). *Quotidianizzare la matematica*. Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Bonotto, C. (2009). Working towards Teaching Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing in Italian Classrooms. In Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. & Mukhopadhyay S. (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 297-313), Rotterdam: Sense Publishers.

Bonotto, C. (2010a). Engaging Students in Mathematical Modelling and Problem Posing Activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 18-32.

Bonotto, C. (2010b). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In Lesh R., Galbraith P. L., Haines C. & Hurford A. (Eds,). *Modeling Students’ Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 399-408). New York: Springer.

Bonotto, C. (2012). Mathematical modelling and problem posing: how school mathematics can contribute to critical thinking in the society. *Hellenic Mathematical Society – International Journal for Mathematics in Education*, 4, 122-127.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics,* May 2013, Volume 83, Issue 1, 37-55.

Bonotto, C., Baroni, M. (2011a). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? I Parte, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 34(A), 1, 9-40.

Bonotto, C., Baroni, M. (2011b). I classici problemi a parole nella Scuola Primaria Italiana: si possono sostituire o affiancare con un altro tipo di attività? II Parte, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 34(A), 3, 125-160.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F. & Feltresi, M. (2010). Il calendario come veicolo per la modellizzazione matematica. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 33(A), 1, 9-45.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F., & Feltresi, M. (2013). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Prima parte. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 36(A), 4, 325-356.

Bonotto, C., Basso, M., Baccarin, F., & Feltresi, M. (2014). Sul senso delle operazioni aritmetiche e degli algoritmi. Seconda parte. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 37(A), 3, 226-256.

Bonotto, C., Dal Santo, L. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving and Creativity in the Primary School. In F. M. Singer, N. Ellerton, and J. Cai (Eds.). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice Research in Mathematics Education* (pp.103-123), New York: Springer.

Bonotto, C., Wilczewski, E. (2007). I problemi di matematica nella scuola primaria: sull’attivazione o meno di conoscenze di tipo realistico. In C. Bonotto (Ed.), *Quotidianizzare la matematica* (pp. 101-134). Lecce: Edizioni La Biblioteca Pensa Multimedia.

Brown, S. I., Walter, M. I. (1988). *L’arte del problem posing,* Torino: Scuola Viva.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(1), 2-33.

Cole, M., (1995). La cultura in una teoria della comunicazione della mente. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.), *Il pensiero dell’altro* (pp. 97-123), Milano: Raffaello Cortina.

D'Ambrosio, U. (1995). Etnomatematica: teoria e pratica pedagogica. *L'Educazione Matematica*, Anno XVI, Serie IV, 2 (3), 147-159.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.

English, L. D. (2003). Engaging students in problem posing in an inquiry-oriented mathematics classroom. In F. Lester, R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp.187-198). Reston, Virginia: NCTM.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica*. Milano: Editrice La Scuola.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: A case of modelling. *Learning and Instruction,* 7, 389-397.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning. An International Journal*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modeling as a precursor to mathematical modeling. In W. Blum *et al.* (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lave, J. (1995). I problemi aritmetici. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.). *Il pensiero dell'altro* (pp.167-168), Milano: Raffaello Cortina.

Lesh, R., Doerr, H. (2003). In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism? In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 383–403). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mousoulides, N., Sriraman, B., & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling – the emergence of models and modelling perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 12 (1), 23-47.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.1, 41-48.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Pontecorvo, C. (1997). *Apprendere nei contesti*, Studi e Documenti degli Annali della P.I., 78, Le Monnier, 384-396.

Resnick, L. B. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher, 16*(9), 13-20.

Resnick, L. B. (1995). Razionalismo situato. In O. Liverta Sempio, A. Marchetti (Eds.). *Il pensiero dell'altro* (pp. 73-95), Milano: Raffaello Cortina.

Saxe, B. G. (2002). Children's developing mathematics in collective practices: A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences*, 11 (2/3), 275-300.

Saxe, B. G., Dawson, V., Fall, R., Howard, S. (1996). Culture and children's mathematical thinking. In R. J. Sternberg, T. Ben-Zeev (Eds.). *The Nature of Mathematical Thinking* (pp.119-144). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A. D. (2002). Representational tools and mathematical understanding, *Journal* *of the Learning Sciences*, 11 (2/3), 301-316.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss *et al.* (Eds.). *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Stoyanova, E., Ellerton, N. F. *(*1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525), Mathematics Education Research Group of Australasia: The University of Melbourne.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiscobas Project.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.

Verschaffe, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teacher's conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction,* 7(4), 339-359.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Zan, R. (1991). I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare, parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 14A, 9, 807-840.

Zan, R. (2000). Atteggiamenti e difficoltà in matematica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol. 23A, 5, 442-465.

Received October 10, 2017
Revision received November 11, 2017/December 3, 2017
Accepted December 30, 2017